per $n = 2$

$$(a+b)^2 = \sum_{n=0}^{2} \binom{2}{n} a^{2-n} b^n$$

$$= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2$$

$$= 1\cdot a^2 + 2ab + 1\cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = \sum_{n=0}^{3} \binom{3}{n} a^{3-n} b^n$$

$$= \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3$$

$$= 1\cdot a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

e così via.... Dimostriamo la formula del binomio utilizzando il processo di induzione. per $n = 1$ è vero.

$$(a+b)^n \cdot a = \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \dots + \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} a b^n$$

$$(a+b)^n \cdot b = \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \dots + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

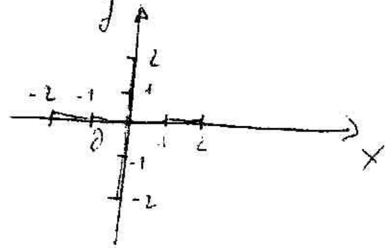
Sommando membro a membro si ottiene

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] a^n b + \dots + \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^{n+1-k} b^k +$$

$$\dots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

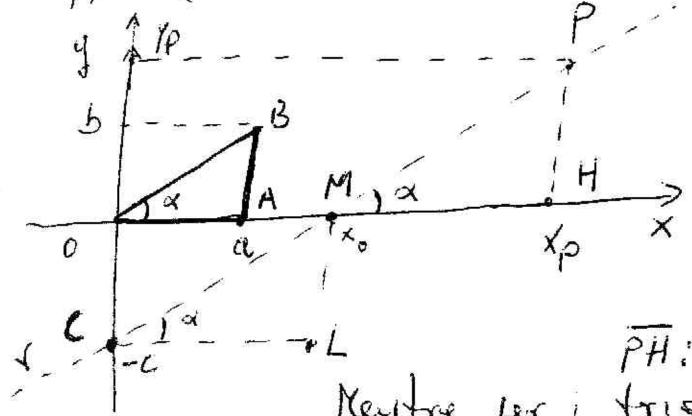
GEOMETRIA ANALITICA

Sia π un piano $\mathbb{R}^2$ ed un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico



RETTA

Analizziamo il luogo geometrico "retta" costituito dai punti $P \equiv (x,y) \in \mathbb{R}^2$ che godono di appartenere ad una retta. Ricaviamo le condizione matematica che devono soddisfare le coppie (x,y) affinchè appartengono alla retta "r".



$r \parallel \overline{OB}$

Dalla similitudine dei triangoli OBA e MHP

$$\overline{PH} : \overline{AB} = \overline{MH} : \overline{OA}$$

Mentre per i triangoli OBA e CML

$$\overline{CL} : \overline{OA} = \overline{ML} : \overline{AB}$$

da cui otteniamo

$$\overline{CL} = \frac{\overline{HL}}{\overline{AB}}\,\overline{OA} \qquad e \qquad \overline{PH} = \frac{\overline{HH}}{\overline{OA}}\cdot\overline{AB}$$

Sostituendo ai segmenti le grandezze algebriche:

$$x_0 = \frac{c}{b}\,a \qquad y_p = \frac{x_p - x_0}{a}\,b$$

da cui $a\,y_p = \left(x_p - \frac{c}{b}a\right)b$

$\Rightarrow \quad a\,y_p - b\,x_p + c\,a = 0 \quad (\circ)$

Quindi affinché $P \equiv (x_p, y_p)$ appartenga alla retta r che taglia l'asse y nel punto $(0,-c)$ con angolo α rispetto all'asse x (basta dare il rapporto b/a per individuare l'angolo), le coordinate x_p e y_p devono soddisfare l'equazione di primo grado $(\circ)$.
Poiché i valori di a, b, c sono del tutto arbitrari e al loro variare otteniamo infinite rette diverse possiamo scrivere:

$$a x + b y + c = 0 \qquad \text{EQUAZIONE RETTA}$$

quale equazione generica di una retta nel piano.
Volendo riscrivere in termini insiemistici, otteniamo che una retta è un luogo geometrico

$\infty \in \Pi$ tale che i punti sono tutti allineati. 22
La sua rappresentazione in un piano $\mathbb{R}^2$ è una linea rettilinea, ed il grafico corrispondente:

$$G_{rette} = \left\{ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall a, b, c \in \mathbb{R} : ax + by + c = 0 \right\}$$

CALCOLO EQUAZIONE RETTA passante per due punti dati di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) - Affinché i punti P_1 e P_2 appartengano alla retta deve essere soddisfatto il seguente sistema

$$\begin{cases} a x_1 + b y_1 + c = 0 \\ a x_2 + b y_2 + c = 0 \end{cases}$$

tale sistema non è risolvibile poiché abbiamo tre incognite (a, b, c) in due equazioni. Mentre dividendo per b (ipotizzando che $b \neq 0$) otteniamo

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b} \\ y_2 = -\frac{a}{b}x_2 - \frac{c}{b} \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = m x_1 + q \\ y_2 = m x_2 + q \end{cases}$$

Avendo definito $m \doteq -a/b$ e $q = -c/b$.
Ora il sistema è risolvibile rispetto alla coppia (m, q). Le soluzioni sono

$$\begin{cases} m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad \text{con } x_1 \neq x_2 \\[2ex] q = \dfrac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2} \end{cases}$$

Supponendo $x_1 \neq x_2$ escludiamo rette perpendicolari all'asse x ($q \to \infty$). Il tutto è coerente, infatti $q \to \infty$ vorrebbe dire che l'asse y e la retta sono parallele. Da notare ancora che $q \to \infty$ implica che $b \to 0$, poiché l'equazione della retta è priva del termine in y.

Inserendo le espressioni di m e q nella retta di equazione $y = mx + q$ abbiamo:

$$\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

m: coefficiente angolare

q: intercetta.

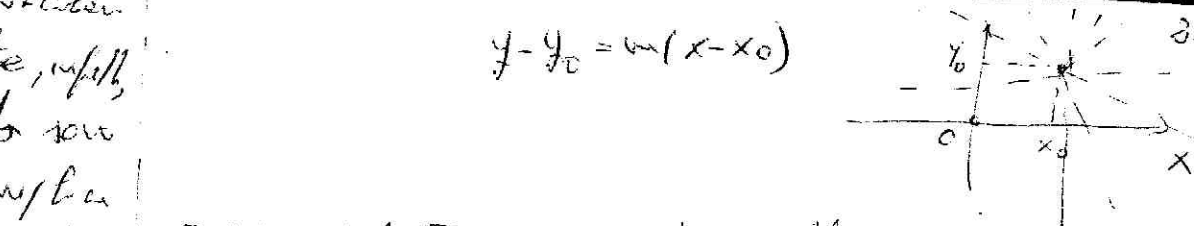
La loro interpretazione è semplice osservando il disegno di pagina 21: $m = -b/a$ e $q = -c$.

Nel caso si conosca un solo punto (x_0, y_0) si ottiene il cosiddetto fascio di rette passanti per (x_0, y_0). Imponendo la condizione di appartenenza

$$y_0 = m x_0 + q$$

$\Rightarrow q = y_0 - m x_0$ per cui l'equazione della retta diviene:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

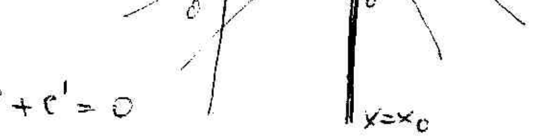


FASCIO DI RETTE: composto dalla sovrapposizione di due rette. In altre parole considerando due rette fondamentali r, r' il fascio è ottenuto considerando la combinazione $r + kr'$ con $k \in \mathbb{R}$.

Infatti la relazione $y - y_0 = m(x - x_0)$ è un fascio di rette passanti per (x_0, y_0) e coefficiente angolare generico m. Notiamo subito:

$$y - y_0 - m(x - x_0) = 0 \iff y - y_0 + k(x - x_0) = 0$$

da cui $x = x_0$ e $y = y_0$. Queste allora sono le rette perpendicolari all'asse x e all'asse y. Quindi possiamo dire che queste rette ci stanno costruendo il fascio.



In generale basta considerare due rette generiche

$ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$

ed ottenere

$$(a + ka')x + (b + kb')y + c + kc' = 0$$

da cui

$$A(k)x + B(k)y + C(k) = 0 \quad \begin{pmatrix}\text{FASCIO RETTE GENERICO}\end{pmatrix}$$

Da notare che se $A(u) = M\,B(u)$ con $M \in \mathbb{R}$ il fascio rappresenta un fascio di rette parallele di coefficiente angolare M ed intercetta generica.

Nel caso in cui $A(u)$, $B(u)$ sono generici basta riscrivere il fascio di rette generico come $r + u r'$ e si individuano le due rette generatrici del fascio.

INTERSEZIONE DI RETTE basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

e si individua la coppia (x_0, y_0) soluzione del sistema che rappresenta il punto in comune tra le due rette.

È ovvio che geometricamente le soluzioni del sistema può presentare tre tipologie:

nessuna soluzione (rette parallele)

una soluzione (rette incidenti)

infinite soluzioni (rette coincidenti).

POSIZIONE RECIPROCA TRA RETTE

Dallo studio del fascio si deduce che rette con coefficienti angolari uguali sono rette parallele. Quindi possiamo affermare che due rette sono parallele se

$$m = m' \iff \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \iff ab' - a'b = 0$$

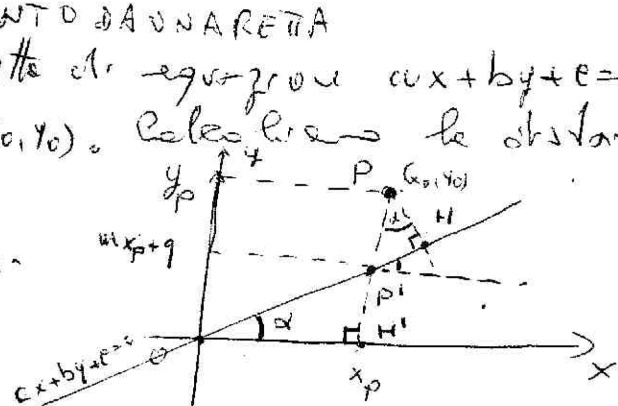
Due rette sono perpendicolari se i coefficienti angolari soddisfano la condizione

$$m = -\frac{1}{m'} \iff \frac{a}{b} = -\frac{b'}{a'} \iff aa' + bb' = 0$$

Tale relazione sarà dimostrata in seguito ( )

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

Supponiamo una retta di equazione $ax+by+c=0$ ed un punto (x_0, y_0). Calcoliamo la distanza $\overline{PH}$. Innanzitutto valutiamo la distanza $\overline{PP'}$



$$\overline{PP'} = |y_P - y_{P'}| = |y_P - m x_P - q| = \begin{cases} y_P - m x_P - q \\ -(y_P - m x_P - q) \end{cases}$$

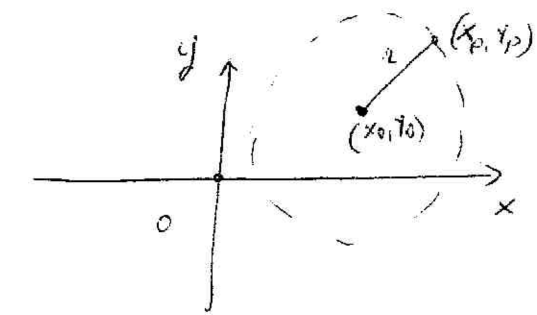
a seconda se P si trova "sopra" o "sotto" la retta $ax+by+c=0$

Per i triangoli $OP'H'$ e PHP' otteniamo:

$$\overline{PH} : \overline{OH'} = \overline{PP'} : \overline{OP'} \iff \overline{PH} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}}\,\overline{OH'}$$

$$\overline{PH} = \frac{|y_P - m x_P - q|}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot b = \frac{|a x_P + b y_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ (DISTANZA PUNTO RETTA)

CIRCONFERENZA $C = \{ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R} \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \}$



Quindi

$$(x_p-x_0)^2 + (y_p-y_0)^2 = r^2$$

$$x_p^2 + y_p^2 - 2x_0x_p - 2y_0y_p + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0 \quad (*)$$

Affinché (x_p,y_p) appartenga alla circonferenza di centro (x_0,y_0) e raggio r deve essere soddisfatta la relazione $(*)$.

Senza perdere di generalità possiamo porre

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{(EQUAZIONE CIRCONFERENZA)}$$

dove

$$\begin{cases} a = -2x_0 \\ b = -2y_0 \\ c = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = -a/2 \\ y_0 = -b/2 \\ r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} \end{cases}$$

Quindi i coefficienti a, b, c corrispondono geometricamente alle informazioni su centro e raggio circonferenza.

Inoltre affinché l'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ sia una circonferenza bisogna avere $a^2+b^2-c>0$. Possiamo riassumere, quindi, la circonferenza come quel luogo geometrico $\in \pi$ tale che i punti sono equidistanti da un punto fisso detto centro, ed il grafico corrispondente:

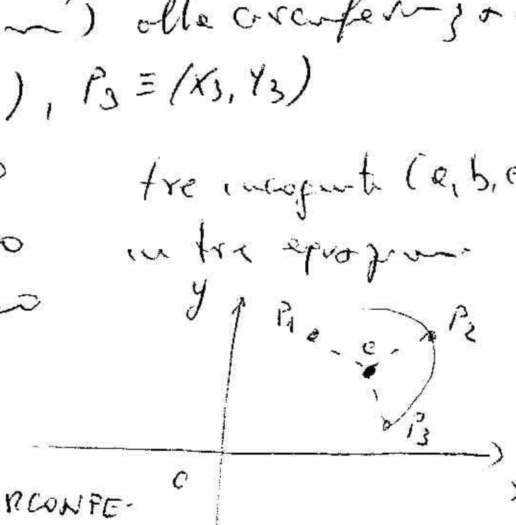
$$C_{circonf} = \{ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall a,b,c \in \mathbb{R} \ \ a^2+b^2-c>0 : x^2+y^2+ax+by+c=0 \}$$

In maniera analoga a quanto fatto per la retta l'equazione della circonferenza si ottiene imponendo la condizione di appartenenza di tre punti (condizione minima) alla circonferenza.

$P_1 \equiv (x_1,y_1)$, $P_2 \equiv (x_2,y_2)$, $P_3 \equiv (x_3,y_3)$

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c=0 \\ x_2^2+y_2^2+ax_2+by_2+c=0 \\ x_3^2+y_3^2+ax_3+by_3+c=0 \end{cases}$$

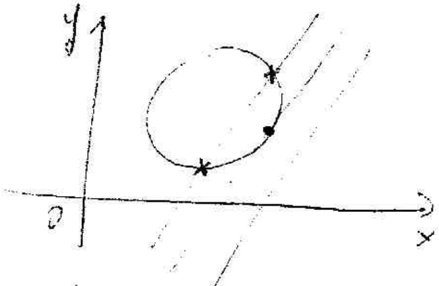
tre incognite (a,b,c) in tre equazioni



POSIZIONE RECIPROCA TRA CIRCONFERENZA E RETTA

Geometricamente sappiamo che la posizione di una retta rispetto ad una circonferenza può assumere tre tipologie: secante, tangente o esterna. Lo studio della posizione avviene risolvendo il sistema tra circonferenza e retta:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ y=mx+q \end{cases}$$



$$\Downarrow$$

$$(1+m^2)x^2+(2mq+a+bm)x+q^2+bq+c=0$$

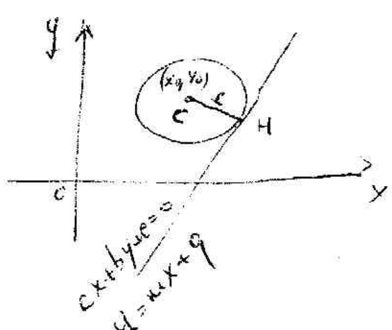
Questa equazione può ammettere due soluzioni ($\Delta>0$) per cui vi saranno due distinti punti d'intersezione, una soluzione ($\Delta=0$) per cui vi sarà una ascissa doppia per il punto di tangenza ed infine nessuna soluzione ($\Delta<0$) per cui la retta è esterna alla circonferenza.
È sufficiente, quindi, valutare Δ:

$$\Delta=\left[(2q+b)m+a\right]^2-4(1+m^2)\left[(q+b)q+c\right]\gtreqless 0$$

Da notare che in questa relazione abbiamo soltanto i parametri a,b,c ed m,q che identificano in maniera completa i nostri luoghi geometrici.
Molto utile per il calcolo delle rette tangenti è notare che la distanza dal centro della circonferenza dalla retta deve essere pari al raggio.
Quindi:

$$\overline{CH}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

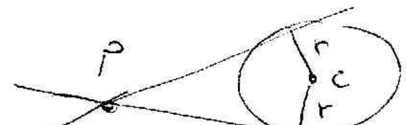
$$\overline{CH}=\frac{|y_0-mx_0-q|}{\sqrt{1+m^2}}$$



ma $\overline{CH}$ come raggio è pari a $1/2\sqrt{a^2+b^2-4c}$ per cui otteniamo:

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{\left|-\frac{b}{2}+m\frac{a}{2}-q\right|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Equazione che determina i due possibili valori di m quando il punto da cui sono condotte le tangenti è esterno alla circonferenza



FASCIO DI CIRCONFERENZE come per le rette è possibile anche per le circonferenze ottenere un fascio a partire da due circonferenze di base. Infatti:

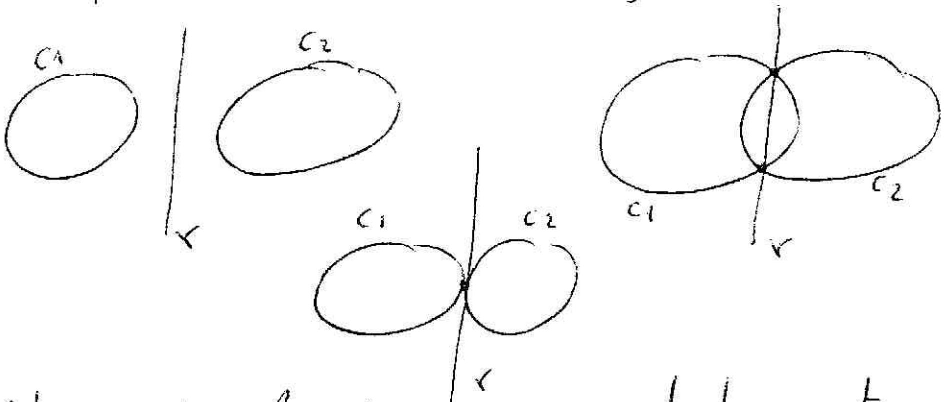
$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad e \quad x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$$

$$(1+k)[x^2+y^2]+(a+ka')x+(b+kb')y+c+kc'=0$$

ponendo $k=-1$ si ottiene

$$(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0 \quad \text{(ASSE RADICALE)}$$

che è l'equazione della retta del fascio (luogo geometrico dei punti che hanno la stessa potenza rispetto a tutte le circonferenze del fascio).



L'asse radicale può essere secante, tangente o esterno a tutte le circonferenze del fascio.

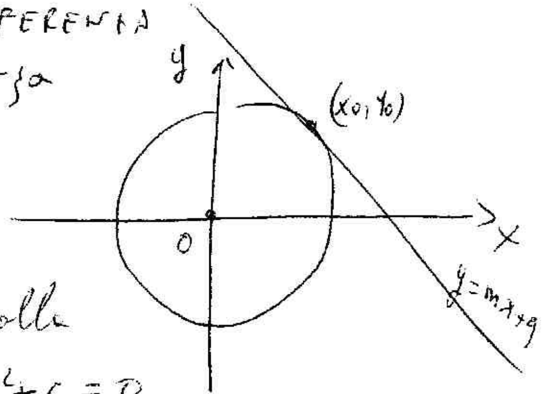
L'equazione del fascio di circonferenze può anche essere determinata da una circonferenza e dall'asse radicale (o in generale da una retta).

Quindi in generale otteniamo

$$x^2+y^2+A(k)x+B(k)y+C(k)=0 \quad \text{(FASCIO CIRCONFERENZA)}$$

RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA

Supponiamo una circonferenza del tipo $x^2+y^2+c=0$ (centro nell'origine).



Sia (x_0,y_0) appartenente alla circonferenza: $x_0^2+y_0^2+c=0$

La retta tangente è del tipo $y-y_0=m(x-x_0)$.

Quindi

$$\begin{cases} x^2+y^2+c=0 \\ y-y_0=m(x-x_0) \end{cases} \Rightarrow \Delta=0$$

si ottiene $-(c+x_0^2)m^2+2x_0y_0m-y_0^2-c^2=0$

$$\Rightarrow y_0^2m^2+2x_0y_0m+x_0^2=0$$

$$(y_0m+x_0)^2=0 \Rightarrow m=-x_0/y_0$$

La retta è dunque:

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0) \Rightarrow yy_0-y_0^2=-xx_0+x_0^2$$

$$x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2 \Rightarrow \boxed{x_0x+y_0y+c=0}$$

Riepilogando abbiamo costruito una retta tangente alla circonferenza $x^2+y^2+c=0$ nel $(x_0,y_0)\in$ Circonf.

$$x^2+y^2+c=0 \qquad x_0x+y_0y+c=0$$

oppure

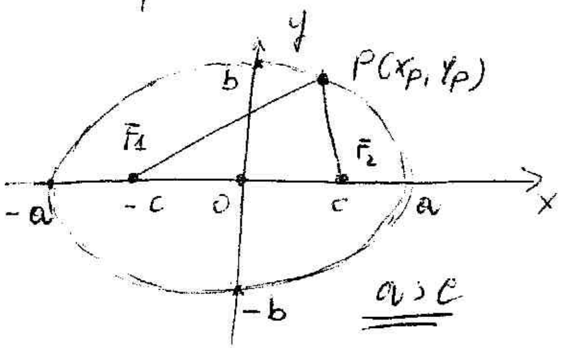
$$x^2+y^2=r^2 \qquad x_0x+y_0y-r^2=0$$

Questa struttura sarà presente anche per altri luoghi geometrici.

ELLISSE è il luogo geometrico dei punti $P \equiv (x,y) \in \mathbb{R}^2$ per i quali è costante la somma delle loro distanze da due punti fissi F_1 e F_2 dello stesso piano, detti fuochi.

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = cost.$

poniamo $cost = 2a$
con $a \in \mathbb{R}_+$



$a > c$

$$\sqrt{(x_p+c)^2+y_p^2} + \sqrt{(x_p-c)^2+y_p^2} = 2a$$

$$(x_p+c)^2+y_p^2 = (x_p-c)^2+y_p^2+4a^2-4a\sqrt{(x_p-c)^2+y_p^2}$$

$$\cancel{x_p^2}+2cx_p+\cancel{c^2}+\cancel{y_p^2} = \cancel{x_p^2}-2cx_p+\cancel{c^2}+\cancel{y_p^2}+4a^2-4a\sqrt{(x_p-c)^2+y_p^2}$$

$$4cx_p-4a^2 = -4a\sqrt{(x_p-c)^2+y_p^2}$$

$$(cx_p-a^2)^2 = a^2[(x_p-c)^2+y_p^2]$$

$$c^2x_p^2+a^4-\cancel{2ca^2}x_p = a^2x_p^2+c^2a^2-\cancel{2ca^2}x_p+a^2y_p^2$$

$$(c^2-a^2)x_p^2-a^2y_p^2 = c^2a^2-a^4$$

$$(a^2-c^2)x_p^2+a^2y_p^2 = a^2(a^2-c^2)$$

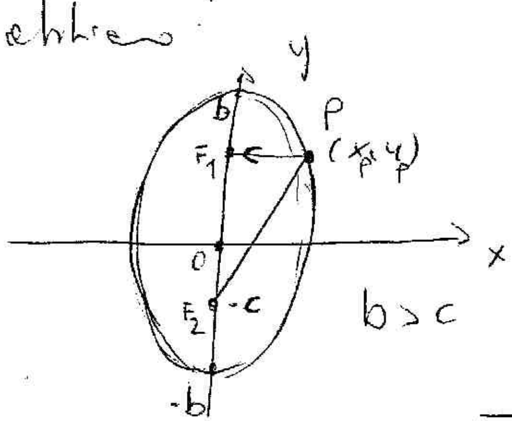
$$\frac{x_p^2}{a^2}+\frac{y_p^2}{a^2-c^2} = 1 \quad ; \quad b \doteq \sqrt{a^2-c^2} < a$$

otteniamo $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ (EQUAZIONE ELLISSE)

Per l'ellisse si introduce il concetto di eccentricità

$$e \doteq \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

quindi $0 \le e < 1$. $e = 0$ per la circonferenza.
L'equazione ricavata è per un'ellisse centrata nell'origine e "schiacciata" lungo l'asse y. Nel caso in cui $b > a$ avremmo uno schiacciamento lungo l'asse x. Infatti in questo caso otteniamo



$b > c$

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$

$\sqrt{x_p^2+(y_p+c)^2}+\sqrt{x_p^2+(y_p-c)^2} = 2b$

con passaggi simili al caso precedente si ottiene: $\frac{x_p^2}{b^2-c^2}+\frac{y_p^2}{b^2} = 1$

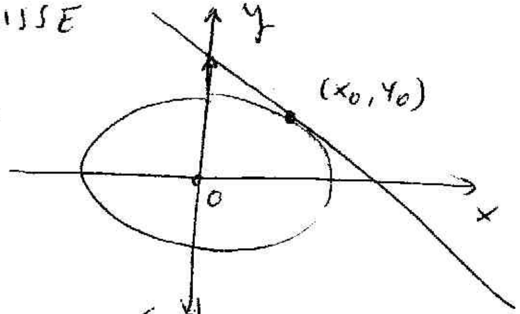
Introducendo $c \doteq \sqrt{b^2-a^2}$ otteniamo

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ma con $b > a$.

Da notare che nel caso in cui $a = b$ otteniamo l'equazione della circonferenza di raggio b: $x^2+y^2 = b^2$

RETTA TANGENTE ALL'ELLISSE

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = m(x-x_0) + y_0 \end{cases}$$



$$\Downarrow$$

$$\Delta = 0 \implies m = -\frac{x_0 y_0}{a^2 - x_0^2}$$

avendo sfruttato la condizione $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$ ne otteniamo ancora

$$m = -\frac{x_0 y_0}{a^2 - \left(a^2 - \frac{y_0^2}{b^2}a^2\right)} = -\frac{x_0 y_0}{y_0^2 \, a^2/b^2}$$

$$m = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$$. la retta tangente diviene

$$y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}x + \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0^2}{y_0} + y_0$$

$$a^2 y_0 y + b^2 x_0 x - a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2 = 0$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{a^2y_0^2 + b^2x_0^2}{a^2b^2} = 0$$

infine

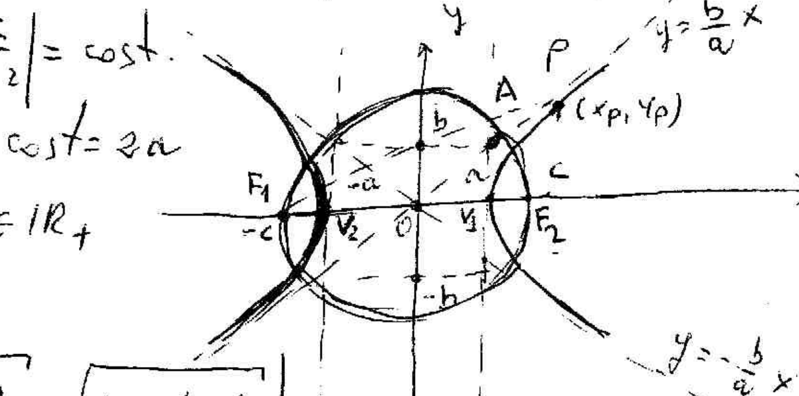
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$$

Formalmente otteniamo formule analoghe a quanto trovato per la circonferenza.

IPERBOLE è il luogo geometrico dei punti $P \equiv (x, y) \in \mathbb{R}^2$ per i quali è costante la differenza delle loro distanze da due punti F_1 e F_2 dello stesso piano, detti fuochi:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = \text{cost.}$$

poniamo cost $= 2a$ con $a \in \mathbb{R}_+$



$$\left|\sqrt{(x_P+c)^2 + y_P^2} - \sqrt{(x_P-c)^2 + y_P^2}\right| = 2a$$

ripetendo calcoli analoghi all'ellisse otteniamo:

$$\frac{x_P^2}{a^2} - \frac{y_P^2}{c^2 - a^2} = 1 \quad ; \quad b \doteq \sqrt{c^2 - a^2} < c$$

(EQUAZIONE IPERBOLE) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$ (Forma esplicita)

nel caso in cui $x \to +\infty$ $\quad y = \pm\frac{b}{a}x$ (ASINTOTI IPERBOLE

$A \equiv (a, b)$ punto appartenente alla circonferenza, all'iperbole e al vertice del rettangolo.

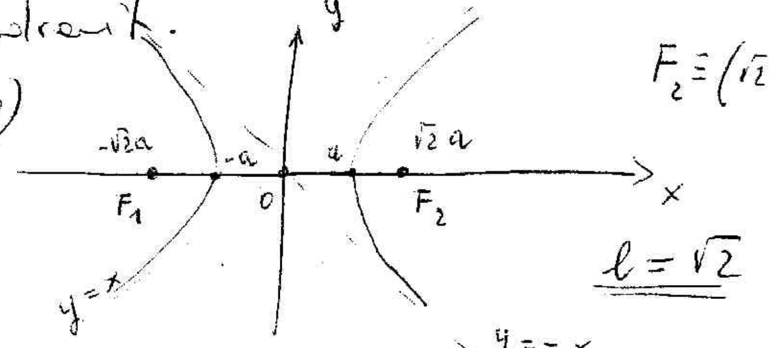
L'equazione della circonferenza è $x^2+y^2=a^2+b^2$ dato che $a+b=c$; la circonferenza passa anche per il fuoco. L'eccentricità $e \doteq \frac{c}{a} \doteq \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} > 1$.

Nel caso in cui $a=b$ si ottiene l'<u>IPERBOLE EQUILATERA</u>

$$x^2-y^2=a^2$$

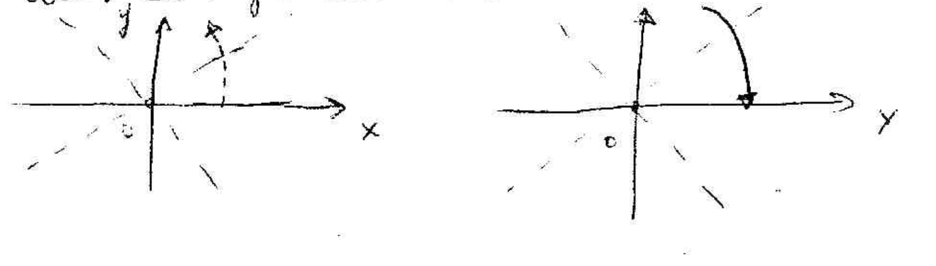
con $c=\sqrt{2}\,a$ e gli asintoti sono le bisettrici dei quadranti.

$F_1 \equiv (-\sqrt{2}\,a, 0)$ $\quad$ $F_2 \equiv (\sqrt{2}\,a, 0)$



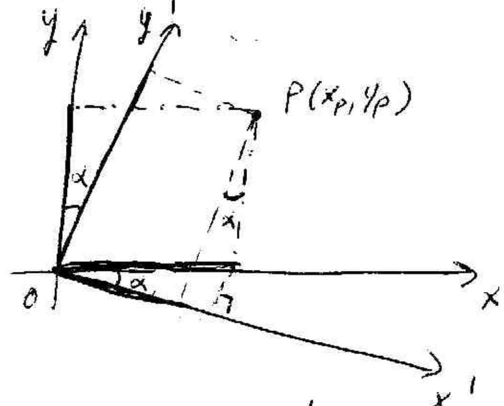
$e=\sqrt{2}$

ROTAZIONE DEGLI ASSI per riscrivere l'equazione dell'iperbole in maniera più semplice, in modo che sovrapponga gli asintoti dell'iperbole con gli assi coordinati x, y. Un discorso analogo può essere anche quello di riscrivere l'equazione dell'iperbole riferita agli assi corrispondenti con gli asintoti.



In entrambi i casi la rotazione è di $\pi/4$ una volta in senso antiorario, nell'altro nel senso orario.

In generale si ha



$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

che in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nel caso in questione abbiamo $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

In forma matriciale l'equazione di iperbole è esprimibile

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff (x \; y) \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & -b^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad R(\theta): \text{matrice della rotazione}$$

Invertendo l'ordine $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(-\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$(x \; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T = \left[R(-\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right]^T = (x' \; y') \, R(-\theta)^T$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies (x' \; y') \, R(-\theta)^T \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & -b^{-2} \end{pmatrix} R(\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

Sviluppando i prodotti righe per colonne tra le matrici otteniamo:

$$R(-\theta)^T \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & -b^{-2}\end{pmatrix} R(-\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{-2}&0\\0&-b^{-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} a^{-2}-(a^{-2}+b^{-2})\sin^2\theta & \frac{a^{-2}+b^{-2}}{2}\sin 2\theta \\ \frac{a^{-2}+b^{-2}}{2}\sin 2\theta & -b^{-2}+(a^{-2}+b^{-2})\sin^2\theta\end{pmatrix} =$$

che per $\theta = \pi/4$ diviene

$$= \begin{pmatrix} \frac{a^{-2}-b^{-2}}{2} & \frac{a^{-2}+b^{-2}}{2} \\ \frac{a^{-2}+b^{-2}}{2} & \frac{a^{-2}-b^{-2}}{2}\end{pmatrix}.$$

$$(x' \ y') \begin{pmatrix} \frac{a^{-2}-b^{-2}}{2} & \frac{a^{-2}+b^{-2}}{2} \\ \frac{a^{-2}+b^{-2}}{2} & \frac{a^{-2}-b^{-2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix} = 1$$

Nel caso dell'iperbole equilatera $a = b$

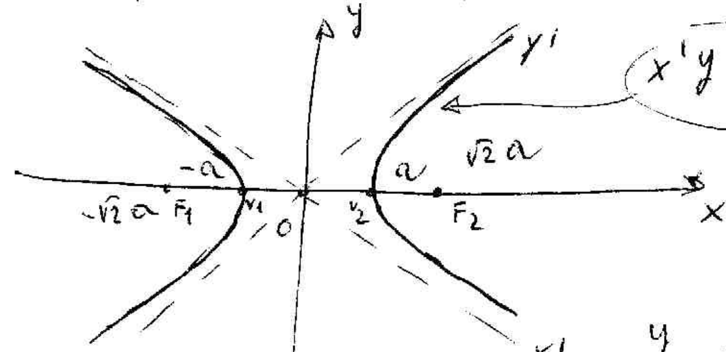
$$(x' \ y') \begin{pmatrix} 0 & a^{-2} \\ a^{-2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix} = 1$$

$$(x' \ y') \begin{pmatrix} a^{-2} y' \\ a^{-2} x'\end{pmatrix} = 1 \implies a^{-2}x'y' + a^{-2}y'x' = 1$$

ed infine $x'y' = a^2/2$. Data la generalità degli assi coordinati possiamo riscrivere ed ottenere

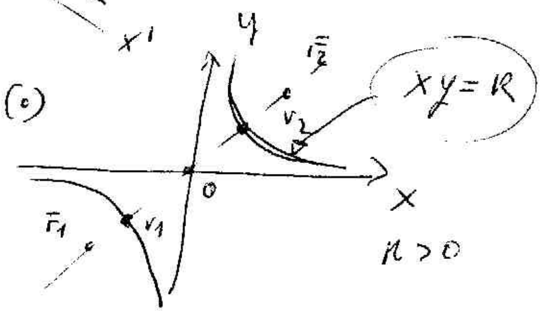
$$(\circ) \qquad xy = a^2/2 \qquad \left(\begin{array}{c}\text{IPERBOLE} \\ \text{EQUILATERA} \\ \text{RISPETTO AGLI} \\ \text{ASSI COORDINATI}\end{array}\right)$$

Confrontando le due espressioni, che algebricamente sono diverse ma rappresentano lo stesso luogo geometrico, otteniamo



Altrimenti nel caso di $(\circ)$

$xy = k$ con $k \in \mathbb{R}$



$k = a^2/2 \implies a = \sqrt{2k}$

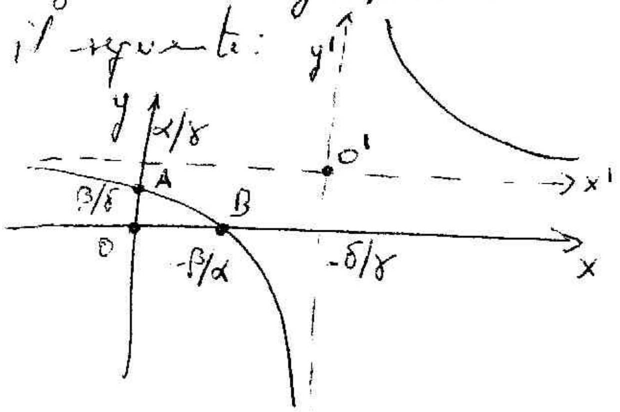
$V_2 \equiv (\sqrt{2k}, \sqrt{2k}) \qquad V_1 \equiv (-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$

$F_2 \equiv (2\sqrt{k}, 2\sqrt{k}) \qquad F_1 \equiv (-2\sqrt{k}, -2\sqrt{k})$

Altra espressione che rappresenta ancora un'iperbole è la cosiddetta <u>funzione omografica</u>

$y = \frac{\alpha x + \beta}{\ }$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

Il grafico della funzione omografica è qualitativamente il seguente:



ASINTOTO ORIZZONTALE

$$y = \alpha/\gamma$$

ASINTOTO VERTICALE

$$x = -\delta/\gamma$$

INTERSEZIONE ASSE y

$$A \equiv (0, \beta/\delta)$$

INTERSEZIONE ASSE x

$$B \equiv (-\delta/\gamma, 0)$$

Vogliamo riscrivere l'equazione $y = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ rispetto agli assi $x'y'$ di origine $O' \equiv (-\delta/\gamma, \alpha/\gamma)$

Il cambio di coordinate è il seguente:

$$\begin{cases} x = x' - \delta/\gamma \\ y = y' + \alpha/\gamma \end{cases} \qquad y' + \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha\left(x' - \delta/\gamma\right) + \beta}{\gamma\left(x' - \delta/\gamma\right) + \delta}$$

$$y' + \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha x' - \frac{\alpha\delta}{\gamma} + \beta}{\gamma x' \cancel{- \delta} \cancel{+ \delta}}$$

$$y' + \cancel{\frac{\alpha}{\gamma}} = \cancel{\frac{\alpha}{\gamma}} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 x'}$$

$$y'x' = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} \iff y'x' = k$$

abbiamo ottenuto la stessa espressione algebrica del caso precedente. Le forme algebriche cambiano ma il luogo geometrico è lo stesso.

Concludiamo lo studio dell'iperbole calcolando i punti d'intersezione tra iperbole e circonferenza $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\cancel{1} + \frac{y^2}{b^2}\right)a^2 + y^2 = \cancel{a^2} + b^2$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) y^2 = b^2 \iff y_A = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2 + a^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} + a^2$$

$x_A = \pm a \sqrt{\dfrac{a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}}$. Quindi i punti d'intersezione sono

$$\left(\pm a \sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

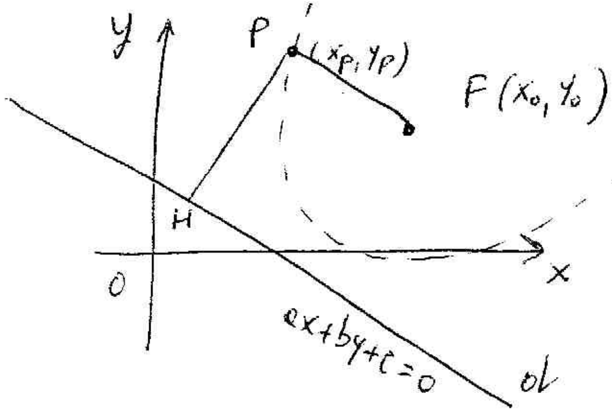
e se $a = b$

$$\left(\pm a\sqrt{3/2}, \pm a/2\right)$$

PARABOLA è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto F (detto fuoco) e da una retta data d (detta direttrice).

$\overline{PF}=\overline{PH}$

$$\sqrt{(x_p-x_0)^2+(y_p-y_0)^2} = \frac{|a x_p+b y_p+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



dopo qualche passaggio algebrico si ottiene l'equazione generale di parabola:

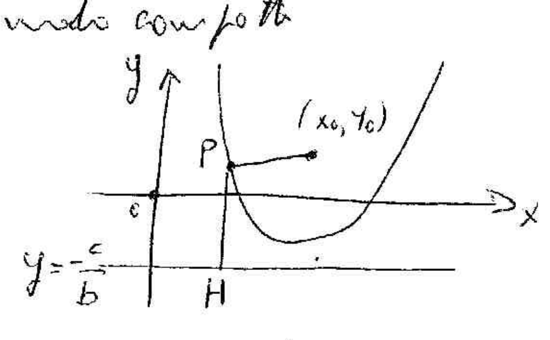
$$b^2x_p^2+a^2y_p^2-2abx_py_p-2[ac+x_0(a^2+b^2)]x_p +$$
$$-2[bc+y_0(a^2+b^2)]y_p+(a^2+b^2)(x_0^2+y_0^2)-c^2=0$$

se $a=0$ (direttrice parallela all'asse x) si ottiene una forma più familiare

$$y_p=\frac{1}{2(c/b+y_0)}x_p^2-\frac{x_0x_p}{c/b+y_0}+\frac{x_0^2+y_0^2-c^2/b^2}{2(c/b+y_0)}$$

che è esprimibile in modo compatto

$$y_p=\alpha x_p^2+\beta x_p+\gamma$$

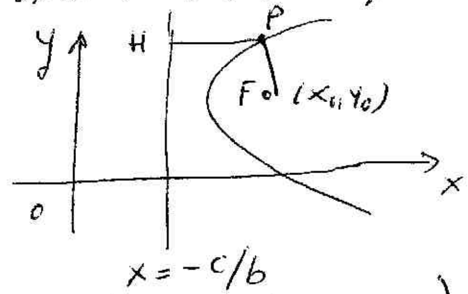


se $b=0$ (direttrice parallela all'asse y) si ottiene:

$$x_p=\frac{1}{2(\frac{c}{a}+x_0)}y_p^2-\frac{y_0y_p}{c/a+x_0}+\frac{x_0^2+y_0^2-c^2/a^2}{2(c/a+x_0)}$$

che anch'esso è esprimibile in modo compatto.

$$x_p=\alpha y_p^2+\beta y_p+\gamma$$

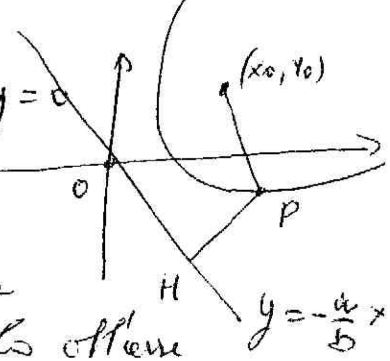


se $c=0$ (direttrice passante per l'origine) si ottiene

$$x_p^2+\frac{a^2}{b^2}y_p^2-2\frac{a}{b}x_py_p-2x_0\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x_p +$$
$$-2y_0(1+a^2/b^2)y_p+(1+a^2/b^2)(x_0^2+y_0^2)=0$$

che in forma compatta diviene

$$\alpha x_p^2+\beta y_p^2+\gamma x_py_p+\delta x_p+\varepsilon y_p+\gamma=0$$



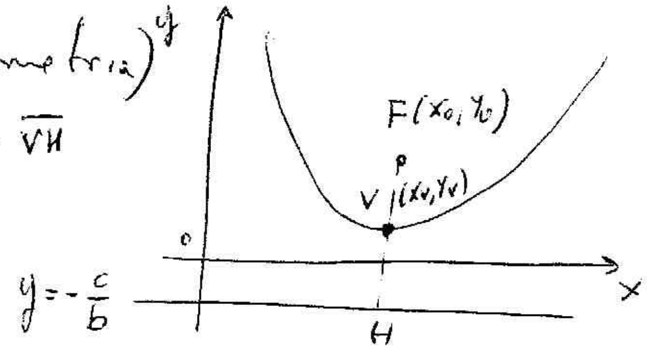
Analizziamo il caso di parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y la cui equazione è pertanto $y_p=\alpha x_p^2+\beta x_p+\gamma$.

$x_V = x_0$ (per simmetria)

y_V è tale che $\overline{FV} = \overline{VH}$

$y_0 - y_V = y_V + c/b$

$$y_V = \frac{y_0 - c/b}{2}$$



Coordinate del vertice sono $V \equiv \left(x_0, \frac{y_0 - c/b}{2}\right)$

I punti di intersezione con l'asse x sono

$$y_P = 0 \qquad x_{P\,1,2} = \frac{\frac{x_0}{c/b+y_0} \pm \sqrt{\frac{c/b - y_0}{c/b + y_0}}}{\frac{1}{c/b+y_0}} = x_0 \pm \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - y_0^2}$$

quindi x_1 e x_2 sono simmetrici rispetto a x_0.
Quindi x_0 è la semisomma delle radici

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad x_0 = -\beta/2\alpha$$

Calcoliamo l'ordinata del vertice in termini di α, β, γ

$$y_V = \alpha\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = \dots = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = -\frac{\Delta}{4\alpha}$$

Quindi

$$V \equiv \left(x_0, \frac{y_0 - c/b}{2}\right) = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$$

Finora abbiamo ricavato le coordinate del vertice della parabola $\left(x_0, \frac{y_0 - c/b}{2}\right)$ in termini di α, β, γ. Lo stesso bisogna fare per le coordinate del fuoco e per l'equazione della direttrice.
Basta risolvere il sistema rispetto a $x_0, y_0, c/b$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2(c/b + y_0)} \\ \beta = -\dfrac{x_0}{c/b + y_0} \\ \gamma = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 - c^2/b^2}{2(c/b + y_0)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\beta/2\alpha \\ y_0 = \dfrac{1 - \Delta}{4\alpha} \\ c/b = \dfrac{1 + \Delta}{4\alpha} \end{cases}$$

Riepilogando abbiamo:

$$y = \alpha x^2 + \beta x + c \qquad V \equiv \left(-\beta/2\alpha;\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$$

$$F \equiv \left(-\beta/2\alpha;\ \frac{1-\Delta}{4\alpha}\right)$$

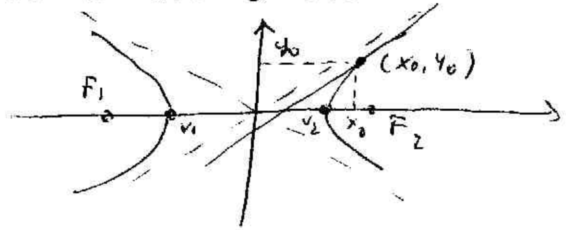
$$y = -\frac{1+\Delta}{4\alpha}$$

che sono le note formule della parabola.

PARENTESI IPERBOLE: RETTA TANGENTE ALL'IPERBOLE

$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$



$$\Delta = 0 \Rightarrow m = -\frac{x_0 y_0}{a^2 - x_0^2}$$

avendo sfruttato la condizione $bx_0^2 - a y_0^2 - a^2 b = 0$ abbiamo ancora:

$$m = -\frac{x_0 y_0}{a^2 - \left(a^2 + \frac{y_0^2 a^2}{b^2}\right)} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$$

la retta tangente diviene:

$$y = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}x - \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}x_0 + y_0$$

$$a^2 y_0 y - b^2 x_0 x + b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = 0$$

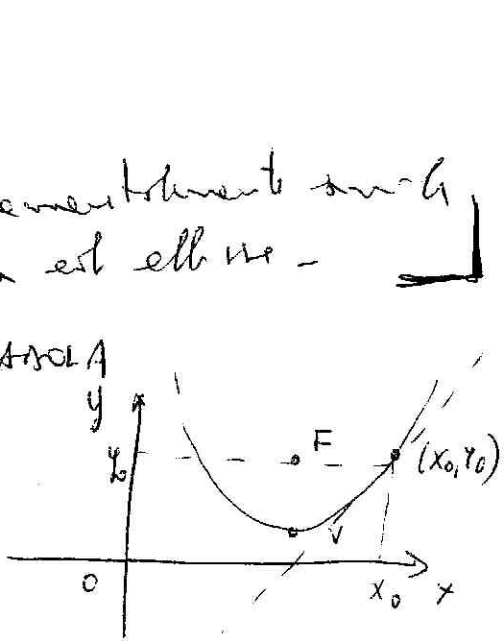
$$a^2 y_0 y - b^2 x_0 x + a^2 b^2 = 0$$

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} - 1 = 0$$

Espressione ottenuta formalmente analoga a quella per circonferenza ed ellisse.

RETTA TANGENTE ALLA PARABOLA

$$\begin{cases} y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$$



$$\Downarrow$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m = 2\alpha x_0 + \beta$$

avendo sfruttato la condizione $y_0 - \alpha x_0^2 - \beta x_0 - \gamma = 0$

quindi la retta tangente diviene:

$$y = (2\alpha x_0 + \beta)(x - x_0) + y_0$$

$$y = (2\alpha x_0 + \beta)x - 2\alpha x_0^2 - \beta x_0 + y_0$$

$$y = (2\alpha x_0 + \beta)x - \alpha x_0^2 + \gamma$$

FASCIO DI PARABOLE è ottenuto come sovrapposizione di due parabole: $y = ax^2 + bx + c$ e $y = a'x^2 + b'x + c'$

$$(\lambda + \mu)y = (\lambda a + \mu a')x^2 + (\lambda b + \mu b')x + (\lambda c + \mu c')$$

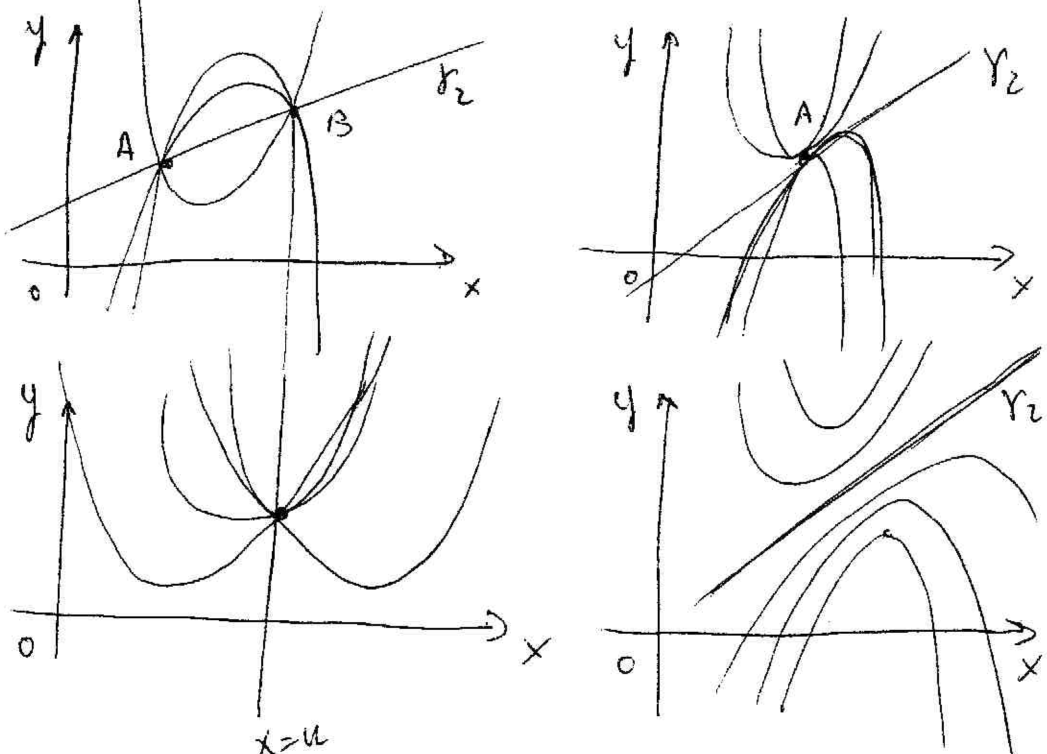
quindi

$$y = \frac{\lambda a + \mu a'}{\lambda + \mu}x^2 + \frac{\lambda b + \mu b'}{\lambda + \mu}x + \frac{\lambda c + \mu c'}{\lambda + \mu}$$

facendo $\lambda = -\mu a'/a$ si ottiene l'unica retta appartenente al fascio

$$y = \left[\frac{ab' - a'b}{a - a'}\right]x + \left[\frac{ac' - a'c}{a - a'}\right]$$

Un fascio di parabole può essere ottenuto anche da una parabola γ_1 e da una retta γ_2. A seconda che la retta γ_2 sia secante, tangente o esterna alla parabola γ_1, si avrà un fascio di parabole passanti tutte per due punti distinti, o per un singolo punto di tangenza oppure tutte disgiunte (cioè nessuna coppia di parabole ha un punto in comune).



Se la retta γ_2 ha per equazione $x=k$ (punto è parallela all'asse della parabola) l'equazione del fascio è

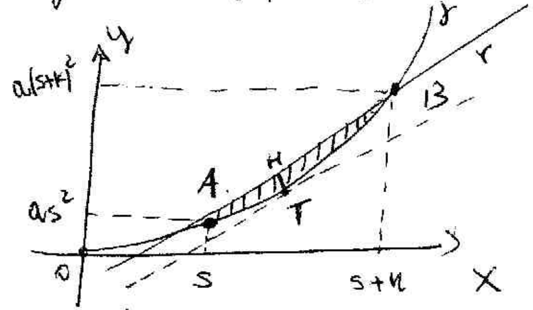
$$y = ax^2 + (b-t)x + (c+tk)$$

Tutte le parabole del fascio hanno lo stesso parametro $1/2a$, cioè hanno la stessa apertura, sono sovrapponibili per traslazione ed hanno in comune il punto (k, ak^2+bk+c).
Quindi la famiglia di parabole più generale può essere scritta come segue:

$$y = A(k)x^2 + B(k)x + C$$

SEGMENTO PARABOLICO (FORMULA DI ARCHIMEDE)

Calcoliamo l'area compresa tra una parabola ed una retta secante. Per semplicità poniamo $y = ax^2$ (poi generalizzeremo).



γ: $y = ax^2$

$$r: \quad \frac{y - a(s+k)^2}{as^2 - a(s+k)^2} = \frac{x-(s+k)}{s-(s+k)}$$

la retta diventa: $y = a(2s+k)x - as(s+k)$

L'area è

$$A = \int_s^{s+k} dx \left\{ a(2s+k)x - as(s+k) - ax^2 \right\} =$$

$$= a\left[\frac{2s+k}{2}x^2 - s(s+k)x - \frac{x^3}{3}\right]_s^{s+k} = a \cdot \frac{1}{6}k^3$$

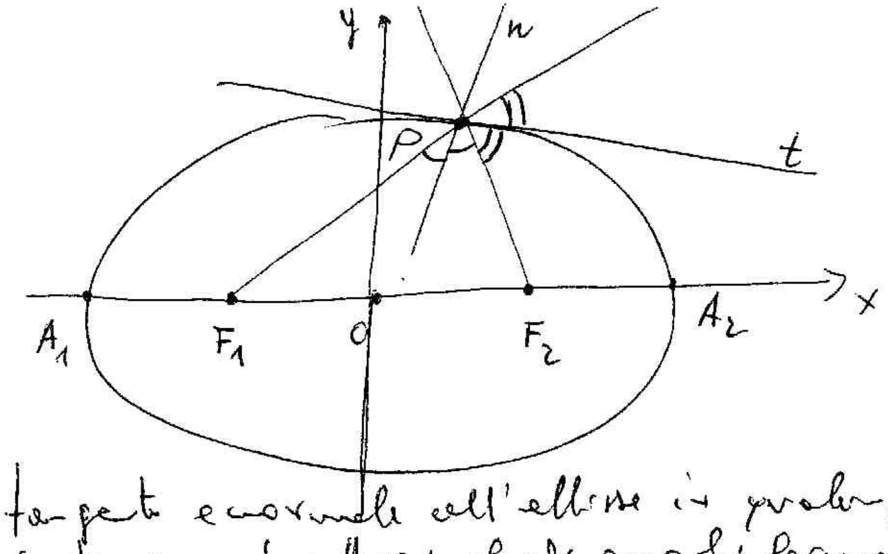
L'area è funzione solo di a (apertura della parabola) e di k (distanza tra le ascisse dei due punti d'intersezione)
Se avessimo avuto la parabola $y = ax^2+bx+c$ grazie ad un cambio di coordinate (traslazione)

$$\begin{cases} x = X - b/2a \\ y = Y - \dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$$ avremmo avuto $Y = aX^2$

ma le due parabole avendo lo stesso parametro di apertura di conseguenza non varia l'area del segmento parabolico a patto di mantenere costante la proiezione delle corde sull'asse x. Dopo qualche calcolo si ottiene:

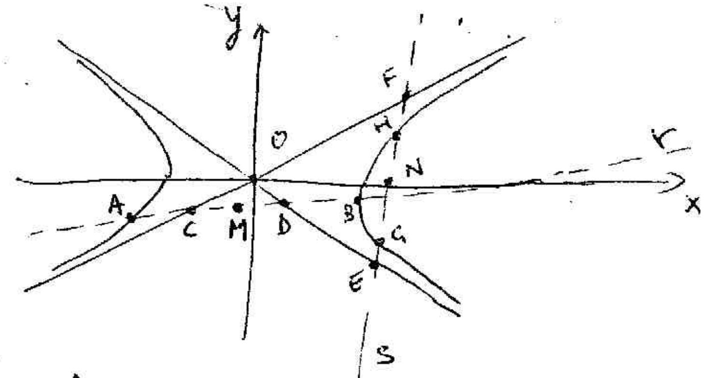
$$\mathcal{A} = \frac{1}{6} a k^3 = \frac{2}{3}\overline{AB}\cdot\overline{TH}$$

TANGENTI E NORMALI AD ELLISSE/IPERBOLE



tangente e normale all'ellisse in qualunque punto sono bisettrici degli angoli formati dalle rette passanti per un fuoco ed il punto di tangenza.

In un'iperbole il punto medio del segmento staccato dagli asintoti su di una retta secante è anche punto medio della relativa corda.



$\overline{AC} = \overline{BD}$

$\overline{FH} = \overline{GE}$

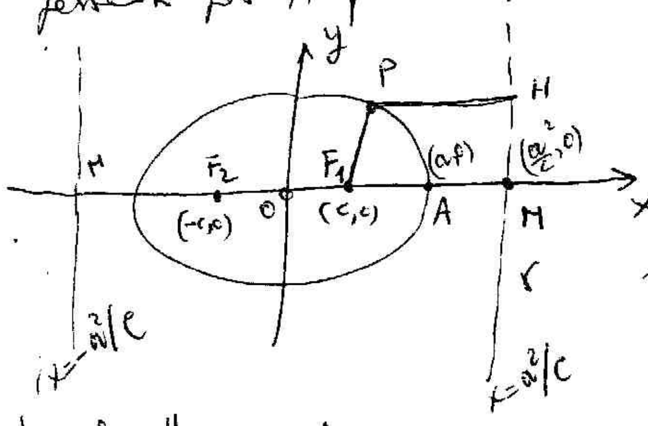
M: punto medio di $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

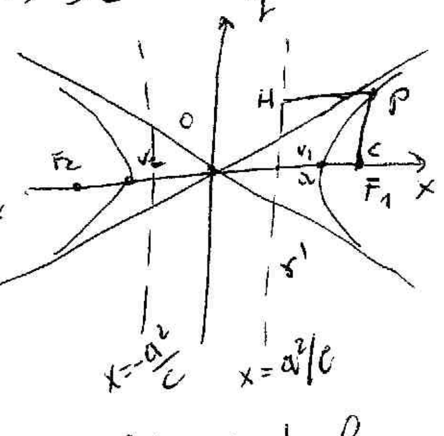
N: punto medio di $\overline{FE}$ e $\overline{GH}$.

Nel caso in cui la retta s è tangente all'iperbole allora il punto di tangenza è anche punto medio del segmento staccato dall'asintoto sulla retta tangente.

DIRETTRICI DELL'ELLISSE ED IPERBOLE

La direttrice dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$) relativa al fuoco $F(c,0)$ è la retta r (r') perpendicolare all'asse dei fuochi passante per il punto $M\equiv(a^2/c,0)$.





La direttrice di equazione $x=a^2/c$ è tale che per i punti dell'ellisse (dell'iperbole) è costante il rapporto delle distanze che uno dei fuochi F e della relativa direttrice r (r'):

$$\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PH}} = \frac{c}{a} = e < 1 \quad \left(\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PH}} = \frac{c}{a} = e > 1\right)$$

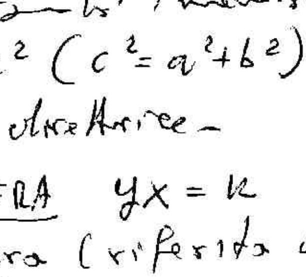
per cui si ottiene:

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{x - a^2/c^2} = \frac{c}{a}$$

ed elevando al quadrato entrambi i membri e tenendo conto che $a^2=b^2+c^2$ ($c^2=a^2+b^2$) si ottiene l'equazione della direttrice.

TANGENTE ALL'IPERBOLE EQUILATERA $yx = k$

la tangente all'iperbole equilatera (riferita agli asintoti) incontra gli assi cartesiani nei punti $A \equiv (2x_0, 0)$ e $B \equiv (0, 2y_0)$

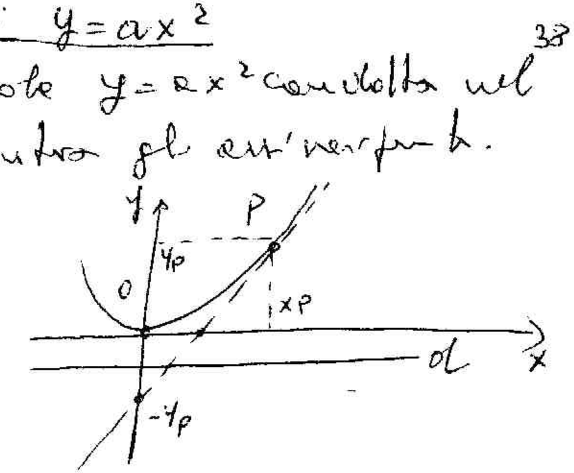


dove (x_0, y_0) è il punto di tangenza. L'equazione della retta tangente diviene:

$$\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1$$

TANGENTE ALLA PARABOLA $y = ax^2$

La tangente alla parabola $y = ax^2$ condotta nel suo punto (x_P, y_P) incontra gli assi nei punti $(x_P/2, 0)$ e $(0, -y_P)$ e l'equazione della retta tangente diviene



$$\frac{x}{x_P/2} + \frac{y}{-y_P} = 1$$

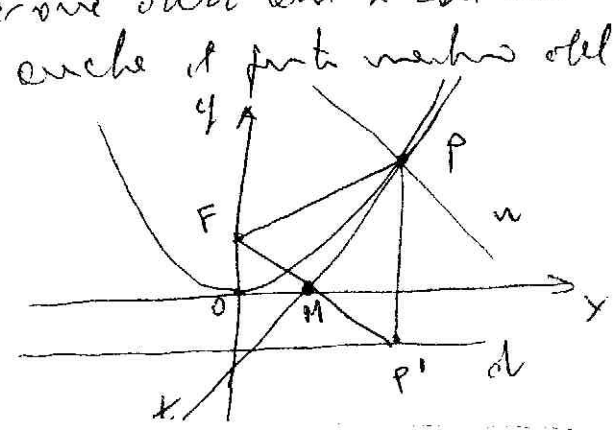
Infatti la tangente è data da $y - y_P = 2a x_P (x - x_P)$

$$y = 2a x_P x - a x_P^2 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -a x_P^2 = -y_P \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = x_P/2 \end{cases}$$

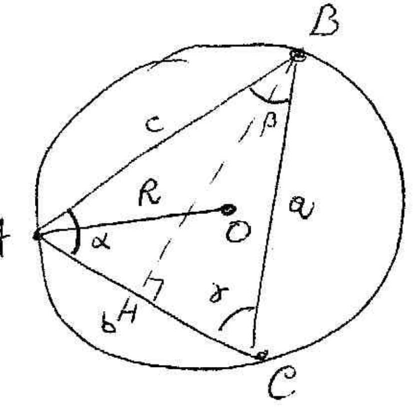
Questa proprietà richiama un'analogia con le proprietà dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti.

La tangente t e la normale n alla parabola $y = ax^2$ in un suo punto P sono le bisettrici degli angoli formati dalla retta PF e dalla retta PP' (dove P' è proiezione di P sulla direttrice d).

Il punto M, intersezione dell'asse x con la tangente in P, è anche il punto medio del segmento $\overline{P'F}$.



Sia ora un generico triangolo inscritto in una circonferenza di raggio R



TEOREMA DEI SENI

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

TEOREMA DELLE PROIEZIONI

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$
$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

TEOREMA DEL COSENO (O DI CARNOT)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

ALTRE RELAZIONI

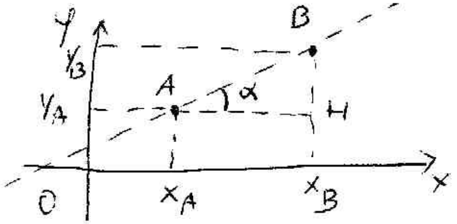
S (superficie triangolo) $= \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BH} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ (FORMULA DI ERONE)

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Γ PARENTESI PROPRIETÀ RETTA in $\mathbb{R}^2$

Come è stato introdotto in precedenza per lo studio della retta il coefficiente angolare della retta passante per due punti $A \equiv (x_A, y_A)$, $B \equiv (x_B, y_B)$ è stato che



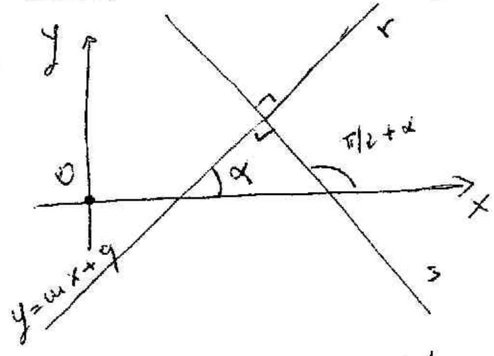
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

che corrisponde nel triangolo ABH alla tangente dell'angolo α;

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = tg\,\alpha$$

che chiarisce la motivazione dell'appellativo angolare per m.

È possibile, in maniera semplice, dimostrare la condizione di ortogonalità tra due rette. Infatti data una retta $y = mx + q$ notiamo:



$r: y = mx + q$

$s: y = m'x + q'$

$$m' = tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -cotg\,\alpha = -\frac{1}{tg\,\alpha} = -\frac{1}{m}$$

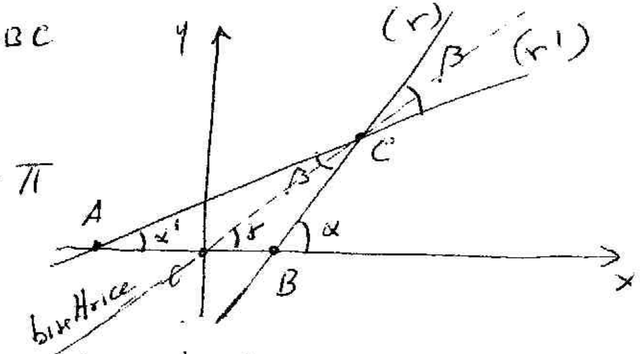
e quindi la condizione $m m' = -1$

Calcoliamo ora l'angolo tra due rette date in termini dei coefficienti angolari:

$(r')\ y = m'x + q'$ e $y = mx + q\ (r)$

Nel triangolo ABC si ha

$$\alpha' + (\pi - \alpha) + \beta = \pi$$



$$\beta = \alpha - \alpha'$$

$$tg\,\beta = tg\,(\alpha - \alpha') = \frac{tg\alpha - tg\alpha'}{1 + tg\alpha\, tg\alpha'}$$

che in termini di coefficienti angolari

$$tg\,\beta = \frac{m - m'}{1 + m m'}$$

Calcoliamo il coefficiente angolare della retta bisettrice. Sia γ l'angolo che la bisettrice forma con l'asse x.

Nel triangolo OCB si ha

$$\gamma + (\pi - \alpha) + \frac{\beta}{2} = \pi$$

$$\gamma + \cancel{\pi} - \alpha + \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \cancel{\pi} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$$

$$tg\,\gamma = tg\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad m_\gamma = tg\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right).$$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$\forall x \in \mathbb{R}$ si introducono due funzioni della variabile reale x dette funzioni iperboliche

$$\cosh x \doteq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x \doteq \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

dette rispettivamente coseno iperbolico di x e seno iperbolico di x. Come nel caso della trigonometria si introduce la funzione rapporto tra seno iperbolico e coseno iperbolico detta tangente iperbolica,

$$tgh\, x \doteq \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

La proprietà fondamentale delle funzioni iperboliche è

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(è quanto succede per la trigonometria ma vi è il − mentre la differenza di quadrati ricorda l'equazione dell'iperbole)

Si verificano facilmente le proprietà:

$$\sinh(-x) = -\sinh x \quad (\text{funzione dispari})$$
$$\cosh(-x) = \cosh x \quad (\text{funzione pari})$$
$$tgh(-x) = tgh\, x \quad (\text{funzione dispari})$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

Gli andamenti delle funzioni iperboliche sono