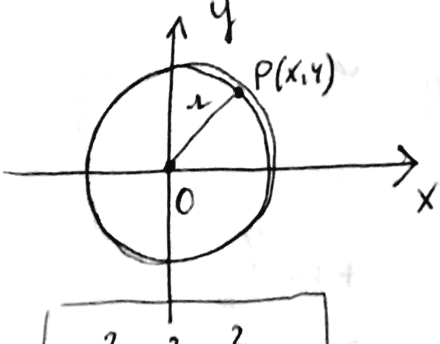
CONICHE

Dalla geometria analitica abbiamo studiato quattro curve piane fondamentali: circonferenza, ellisse, iperbole e parabola. Tali curve sono state analizzate ottenendo delle precise relazioni algebriche che rappresentassero le proprietà geometriche dei quattro luoghi geometrici.

Riferendoci ad un sistema cartesiano monometrico ed ortogonale è stato possibile ottenere l'equazione dei luoghi geometrici senza grosse difficoltà scegliendo di posizionare il sistema di riferimento cartesiano in maniera opportuna.

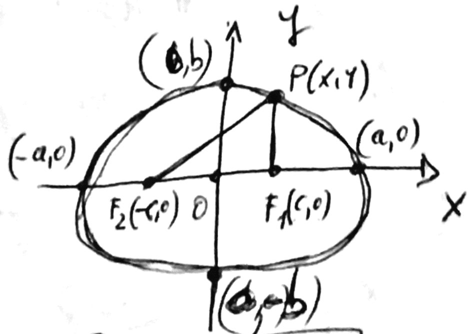
Tuttavia bisogna sottolineare che questa scelta è carente di individuare un metodo generale per la scrittura dell'equazione algebrica.

Ricapitolando i quattro luoghi:



$$\boxed{x^2+y^2-r^2=0}$$

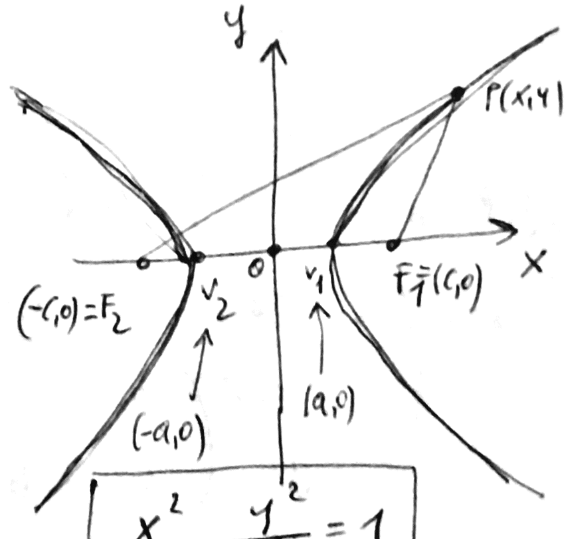
CIRCONFERENZA



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

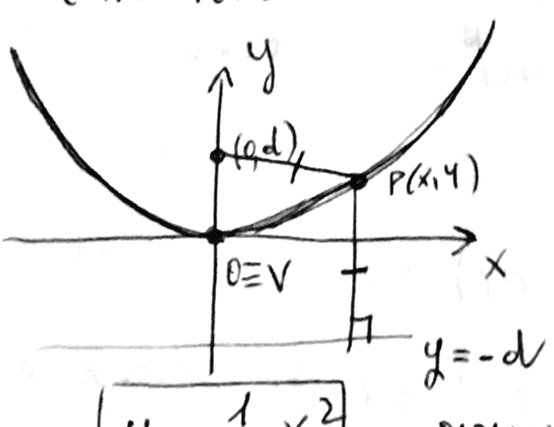
ELLISSE



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

IPERBOLE

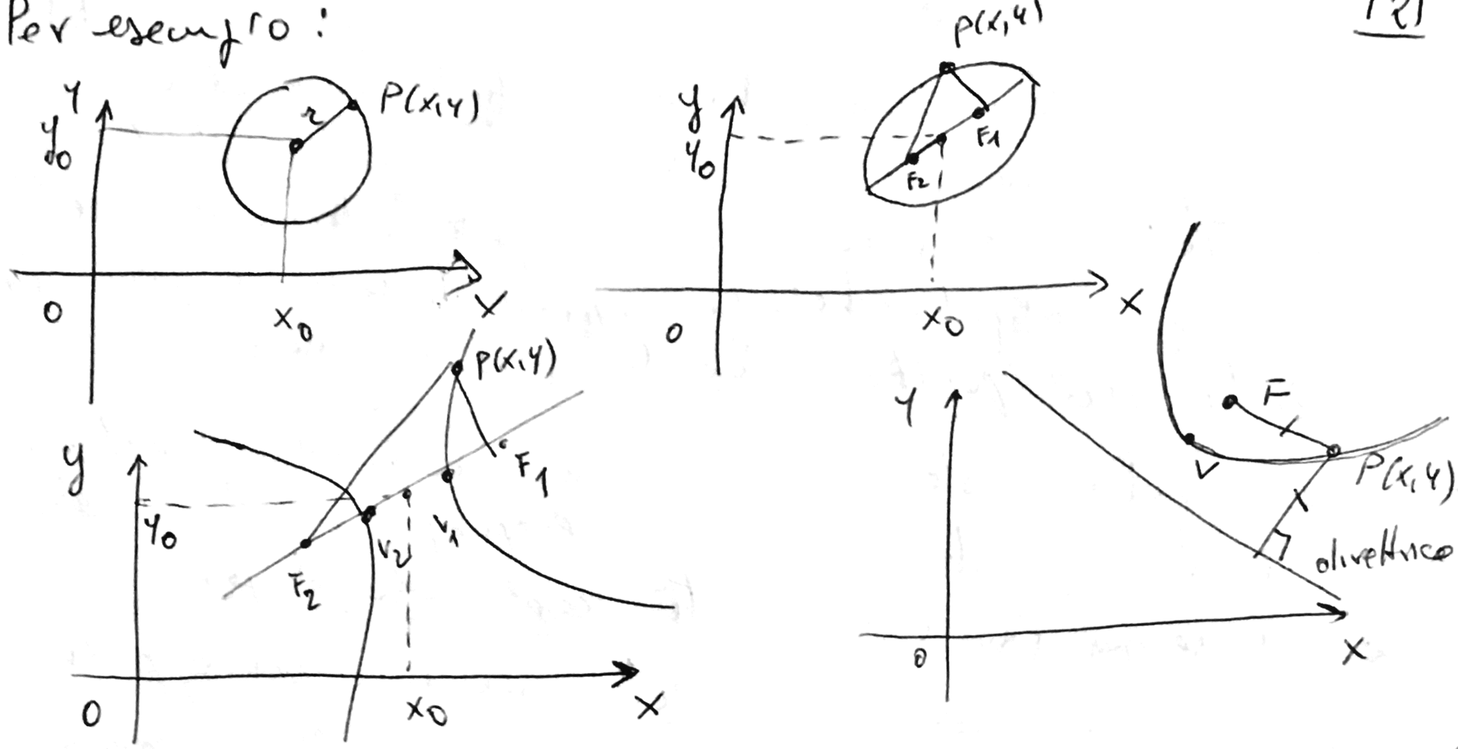


$$\boxed{y=\frac{1}{4d}x^2}$$

PARABOLA

Abbiamo ricavato le equazioni algebriche. Il nostro scopo, quindi, è capire come scrivere l'equazione nel caso in cui le curve sono posizionate arbitrariamente nel piano.

Per esempio:



Inizialmente consideriamo la circonferenza, l'ellisse e la iperbole che possono essere riscrivere in una sola equazione:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+k\frac{y^2}{b^2}=1}$$

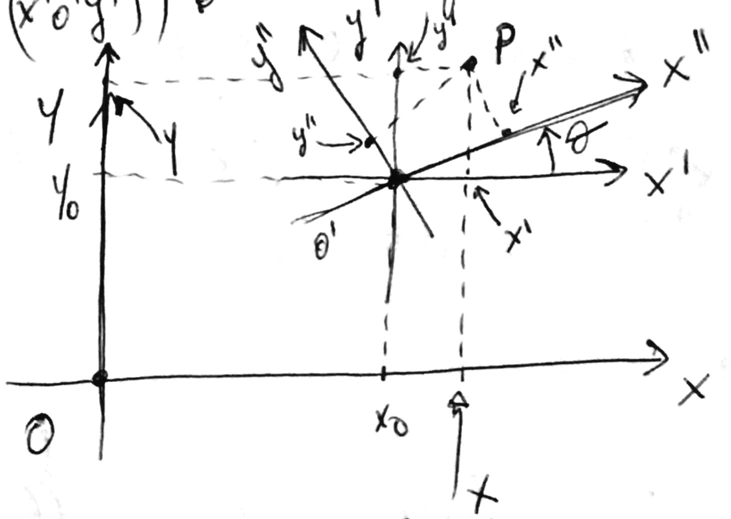
$k=1$: $a=b \Rightarrow$ circonferenza; $a\neq b \Rightarrow$ ellisse

$k=-1 \Rightarrow$ iperbole

Utilizzando le matrici la nostra equazione può essere riscritta come segue:

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}a^{-2} & 0\\ 0 & kb^{-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1 \iff \frac{x^2}{a^2}+k\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Ovviamente quanto scritto si riferisce sempre ad un riferimento (xOy) "centrato" rispetto alle curve. Per passare al caso generale utilizziamo due steps: un passaggio al sistema (xOy) ad un sistema $(x'O'y')$ ~~rot~~ traslato (rispetto a (xOy)) ed un ulteriore passaggio ad un sistema $(x''o'y'')$ ruotato (rispetto a $(x'o'y')$) di un angolo θ:



Il generico punto P è individuato da tre coppie di coordinate (x'',y''), (x',y') e (x,y).

Le relazioni tra le tre coppie di coordinate sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y'' = -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x' = x''\cos\theta - y''\sin\theta \\ y' = x''\sin\theta + y''\cos\theta \end{cases}$$

Introducendo la matrice di rotazione $R(\theta)$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = R(\theta)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Quindi il passaggio diretto dalle coppie (x'',y'') a (x,y) è dato come

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = R(\theta)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = R^{-1}(\theta)\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

Notiamo che $R^{-1}(\theta) = R(-\theta) = R(\theta)^T$ quindi R è una matrice ortogonale.

Ritorniamo alla nostra equazione che rappresenta i tre luoghi geometrici. Ovviamente ora tale equazione va scritta rispetto alle coordinate (x'', y''):

$$\frac{x''^2}{a^2} + k\frac{y''^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & kb^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = 1$$

Definiamo:

$$A'' \doteq \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & kb^{-2} \end{pmatrix}$$

la matrice associata all'equazione. A'' è in forma diagonale quindi a^{-2} e kb^{-2} sono gli autovalori di A'' con i corrispondenti autovettori $(1,0)$ e $(0,1)$:

$$\lambda_1 = a^{-2}; \quad \lambda_2 = k\, b^{-2}; \quad \vec{v}_1'' = (1,0); \quad \vec{v}_2'' = (0,1)$$

$$\det A'' = k\, a^{-2} b^{-2} = \lambda_1 \lambda_2; \quad \operatorname{tr} A = a^{-2} + k b^{-2} = \lambda_1 + \lambda_2$$

L'interpretazione degli autovettori è l'individuazione di due direzioni rispetto alle quali vi sono le caratteristiche geometriche dei luoghi geometrici rappresentati dagli autovalori.

I nostri tre luoghi possono quindi essere classificati e secondo di valori degli autovalori:

CIRCONFERENZA	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$
ELLISSE	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ma entrambi positivi
IPERBOLE	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ma $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

Nel caso della circonferenza $d_1^{-1/2} = d_2^{-1/2}$ è il raggio della circonferenza, quindi lungo le due direzioni fondamentali (le direzioni degli autovettori) abbiamo lo stesso autovalore.

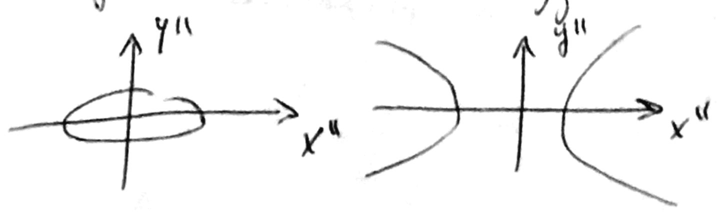
Nel caso dell'ellisse $d_1^{-1/2}$ e $d_2^{-1/2}$ sono i due semiassi (maggiore e minore) individuati dalle direzioni $\vec{v}_1''$ e $\vec{v}_2''$.

Nel caso dell'iperbole abbiamo una sola grandezza reale interpretabile come la semidistanza tra i due vertici ($d_1^{-1/2}$) lungo la direzione $\vec{v}_1''$, mentre abbiamo una "semidistanza immaginaria" connessa all'altro autovalore $\vec{v}_2''$ che vale $i|d_2|^{-1/2}$.

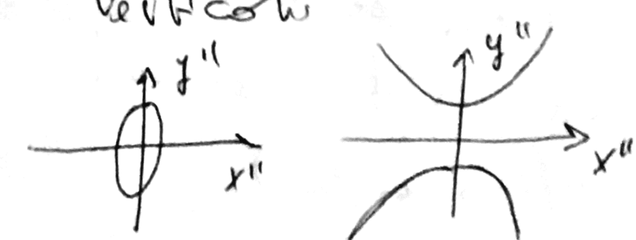
Tale classificazione può anche essere ripetuta introducendo il det A'' e tr A'':

CIRCONFERENZA	$\det A'' > 0$	e $d_1 = d_2 > 0 \Rightarrow$	$\mathrm{tr} A > 0$
ELLISSE	$\det A'' > 0$	e $d_1 \neq d_2,\ d_1, d_2 > 0$	$\mathrm{tr} A > 0$
IPERBOLE	$\det A'' < 0$	e $d_1 \neq d_2$	
IPERBOLE EQUILATERA	$\det A'' < 0$	e $\mathrm{tr} A = 0$	

Ovviamente possiamo anche classificare i casi in cui l'ellisse o l'iperbole sono "orizzontali" o "verticali"



o



Analizzando se $d_1 \gtrless d_2$ e così via...

Passiamo al sistema di riferimento $x'O'y'$:

$$\begin{pmatrix} x'' ; y'' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' ; y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}^T A'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

Siccome

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T R(\theta)^T = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} R^{-1}(\theta)$$

quindi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} R^{-1}(\theta) A'' R(\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

da cui otteniamo $\quad A' = R^{-1}(\theta) A'' R(\theta)$

la relazione tra A' e A'' è esattamente l'operazione inversa del procedimento di diagonalizzazione. Infatti diagonalizzare una matrice vuol dire partire da una matrice non diagonale e attraverso lo studio di suoi autovalori e autovettori giungere alla sua rappresentazione diagonale.

Nel nostro caso stiamo cercando l'espressione generale di A'' quando i suoi autovettori non coincidono con gli assi coordinati (Il nostro luogo geometrico non è centrato rispetto al ~~suo~~ sistema di riferimento).

Tuttavia A' sarà diverse che A'' ma il suo determinante e la sua traccia devono restare invariati.
Infatti:

$$\det A' = \det(R^{-1}A''R) = (\det R)^{-1}\det A''(\det R) = \det A''$$

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}(R^{-1}A''R) = \operatorname{tr}(\underbrace{R^{-1}R}_{\mathbb{1}}A'') = \operatorname{tr} A''$$

Dunque gli autovalori di A'' sono anche autovalori di A';
ovviamente gli autovettori saranno diversi!!!

Calcoliamo la forma esplicita di A':

$$A' = R^{-1}(\theta)A''R(\theta) = R(-\theta)A''R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & \kappa b^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \alpha = a^{-2}\cos^2\theta + \kappa b^{-2}\sin^2\theta \\ \beta = (a^{-2} - \kappa b^{-2})\cos\theta\sin\theta = \dfrac{a^{-2}-\kappa b^{-2}}{2}\sin 2\theta, \\ \gamma = a^{-2}\sin^2\theta + \kappa b^{-2}\cos^2\theta \end{cases}$$

[Se si risolve il problema agli autovalori per A' tenendo conto delle espressioni di α, β, γ si otterrà $\lambda_1 = a^{-2}$ e $\lambda_2 = \kappa b^{-2}$, quindi det e tr sono invarianti.]
Gli autovettori di A' saranno diversi. Calcoliamo:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x' + \beta y' = \lambda_1 x' \\ \beta x' + \gamma y' = \lambda_1 y' \end{cases}$$

ripetendo poi anche per λ_2 otteniamo:

$$\vec{v}_1{}' = x'\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1 - \alpha}{\beta} \end{pmatrix} \quad e \quad \vec{v}_2{}' = x'\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2 - \alpha}{\beta} \end{pmatrix}$$

Sostituendo le espressioni di α, β, λ_1 e λ_2 si ottiene:

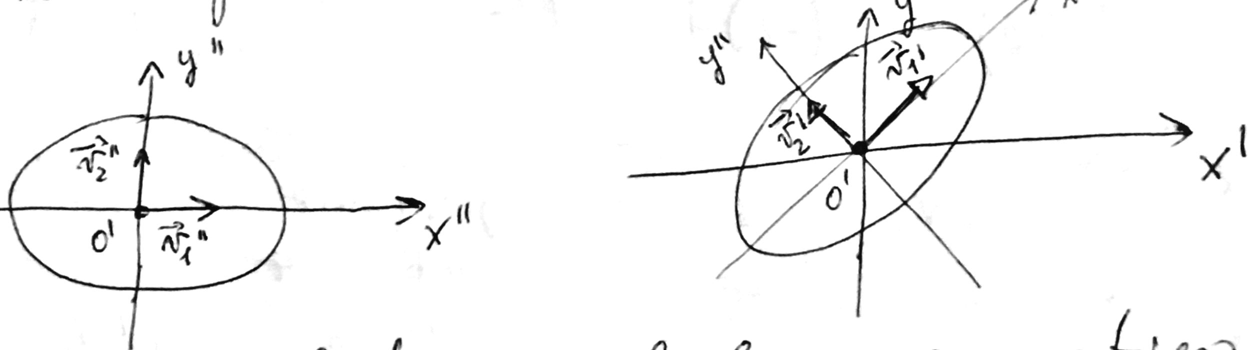
$$\vec{v}_1{}' = x'\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \end{pmatrix} \quad e \quad \vec{v}_2{}' = x'\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{pmatrix}$$

essendo x' generico possiamo scegliere x' tale che $\vec{v}_1{}'$ e $\vec{v}_2{}'$ siano versori. Quindi

$$\vec{v}_1{}' = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad e \quad \vec{v}_2{}' = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Essendo A' simmetrica ($A' = A'^T$) abbiamo $\vec{v}_1{}' \cdot \vec{v}_2{}' = 0$

Quindi gli autovettori sono ancora ortogonali e lungo le loro direzioni abbiamo gli stessi autovalori λ_1, λ_2



L'espressione algebrica del luogo geometrico ora diviene:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1 \longrightarrow \boxed{\alpha x'^2 + 2\beta x'y' + \gamma y'^2 = 1}$$

Studiare le caratteristiche del luogo geometrico consiste quindi nello studio degli autovalori della matrice A', mentre studiare gli autovettori serve ad individuare le direzioni lungo le quali conviene costruire un nuovo sistema di riferimento per semplificare l'equazione algebrica.

Infine ci resta soltanto di passare al set di coordinate (x,y). Dunque la nostra equazione diventa:

$$\alpha(x-x_0)^2+2\beta(x-x_0)(y-y_0)+\gamma(y-y_0)^2=1$$

sviluppando i calcoli notiamo che la struttura della matrice A' rimane inalterata ma vi è la comparsa di termini lineari in x e y e l'apparito di un ulteriore termine noto:

$$\underbrace{\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2}_{\text{non dipende dalla traslazione ma solo dalla rotazione}}\underbrace{-2(\alpha x_0+\beta y_0)x-2(\gamma y_0+\beta x_0)y+\alpha x_0^2+\gamma y_0^2+2\beta x_0y_0}_{\text{dipende dalla combinazione della roto-traslazione}}=1$$

Anche in questo caso è possibile scrivere il tutto sotto forma matriciale:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{matrix}} & \begin{matrix}-(\alpha x_0+\beta y_0)\\ -(\gamma y_0+\beta x_0)\end{matrix}\\ \begin{matrix}-(\alpha x_0+\beta y_0) & -(\gamma y_0+\beta x_0)\end{matrix} & \alpha x_0^2+\gamma y_0^2+2\beta x_0y_0-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$$

$\longrightarrow A'$

Sia A la matrice 3X3 così costruita: $\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}^T A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0}$

Calcoliamo il determinante di A. Dopo qualche calcolo si ottiene facilmente che

$$\det A = \beta^2 - \alpha\gamma = -\det A' = -\lambda_1\lambda_2 \, ;$$

Calcoliamo i minori A_{11} e A_{22}

$$A_{11} = \gamma[\alpha x_0^2 + \gamma y_0^2 + 2\beta x_0 y_0 - 1] - (\gamma y_0 + \beta x_0)^2 =$$
$$= \alpha\gamma x_0^2 + \cancel{\gamma^2 y_0^2} + \cancel{2\beta\gamma x_0 y_0} - \gamma - \cancel{\gamma^2 y_0^2} - \beta^2 x_0^2 - \cancel{2\beta\gamma x_0 y_0}$$
$$= (\alpha\gamma - \beta^2) x_0^2 - \gamma = \det A' \, x_0^2 - \gamma$$
$$= \lambda_1\lambda_2 x_0^2 - \lambda_1 \sin^2\theta - \lambda_2 \cos^2\theta$$

$$A_{22} = \alpha[\alpha x_0^2 + \gamma y_0^2 + 2\beta x_0 y_0 - 1] - (\alpha x_0 + \beta y_0)^2 =$$
$$= \dots = (\alpha\gamma - \beta^2) y_0^2 - \alpha =$$
$$= \lambda_1\lambda_2 y_0^2 - \lambda_1 \cos^2\theta - \lambda_2 \sin^2\theta$$

$$A_{11} + A_{22} = \lambda_1\lambda_2 (x_0^2 + y_0^2) - \lambda_1 - \lambda_2 = \det A' (x_0^2 + y_0^2) - \operatorname{tr} A' \, ;$$

- Passiamo alla parabola. Nel sistema $(x''O'y'')$ l'equazione della parabola vale

$$y'' = \frac{1}{4d} x''^2 \qquad (d \neq 0)$$

supponiamo $\frac{1}{4d} \doteq \eta$
$$y'' = \eta x''^2$$

Notiamo innanzitutto che è assente il termine quadratico in y'' mentre è presente quello lineare in y'' e non vi è termine noto. Volendo introdurre una matrice A'' esattamente come fatto in precedenza abbiamo:

$$A'' = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = \eta$, $\lambda_2 = 0$ con corrispondenti autovettori $\vec{v}_1'' = (1,0)$ e $\vec{v}_2'' = (0,1)$. Quindi

$$\det A'' = 0 \qquad \operatorname{tr} A'' = \lambda_1 = \eta$$

Riscriviamo l'equazione nel sistema $(x'o'y')$:

$$-x'\sin\theta + y'\cos\theta = \eta^2 (x'\cos\theta + y'\sin\theta)^2$$

$$-x'\sin\theta + y'\cos\theta = \eta x'^2 \cos^2\theta + \eta y'^2 \sin^2\theta + 2\eta\cos\theta\sin\theta x'y'$$

$$\eta\cos^2\theta x'^2 + \eta\sin 2\theta x'y' + \eta\sin^2\theta y'^2 + \sin\theta x' - \cos\theta y' = 0$$

nella quale abbiamo ora la matrice A':

$$A' = \begin{pmatrix} \eta\cos^2\theta & \eta\frac{\sin 2\theta}{2} \\ \eta\frac{\sin 2\theta}{2} & \eta\sin^2\theta \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \frac{\sin 2\theta}{2} \\ \frac{\sin 2\theta}{2} & \sin^2\theta \end{pmatrix} \stackrel{\bullet}{=} \eta \begin{pmatrix} \mu^2 & \rho \\ \rho & \nu^2 \end{pmatrix}$$

che ci

$$\det A' = \eta^2 \left(\cos^2\theta \sin^2\theta - \frac{\sin^2 2\theta}{4} \right) = 0$$

$$\operatorname{tr} A' = \eta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \eta = \lambda_1$$

Ancora una volta il det e la tr si sono conservati nel passaggio dal sistema $(x''o'y'')$ a $(x'o'y')$.
~~Basta~~ ~~ora~~ ~~il~~ Nel caso della parabola è bastato ruotarla per eliminare i termini in croce $(x'y')$, come anche nel caso dell'ellisse e dell'iperbole, ma in più adesso abbiamo già i termini lineari in x e y

(mentre per iperbole ed ellisse bisognava anche traslare). Resta dunque traslare la parabola e passare al sistema (xOy):

$$\eta\mu^2(x-x_0)^2+2\eta\rho(x-x_0)(y-y_0)+\eta\nu^2(y-y_0)^2+\nu(x-x_0)-\mu(y-y_0)=0$$

che riscritta ancora in forma analoga al caso precedente

$$\underbrace{\eta\mu^2x^2+2\eta\rho xy+\eta\nu^2y^2}_{\text{non dipende dalla traslazione ma solo dalla rotazione}}+(\nu-2\eta\mu^2x_0-2\eta\rho y_0)x-(\mu+2\eta\nu^2y_0+2\eta\rho x_0)y$$
$$\underbrace{+\eta\mu^2x_0^2+2\eta\rho x_0y_0+\eta\nu^2y_0^2-\nu x_0+\mu y_0}_{\text{dipende dalla combinazione della roto-traslazione}}=0$$

Possiamo ancora introdurre una matrice (3×3) che compatta l'equazione della parabola roto-traslata

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\eta\mu^2 & \eta\rho & \frac{\nu-2\eta\mu^2x_0-2\eta\rho y_0}{2}\\ \eta\rho & \eta\nu^2 & -\frac{\mu+2\eta\nu^2y_0+2\eta\rho x_0}{2}\\ \frac{\nu-2\eta\mu^2x_0-2\eta\rho y_0}{2} & -\frac{\mu+2\eta\nu^2y_0+2\eta\rho x_0}{2} & \eta\mu^2x_0^2+2\eta\rho x_0y_0+\eta\nu^2y_0^2-\nu x_0+\mu y_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$$

$\rightarrow A'$

Notiamo che ponendo $\theta=0$ e $x_0=y_0=0$ (nessuna roto-traslazione), ricordando che in questo caso abbiamo $\mu=1$, $\nu=0$, $\rho=0$, abbiamo:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\eta & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/2\\ 0 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0 \iff \boxed{\eta x^2-y=0}$$

~~semplificare~~ che ci il $\det A$ nel caso della parabola vale $-1/4$. Ovviamente se calcoliamo il determinante della matrice 3×3 nel caso della roto-traslazione troviamo che il determinante vale ~~[illegible]~~ ancora $-1/4$.

Possiamo riassumere i casi fin qui studiati riportando i valori del determinante e della traccia per le varie matrici incontrate.

	$\det A''$	$\operatorname{tr} A''$	$\det A$
CIRCONFERENZA	$1/a^4$	$2/a^4$	$-\det A''$
ELLISSE	$\frac{1}{a^2b^2}$	$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$	$-\det A''$
IPERBOLE	$-\frac{1}{a^2b^2}$	$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$	$-\det A''$
IPERBOLE EQUIL	$-\frac{1}{a^4}$	0	$-\det A''$
PARABOLA	0	1	$-1/4$

- Inoltre in generale le equazioni delle nostre curve possono essere riscritte in una sola equazione che prende il nome di <u>conica</u>:

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$$

dove i coefficienti a_{ij} sono arbitrari ed in generale in questa equazione ci sono circonferenze, ellissi, iperboli e parabole. Dipenderà dai valori acquisiti dai determinanti per poter classificare la conica.

Le corrispondenti matrici sono

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{31} & a_{32} \end{matrix} & a_{33} \end{pmatrix} \to A'$$

Chiameremo <u>forme canoniche</u> per le curve circonferenza ellisse ed iperbole l'equazione della conica seguente:

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0}$$ cioè prendo $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$

mentre per la parabola la forma canonica di conica è la seguente

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{23}y = 0}$$ cioè prendo $a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{33} = 0$

<u>N.B.</u> Infatti in queste due forme canoniche sono nascoste le equazioni delle curve nel sistema di riferimento $(x''O'y'')$. Se studiando il $\det A$ questo risulta diverso da zero mentre $\det A' = 0$ allora la conica rappresenta una parabola che con un'opportuna scelta di trasformazione di roto-traslazione è possibile ricondurla alla forma canonica $y = \gamma x^2$ (o meglio ancora $y'' = \gamma x''^2$).

Nel caso in cui $\det A \neq 0$ ma $\det A' < 0$ allora è un'iperbole.

Infine nel caso in cui $\det A \neq 0$ e $\det A' > 0$ allora è un'ellisse ma non è sufficiente affermare che questa sia davvero un'ellisse rappresentabile sul piano contessono. Infatti è cruciale ora la scelta del coefficiente a_{33}. Per capire bene questo aspetto basta considerare l'ellisse nel sistema $(x''Oy'')$:

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1/a^2 & 0 & 0\\ 0 & 1/b^2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

mentre l'equazione $\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=-1$ rappresenta la cosiddetta <u>ellisse immaginaria</u>. Infatti ora $A=\begin{pmatrix}1/a^2 & 0 & 0\\ 0 & 1/b^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ mentre il caso in cui avessimo $\begin{pmatrix}-1/a^2 & 0 & 0\\ 0 & -1/b^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ sarebbe ancora un'ellisse reale. Possiamo riassumere quindi nel seguente modo:

ellisse reale $\Leftrightarrow (\det A)(\operatorname{tr} A')<0$

ellisse immaginaria $\Leftrightarrow (\det A)(\operatorname{tr} A')>0$

Siccome la traccia di A' e il det di A sono invarianti per rototraslazione queste condizioni devono essere sempre vere.

Ricapitolando abbiamo:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \quad \text{(CONICA)}$$

$$A'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \quad e \quad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$\text{se } \det A\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \det A'>0 \Rightarrow \begin{cases}(\operatorname{tr}A')(\det A)<0 \to \text{ellisse reale}\\ (\operatorname{tr}A')(\det A)>0 \to \text{ellisse immaginaria}\end{cases}\\ \det A'=0 \Rightarrow \text{parabola}\\ \det A'<0 \Rightarrow \text{iperbole}\end{cases}$$

Infine studiando gli autovalori della matrice A' è possibile dedurre se l'ellisse è in realtà una circonferenza oppure l'iperbole è in realtà un'iperbole equilatera.

- Resta da capire a cosa corrisponde la conica quando $\det A = 0$.