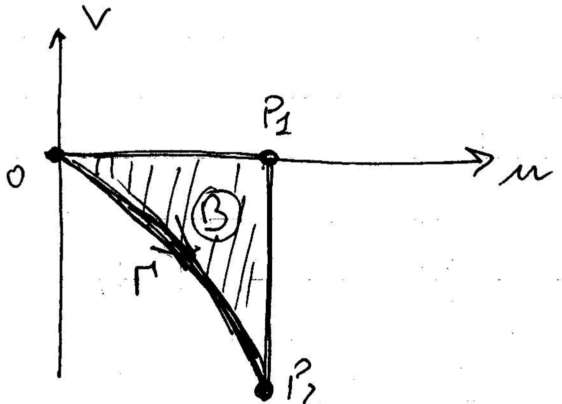
$$\int_{\Sigma} e^{x+y+z}\, d\Sigma$$

dove Σ è data $\Sigma: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u+v \end{cases}$ con $(u,v) \in B$



dove $\Gamma: \begin{cases} u = \ln(1-2t) \\ v = -\ln(1-2t)+t \end{cases}$

con $t \in [-1, 0]$

notare che per $t=-1$ $\begin{cases} u = \ln(1-2(-1)) = \ln 3 \\ v = -1 - \ln(1-2(-1)) = -(1+\ln 3) \end{cases}$

$P_2 \equiv (\ln 3, -(1+\ln 3))$

mentre per $t = 0$ $\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$ che è l'origine.

Quindi $P_1 \equiv (\ln 3, 0)$

Il dominio B in cui varia la coppia (u,v) è quindi $0 \le u \le \ln 3$ mentre per v dobbiamo scrivere il luogo parametrico Γ in funzione di u.

$u = \ln(1-2t) \longrightarrow 1-2t = e^{u}$ $\quad 2t = 1-e^{u}$

$t = \dfrac{1-e^{u}}{2}$ da cui $v = \dfrac{1-e^{u}}{2} - \ln\left(1-2\,\dfrac{1-e^{u}}{2}\right) =$

$= \dfrac{1-e^{u}}{2} - \ln e^{u} = \dfrac{1-2u-e^{u}}{2}$

da cui $\quad V = V(u) = \dfrac{1-2u-e^{u}}{2}$

Quindi $B = \left\{ (u,V) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le u \le \ln 3 \text{ e } \dfrac{1-2u-e^{u}}{2} \le V \le 0 \right\}$

Ora $d\Sigma = | \Sigma_u \times \Sigma_V | \, du\, dV$

$\Sigma_u = (1, 0, 1) \quad , \quad \Sigma_V = (0, 1, 1)$

$d\Sigma = \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right| du\, dV = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2}\, du\, dV$

$= \sqrt{3}\, du\, dV$

[N.B. $\Sigma_u \times \Sigma_V$ è un vettore costante quindi la superficie Σ è un piano]

$$\int_{\Sigma} e^{x+y+z}\, d\Sigma = \int_0^{\ln 3} du \int_{\frac{1-2u-e^{u}}{2}}^{0} e^{u+V+u+V} \sqrt{3}\, dV =$$

$$= \sqrt{3} \int_0^{\ln 3} du \left. \frac{e^{2(u+V)}}{2} \right|_{\frac{1-2u-e^{u}}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\ln 3} \left[e^{2u} - e^{2\left(u + \frac{1-2u-e^{u}}{2}\right)} \right] du =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\ln 3} \left[e^{2u} - e^{(1-e^{u})} \right] du = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} e^{2u} \Big|_0^{\ln 3} +$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}e\int_0^{\ln 3} e^{-e^u}\,du =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(e^{2\ln 3}-1\right)-\frac{\sqrt{3}\,e}{2}\int_0^{\ln 3} e^{-e^u}\,du =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 8-\frac{\sqrt{3}\,e}{2}\int_0^{\ln 3} e^{-e^u}\,du =$$

$$= \boxed{e\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}\,e}{2}\cdot\left\{\mathrm{ExpIntegralE}(\ln 3)-\mathrm{ExpIntegralE}(0)\right\}}$$

La funzione $\mathrm{ExpIntegralE}(x)=\int e^{-e^x}\,dx$.

....

COMUNQUE RIVEDENDO I CONTI MI SONO RESO CONTO CHE ABBIAMO e^{x+y-z} !!!

Quindi si semplificano i calcoli tremendamente: Infatti:

$$(*) = \int_\Sigma e^{x+y-z}\,d\Sigma = \dots = \sqrt{3}\int_0^{\ln 3} du \int_{\frac{1-2u+e^u}{2}}^{0} dv =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{\ln 3} du\,\frac{e^u+2u-1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^u+u^2-u\right)\Big|_0^{\ln 3} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\ln^2 3-\ln 3+2\right)}$$!!

SI TROVA

TUTTAVIA GUARDATE ANCHE L'ALTRA SOLUZIONE !!!

P.S. ESERCIZIO SVOLTO IN MACCHINA IN VIA BARBAGALLO A NAPOLI h: 15:10