ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

SECONDA PROVA SCRITTA - ESEMPIO

Tema di: FISICA

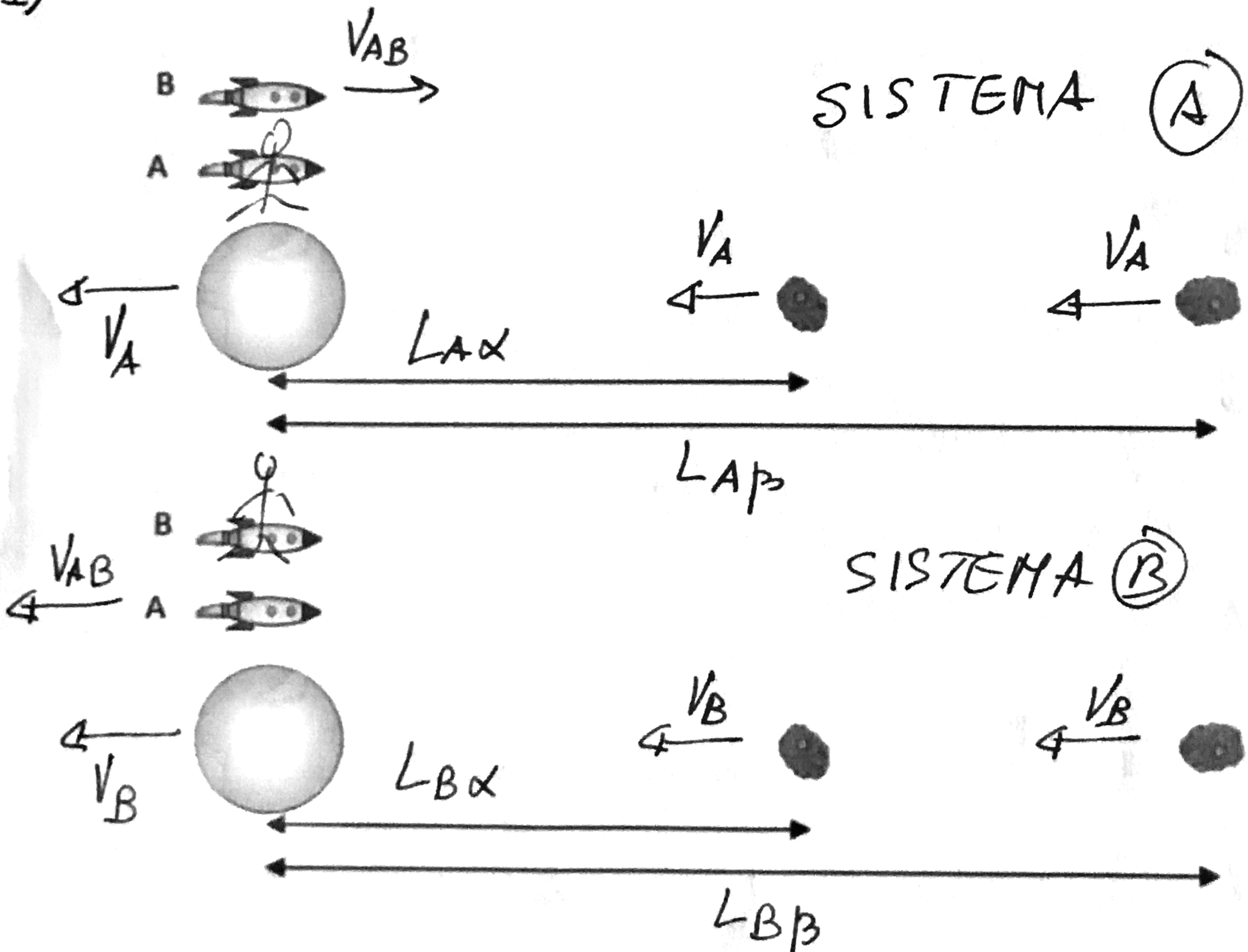
A cura di

Antonio e Arturo STABILE

"Soluzioni"

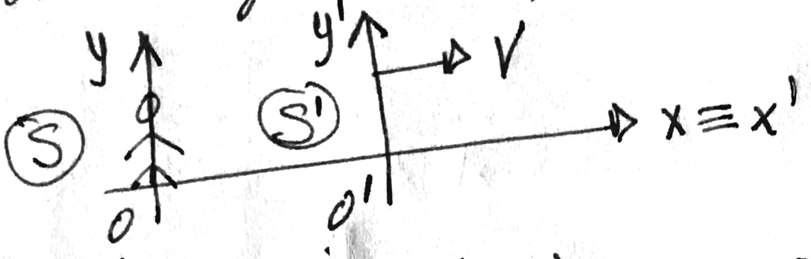
Problema 2

1)



RICHIAMO TRASFORMAZIONI LORENTZ (T.L.)

Siano S e S' due sistemi inerziali (S.I.) e sia V la velocità di S' rispetto a S (formalmente ci poniamo nel sistema solidale con S), le T.L. sono espresse dalle seguenti relazioni tra le coordinate:



$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma\left(x - Vt\right). \end{cases} \qquad (1)$$

Se abbiamo due eventi le relazioni tra gli intervalli sono dati da:

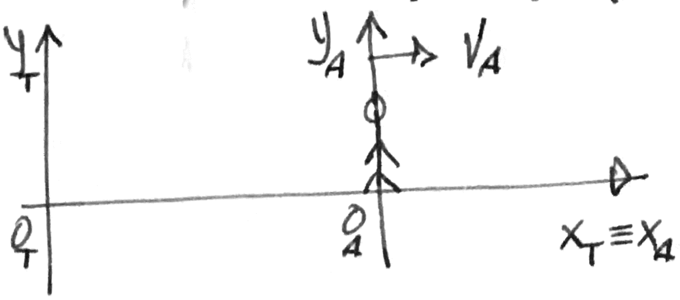
$$\begin{cases} \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right) \\ \Delta x' = \gamma\left(\Delta x - V\Delta t\right), \end{cases} \qquad (2)$$

$\Delta t'$ e $\Delta x'$ sono gli intervalli di tempo e spazio per l'osservatore S', mentre Δt e Δx sono quelli di S.

Nota: $\Delta t' = t'_2 - t'_1$; $\Delta x' = x'_2 - x'_1$

$\Delta t = t_2 - t_1$ $\quad \Delta x = x_2 - x_1$

Calcoliamo le distanze degli asteroidi nei sistemi A e B.



Poniamoci nel sistema A.

Il S.I. A è in moto rispetto alla Terra, quindi dalle relazioni (2):

$$\begin{cases} \Delta t_A = \gamma\left(\Delta t_T - \dfrac{V}{c^2}\Delta x_T\right) \\ \Delta x_A = \gamma\left(\Delta x_T - V\Delta t_T\right) \end{cases} \quad (3)$$

Dai dati sappiamo: $\Delta x_T = L_{OA}$; $V = V_A$; $\Delta t_A = 0$ (questo perché è l'osservatore A a fare la misura della distanza).

La grandezza da trovare è $\Delta x_A = L_{A\alpha}$.

Dalle relazioni (3):

$$0 = \gamma_A\left(\Delta t_T - \frac{V_A}{c^2}\Delta x_T\right) \Rightarrow$$

$$\Delta t_T = \frac{V_A}{c^2}\Delta x_T$$

Sostituendo nella seconda equazione:

$$\Delta x_A = \gamma_A\left[\Delta x_T - \frac{V_A^2}{c^2}\Delta x_T\right] = \gamma_A\left[1 - \frac{V_A^2}{c^2}\right]\Delta x_T$$

$$\Delta x_A = \cancel{\gamma_A} \cdot \frac{1}{\gamma_A^{\cancel{2}}}\Delta x_T$$

$$\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_A}{c}\right)^2}}$$

$$\Delta x_A = \frac{\Delta x_T}{\gamma}$$ [legge di contrazione delle lunghezze]

Quindi, nel sistema A gli asteroidi α e β sono visti alle seguenti distanze:

$$\begin{cases} L_{A\alpha} = \dfrac{L_{0\alpha}}{\gamma_A} \\ L_{A\beta} = \dfrac{L_{0\beta}}{\gamma_A}. \end{cases}$$

$L_{0\alpha}$ e $L_{0\beta}$ sono le distanze proprie degli asteroidi nel sistema Terra.

Analogamente, nel sistema B gli asteroidi α e β distano:

$$\begin{cases} L_{B\alpha} = \dfrac{L_{0\alpha}}{\gamma_B} \\ L_{B\beta} = \dfrac{L_{0\beta}}{\gamma_B}. \end{cases}$$

$$\gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1-(v_B/c)^2}}$$

Nei S.I. A e B gli asteroidi α e β distano meno rispetto al sistema della Terra.

$$L_{0\alpha} > L_{A\alpha} > L_{B\alpha}$$

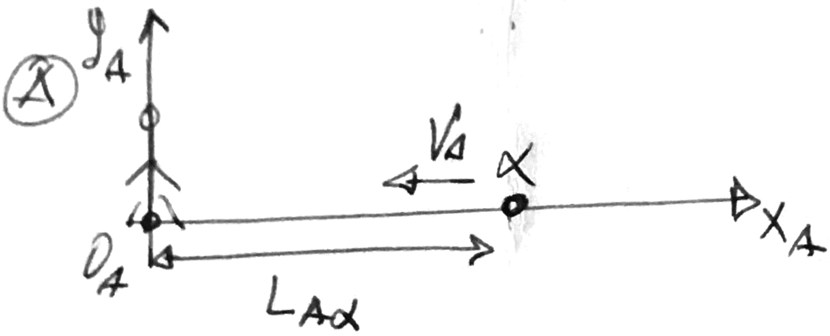
$$L_{0\beta} > L_{A\beta} > L_{B\beta}$$

Questo perché $v_B > v_A$ ($\gamma_B > \gamma_A$).

2) E' evidente che t'_A e t'_B sono i tempi propri che misurano rispettivamente A per giungere su α e B per giungere su β.
Indichiamo con T questo tempo:

$$\underline{t'_A = t'_B \equiv T}$$

Poniamoci nel sistema A.



L'asteroide α nel S.I. A si muove di moto rettilineo uniforme, cioè percorre il tratto $L_{A\alpha}$ in un tempo T, quindi

$$V_A = \frac{L_{A\alpha}}{T}.$$

Analogamente l'asteroide β nel S.I. B,

$$V_B = \frac{L_{B\beta}}{T}.$$

$$\begin{cases} V_A = \dfrac{L_{0\alpha}}{\gamma_A T} = \dfrac{L_{0\alpha}}{T}\sqrt{1-(V_A/c)^2} \\ V_B = \dfrac{L_{0\beta}}{\gamma_B T} = \dfrac{L_{0\beta}}{T}\sqrt{1-(V_B/c)^2} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered} V = \frac{L}{T}\sqrt{1-(V/c)^2} \Rightarrow V^2 = \left(\frac{L}{T}\right)^2\left[1-\left(\frac{V}{c}\right)^2\right] \\ \left[1+\left(\frac{L}{Tc}\right)^2\right]V^2 = \left(\frac{L}{T}\right)^2 \\ V = \frac{L/T}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{Tc}\right)^2}} \end{gathered}}$$

$$\begin{cases} V_A = \dfrac{L_{0\alpha}/T}{\sqrt{1+\left(\frac{L_{0\alpha}}{Tc}\right)^2}} \\ V_B = \dfrac{L_{0\beta}/T}{\sqrt{1+\left(\frac{L_{0\beta}}{Tc}\right)^2}} \end{cases}$$

$T = 4h\ 9min\ 54s =$
$= 3{,}299 \cdot 10^4 s$

$L_{0\alpha} = 4$ ore luce $= 4h \cdot c$

$L_{0\beta} = 7{,}5$ ore luce $= 7{,}5h \cdot c$

$$\frac{V_A}{c} = \frac{\dfrac{4 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 s}{3{,}299 \cdot 10^4 s}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{4 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 s}{3{,}299 \cdot 10^4 s}\right)^2}} = 0{,}4000$$

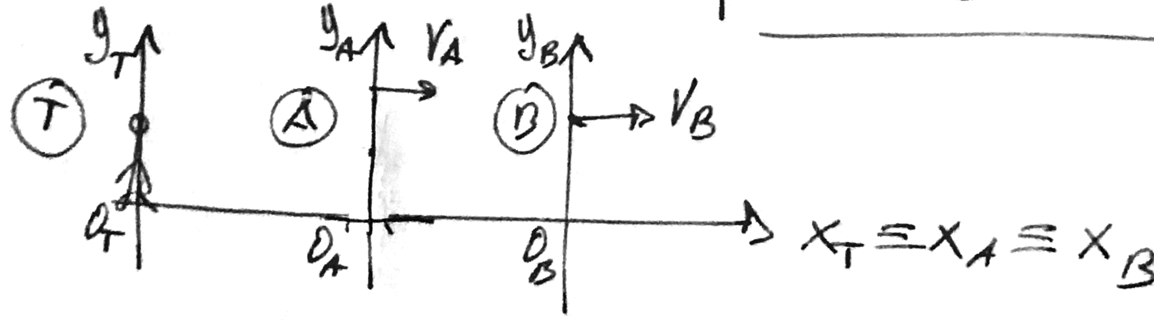
$$\frac{V_B}{c} = \frac{\dfrac{7,5\cdot 3,6\cdot 10^3\,s}{3,299\cdot 10^4\,s}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{7,5\cdot 3,6\cdot 10^3\,s}{3,299\cdot 10^4\,s}\right)^2}} = 0,6333$$

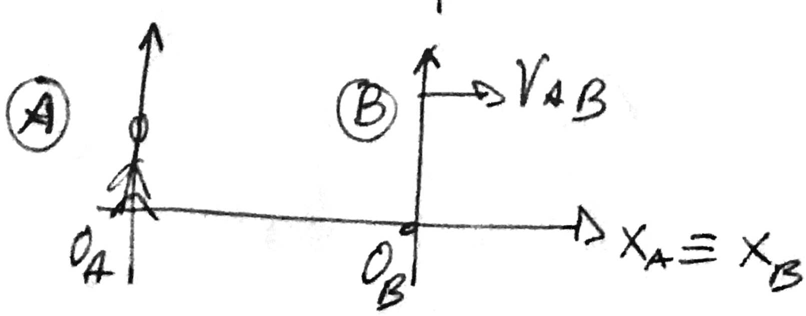
le velocità sono:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_A/c = 0,4000 \\ V_B/c = 0,6333 \end{array}}$$

Relativamente al sistema (1) la legge di trasformazione della velocità è:

Legge di composizione delle velocità	$v' = \dfrac{v - V}{1 - \dfrac{vV}{c^2}}$	$v' = \dfrac{\Delta x'}{\Delta t'}$ $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$





Nel sistema A

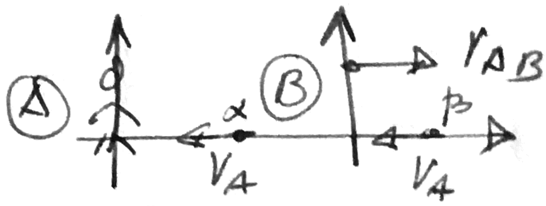
$$V_{AB} = \frac{V_B - V_A}{1 - \frac{V_B V_A}{c^2}}$$

$$\frac{V_{AB}}{c} = \frac{0,6333 - 0,4000}{1 - 0,6333 \cdot 0,4000} = 0,3125$$

$$\boxed{\frac{V_{AB}}{c} = 0,3125}$$

V_{AB} è la velocità di B rispetto a A.

3) Utilizzando il sistema (2)



$$\begin{cases} \Delta t_B^{B\beta} = \gamma_{AB}\left[\Delta t_A^{B\beta} - \frac{V_{AB}}{c^2}\Delta x_A^{B\beta}\right] \\ \Delta x_B^{B\beta} = \gamma_{AB}\left[\Delta x_A^{B\beta} - V_{AB}\,\Delta t_A^{B\beta}\right] \end{cases} \quad (4)$$

dove $\Delta t_B^{B\beta}$ e $\Delta x_B^{B\beta}$ sono il tempo e lo spazio misurati da B per raggiungere β; $\Delta x_A^{B\beta}$ e $\Delta t_A^{B\beta}$ sono il tempo e lo spazio misurati da A affinchè B raggiunga β. Dai dati del problema sappiamo

$$\Delta t_B^{B\beta} = T \quad e \quad \Delta x_B^{B\beta} = 0$$

T è tempo proprio per B

Dal sistema ④ ricaviamo:

$$0 = \gamma_{AB}\left[\Delta x_A^{B\beta} - V_{AB}\Delta t_A^{B\beta}\right] \Rightarrow$$

$$\Delta x_A^{B\beta} = V_{AB}\Delta t_A^{B\beta}$$

sostituendo nella prima relazione della ④

$$\Delta t_B^{B\beta} = \gamma_{AB}\left[\Delta t_A^{B\beta} - \frac{V_{AB}^2}{c^2}\Delta t_A^{B\beta}\right]$$

$$= \gamma_{AB}\left[1 - \frac{V_{AB}^2}{c^2}\right]\Delta t_A^{B\beta}$$

$$= \cancel{\gamma_{AB}} \cdot \frac{1}{\gamma_{AB}^{\cancel{2}}}\Delta t_A^{B\beta} \rightarrow$$

$$\underline{\Delta t_A^{B\beta} = \gamma_{AB}\Delta t_B^{B\beta}} \qquad \boxed{\Delta t_A^{B\beta} > \Delta t_B^{B\beta}}$$

$$\gamma_{AB} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V_{AB}}{c}\right)^2}} = 1{,}053$$

$\Delta t = \gamma\Delta T$, T tempo proprio.
LEGGE DILATAZIONE DEI TEMPI

$$\Delta t_A^{B\beta} = 1{,}053 \cdot 3{,}299 \cdot 10^4\,s = 3{,}474 \cdot 10^4\,s$$

$$= 9h\ 38min\ 58s$$

Quindi l'osservatore A arriva prima a α.
Infatti

tempo impiegato da A per raggiungere α

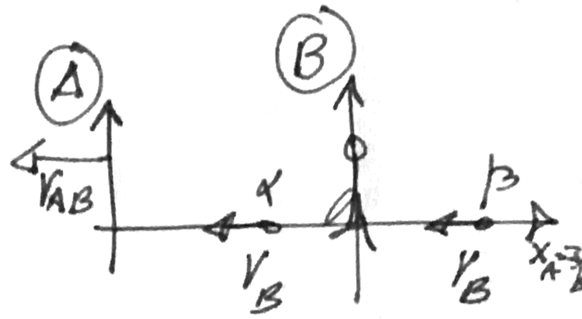
$$\Delta t_A^{A\alpha} = T = 9h\ 9min\ 54s$$

Tempo impiegato da B per raggiungere β

$$\Delta t_A^{B\beta} = 9h\ 38\ min\ 58s\ .$$

Nel sistema A, A arriva prima di B.

$$\Delta t_A^{B\beta} > \Delta t_A^{A\alpha}$$



4) Poniamoci nel sistema B.

Sia $\Delta t_B^{A\alpha}$ e $\Delta X_B^{A\alpha}$ il tempo e lo spazio misurati da B affinché A raggiunga α.

Sia $\Delta t_A^{A\alpha}$ $\Delta X_A^{A\alpha}$ il tempo e lo spazio misurati da A per raggiungere α.

Analogamente a quanto fatto prima, abbiamo:

$$\Delta t_B^{A\alpha} = \gamma_{AB}\Delta t_A^{A\alpha} \qquad \boxed{\Delta t_B^{A\alpha} > \Delta t_A^{A\alpha}}$$

Quindi è l'osservatore B ad arrivare prima sull'asteroide (β).

Anche in B

$$\Delta t_B^{A\alpha} = 9h\ 38\ min\ 58s.$$

$$\cancel{\Delta t_B^{A\alpha} > \Delta t_B^{B\beta}}$$

Nel sistema B, B arriva prima di A:

$$\Delta t_B^{A\alpha} > \Delta t_B^{B\beta}.$$

Riassumendo:

Nel S.I. A: $\Delta t_A^{A\alpha} - \Delta t_A^{B\beta} < 0$

L'ARRIVO di A su α precede l'arrivo di B su β.

Nel S.I. B: $\Delta t_B^{A\alpha} - \Delta t_B^{B\beta} > 0$

L'ARRIVO di B su β precede l'arrivo di A su α.

5) In generale, in relatività speciale è possibile l'inversione temporale. Tale condizione può verificarsi solo quando i due eventi considerati sono di tipo SPAZIO (ovvero eventi non collegabili da un principio di causa effetto, $v > c$).
Se gli eventi sono di tipo TEMPO (eventi collegabili da un principio di causa effetto, $v < c$) l'inversione temporale non è possibile.
È evidente che l'arrivo di A su α e l'arrivo di B su β sono eventi INDIPENDENTI, dunque di tipo Spazio. Per questa ragione l'ordine cronologico è invertito nel passaggio dal S.I. A al S.I. B.

DIMOSTRAZIONE PUNTO 5

Consideriamo la prima relazione della ②

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right).$$

Supponiamo $\Delta t > 0$, indichiamo con $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, allora

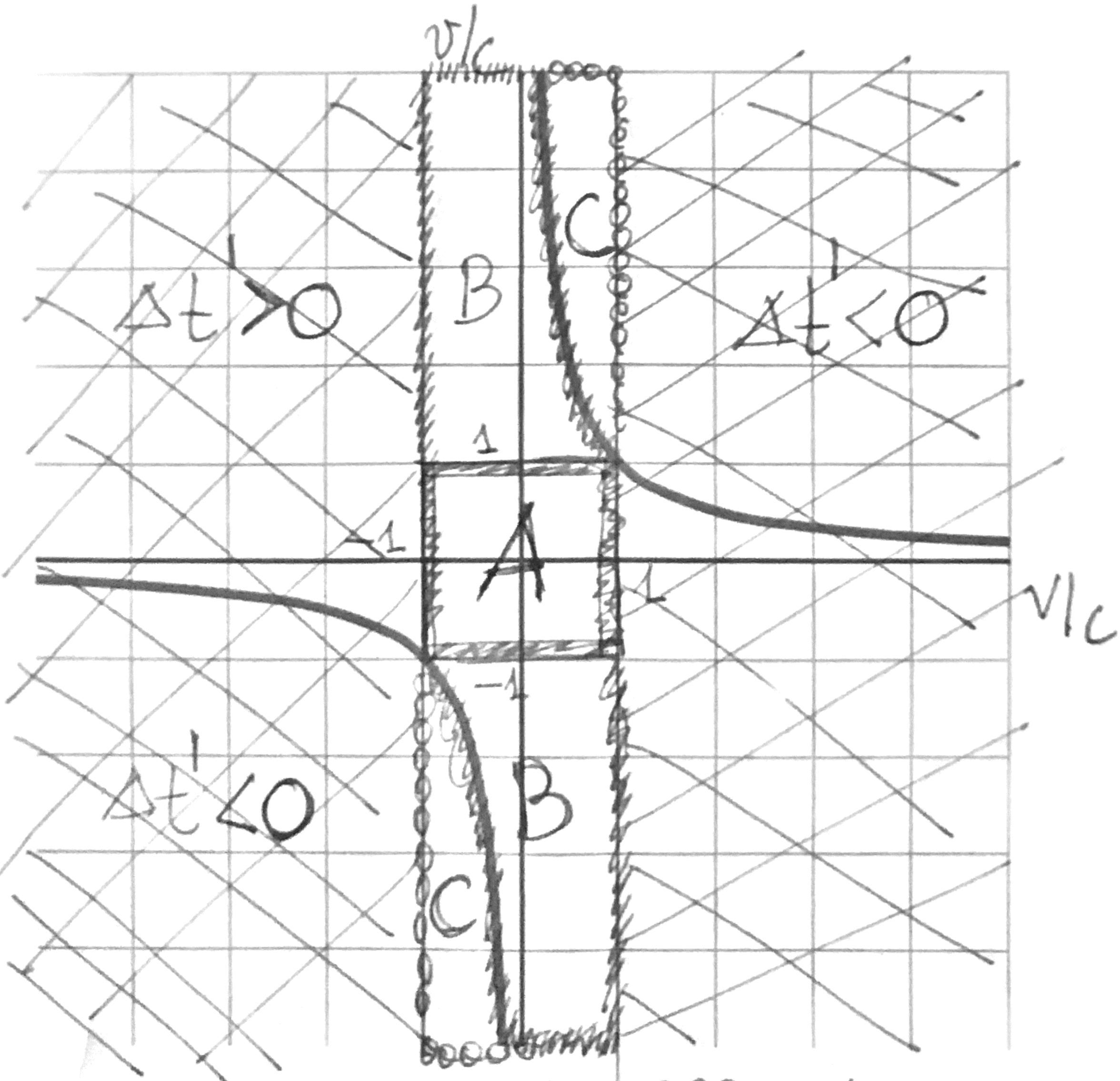
$$\Delta t' = \gamma \Delta t \left[1 - \frac{Vv}{c^2}\right].$$

Il segno di $\Delta t'$ dipende solo da $1 - \frac{Vv}{c^2}$.

Quindi:

$$1 - \frac{Vv}{c^2} > 0 \rightarrow$$

$$\boxed{v/c < \frac{1}{V/c}}$$



OSSERVATORI NON FISICI $V > c$

OSSERVATORI NON FISICI, $V > c$

<u>Regione A</u> $V<C$ (Osservatori fisici); $V<C$ ($\Delta S^2>0$); $\Delta t'>0$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta S^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2\\ \text{CAUSALITÀ}\end{array}}$$

Per osservatori fisici se gli eventi osservati sono di tipo <u>TEMPO</u> ($\Delta S^2>0$) $\Delta t'$ non può mai cambiare segno.

<u>Regione B</u> $V<C$; $v>c$ ($\Delta S^2<0$); $\Delta t'>0$.

Osservatori fisici che osservano eventi di tipo <u>SPAZIO</u> ($\Delta S^2<0$) $\Delta t'$ può non cambiare segno

<u>Regione C</u> $V<C$; $v>c$ ($\Delta S^2<0$); $\Delta t'<0$.

Osservatori fisici che osservano eventi di tipo <u>SPAZIO</u> ($\Delta S^2<0$) $\Delta t'$ può cambiare segno.