AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Prima di affrontare in maniera formale lo studio degli autovalori e degli autovettori di una matrice quadrata consideriamo alcuni aspetti.

Considerando il prodotto riga per colonne sappiamo che è sempre vero quanto segue:

$$\begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \\ & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \iff A\vec{v} = \vec{w}$$

moltiplicare una matrice per un vettore colonna genera un vettore colonna. Ovviamente in generale $\vec{v} \neq \vec{w}$.

Consideriamo alcuni esempi nel caso di matrici 2×2.

Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ il vettore colonna $\vec{v}$ e $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ il vettore colonna $\vec{w}$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\vec{v} \longrightarrow \vec{w} = A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$$

Quindi al vettore di partenza "generico" $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si associa tramite la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ il vettore generico $\begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$. È chiaro che i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non presentano proprietà in comune. Infatti $|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2}$, $|\vec{w}| = \sqrt{4x^2+9y^2}$

$\theta_{\vec{v}} = \operatorname{arctg}(y/x)$ e $\theta_{\vec{w}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{3y}{2x}\right)$:

$$|\vec{v}| \neq |\vec{w}| \ ; \quad \theta_{\vec{v}} \neq \theta_{\vec{w}}$$

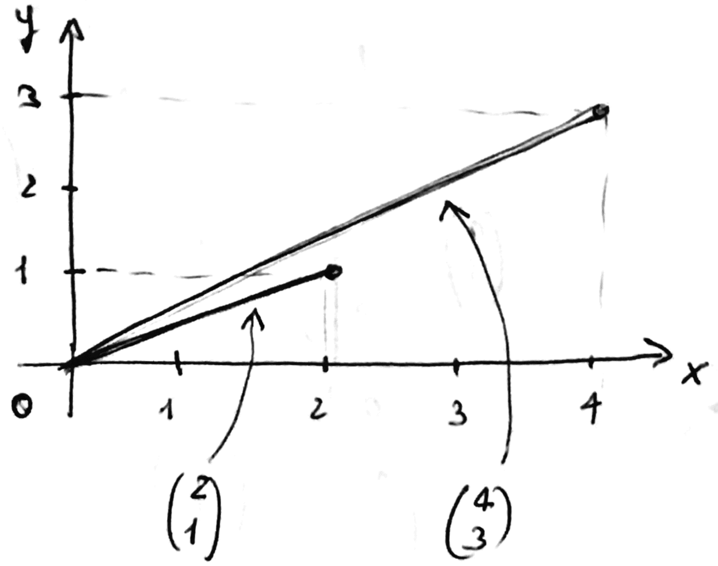
Tuttavia se tra gli infiniti vettori del piano $\vec{v}$ consideriamo i vettori della forma $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ (vettori diretti lungo l'asse x o l'asse y) notiamo che i moduli di $\vec{w}$ sono ancora diversi da quelli di $\vec{v}$ ma le direzioni sono le stesse:

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

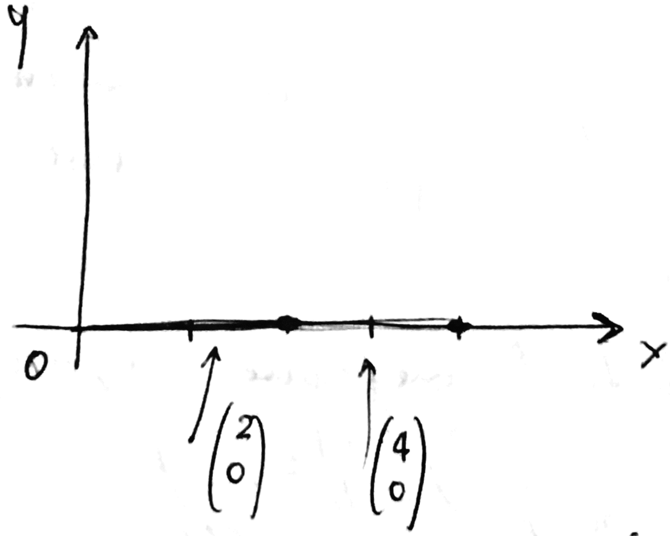
$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi concludere che esistono due direzioni privilegiate per la matrice in questione. Infatti applicando tale matrice al vettore $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ (oppure a $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$) si ottiene ancora un vettore che ha le stesse direzioni di $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ (oppure di $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$).

Graficamente possiamo riassumere l'azione della matrice A come segue



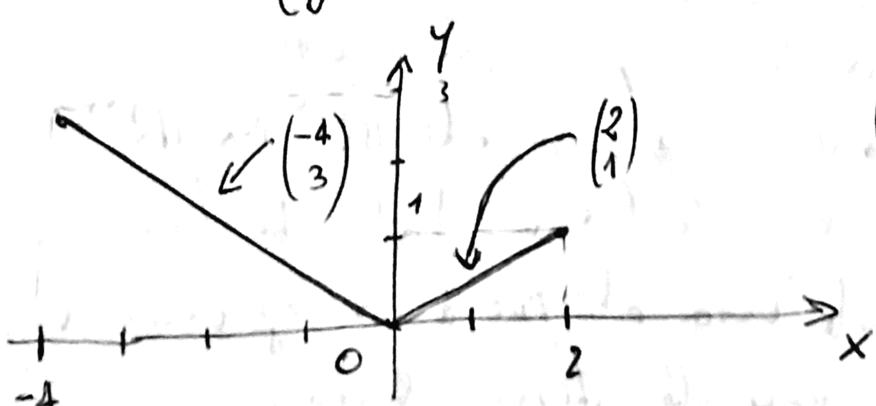
$$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

Consideriamo ora $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$ quindi

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow A\vec{v}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x\\3y\end{pmatrix}$$

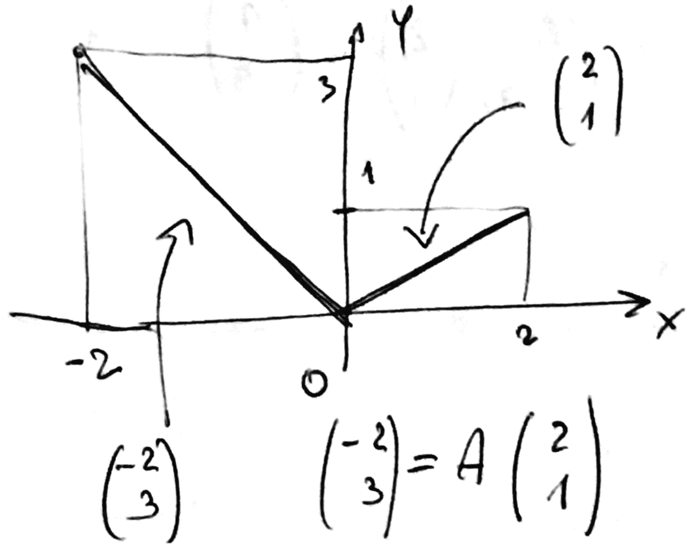


$$\begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

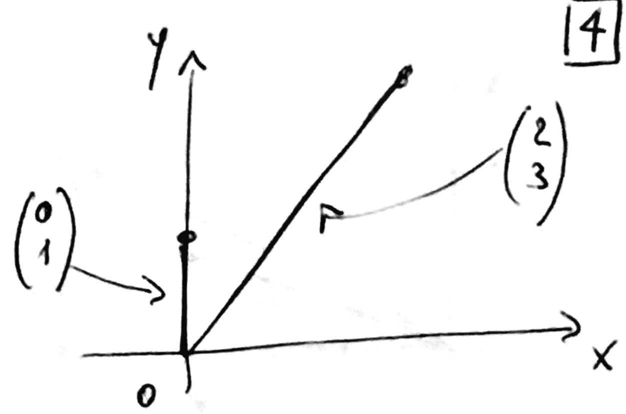
Consideriamo ora $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$ quindi

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\vec{w}=A\vec{v}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+2y\\3y\end{pmatrix}$$

Graficamente abbiamo:



$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo, quindi, intendere l'applicazione della matrice nel vettore come ~~[illegible]~~ una legge che associa due vettori distinti del piano.

Ad esempio, vediamo come trasformazione la proiezione ortogonale sull'asse x: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. In questo caso i vettori che hanno la direzione dell'asse y sono tutti trasformati nel vettore nullo, mentre quelli che hanno la direzione dell'asse x sono trasformati in se stessi.

Ci chiediamo, quindi, se per ogni matrice quadrata, intesa come una trasformazione di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, ci sono delle direzioni privilegiate (cioè tali che trasformando un vettore avente una di queste direzioni, si ottiene ancora un vettore con la stessa direzione o al massimo il vettore nullo.

Ci si aspetta, quindi, che il vettore ottenuto sia proporzionale al vettore di partenza. In formule possiamo scrivere:

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda \vec{v}}$$

(Equazione agli autovalori e autovettori per la matrice A)

λ: è detto <u>autovalore</u> della matrice A connesso al corrispondente autovettore $\vec{v}$.

$\vec{v}$: è detto <u>autovettore</u> della matrice A connesso al corrispondente autovalore λ.

In generale nel caso di n dimensioni l'equazione agli autovalori si intende come segue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

dove $(v_1, \dots, v_n) = \vec{v}^T$ e $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Il tutto può essere riscritto come sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \dots + a_{1n} v_n = \lambda v_1 \\ \vdots \\ a_{n1} v_1 + a_{n2} v_2 + \dots + a_{nn} v_n = \lambda v_n \end{cases}$$

Supponendo che l'equazione $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ammetta soluzione studieremo alcune proprietà generali del problema agli autovalori.

PROPRIETÀ GENERALI

- Calcolo degli autovalori λ:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \implies A\vec{v} - \lambda\mathbb{1}\vec{v} = 0 \qquad (A - \lambda\mathbb{1})\vec{v} = 0$$

dove $\mathbb{1}$ è la matrice unità a n dimensioni.
Affinché esista l'autovettore $\vec{v}$ (ovviamente escludiamo il caso banale in cui $\vec{v}$ è nullo) deve essere soddisfatta la condizione:

$$\boxed{\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0}$$

gli autovalori della matrice A sono le radici dell'equazione algebrica ottenuta ponendo a zero il determinante della matrice $(A - \lambda\mathbb{1})$.

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ \vdots & & a_{33}-\lambda & \vdots \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Analizziamo a cosa corrispondono gli autovalori.
Nel caso di una matrice (1×1) l'autovalore corrisponde alla matrice stessa. Infatti:

$$A = \{a_{11}\} \qquad \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \det(a_{11} - \lambda) = 0$$

$$\implies \boxed{a_{11} - \lambda = 0} \implies \boxed{\lambda = a_{11}} \qquad \text{MATRICE } (1\times1)$$

Nel caso di matrici (2×2) abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}\,a_{21} = 0 \qquad \boxed{\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0}$$

Notiamo che il termine noto dell'espressione di secondo grado in λ è il determinante della matrice A.
Il coefficiente del termine contenente λ è della traccia della matrice A. In generale è detta traccia la somma degli elementi sulla diagonale:

$$\boxed{\mathrm{tr}A \overset{\circ}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}} \quad (\text{traccia di } A)$$

Nel nostro caso (2×2) si ottiene:

$$\boxed{\lambda^2 - \mathrm{tr}A\,\lambda + \det A = 0}$$

Gli autovalori della matrice A devono essere tali che la loro somma è la traccia di A ed il loro prodotto deve essere il determinante di A:

Siano λ_1, λ_2 gli autovalori $\quad \boxed{\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}A \qquad \lambda_1\lambda_2 = \det A}$

Risolvendo l'equazione abbiamo:

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}A \pm \sqrt{\mathrm{tr}A^2 - 4\det A}}{2}} \qquad \text{MATRICE } (2\times2)$$

Gli autovalori di una matrice (2×2) sono reali se e solo se accade:

$$\boxed{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A \geq 0} \quad \begin{pmatrix}\text{autovalori}\\ \text{reali}\end{pmatrix}$$

Nel caso di matrici (3×3) abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(a_{11}-\lambda)\left[(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) - a_{23}a_{32}\right] - a_{12}\left[a_{21}(a_{33}-\lambda) - a_{23}a_{31}\right] +$$

$$+ a_{13}\left[a_{21}a_{32} - (a_{22}-\lambda)a_{31}\right] = 0$$

Riscrivendo il tutto evidenziando i termini in $\lambda^3, \lambda^2, \lambda$ e λ^0 abbiamo:

$$\lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + \left[A_{11}+A_{22}+A_{33}\right]\lambda - \det A = 0$$

dove
$$A_{11} = (-1)^{1+1}\left[a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right]$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}\left[a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}\right]$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3}\left[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right]$$

Quindi possiamo riscrivere il tutto come

$$\boxed{\lambda^3 - \mathrm{tr}A\,\lambda^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} A_{ii}\right)\lambda + (-1)^3 \det A = 0}$$

ottenendo, ora, un'equazione algebrica di terzo grado.

Possiamo ora generalizzare al caso di una matrice $(n \times n)$ introducendo in generale il cosiddetto polinomio caratteristico $P_n(\lambda)$ ottenuto richiedendo che il determinante di $A - \lambda \mathbb{1}$ sia pari a zero.

Per induzione si otterrà come polinomio caratteristico una struttura seguente:

$$\boxed{P_n(\lambda) = \lambda^n - \mathrm{tr}A\, \lambda^{n-1} + [\dots]\lambda^{n-2} + \dots + [\dots]\lambda + (-1)^n \det A}$$

Le parentesi $[\dots]$ contengono i vari minori principali connessi alla matrice A.

In questo caso possiamo ancora affermare che nel caso delle radici del polinomio caratteristico deve essere sempre soddisfatte le condizioni:

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A; \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}A;$$

Se esistono n autovalori, il prodotto di tali autovalori deve essere pari al determinante, mentre la loro somma deve essere pari alla traccia.

Chiaramente non è detto che $P_n(\lambda) = 0$ presenta n radici distinte ma sicuramente la somma delle molteplicità algebriche delle soluzioni è pari ad

n - Se restringiamo la ricerca degli autovalori $\boxed{10}$ al solo caso di radici reali è possibile che le radici (reali) sono in numero inferiore ad n.

[Ricordiamo il concetto di molteplicità di una radice. In generale una radice x_0 di un polinomio $f(x)$ ha una molteplicità m se $f(x) = a(x-x_0)^m g(x)$ dove $g(x)$ è un altro polinomio. Quindi m è il più grande intero positivo tale che il polinomio $(x-x_0)^m$ divide $f(x)$.

Infine si dice che il polinomio di grado n ha n radici (eventualmente anche coincidenti) se $f(x)$ è esprimibile come segue:

$$f(x) = c(x-x_1)\dots(x-x_n) = c\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$
]

Supponiamo che una matrice ammette n autovettori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ associati ad n autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Il set di autovettori $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ sono linearmente indipendenti.

DIM Dimostriamo per induzione.

Verifichiamo per $n=1$. Banale! un set di un solo vettore è un set di vettori linearmente indipendenti.

Verifichiamo per $n=2$. Dunque sia $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ gli autovettori con autovalori λ_1, λ_2:

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \quad e \quad A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$$

Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ sono linearmente indipendenti allora deve accadere

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = 0 \quad (*) \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0$$