ESAME DI STATO ISTRUZIONE II^a SUPERIORE

SIMULAZIONE II^a PROVA – AS 2018/2019

INDIRIZZO LI02 – SCIENTIFICO

LI03 – = OP. SCIENZE APP.

LI15 – = SEZ. SPORTIVO

$\boxed{\text{MATEMATICA/FISICA}}$

"SOLUZIONI"

ARTURO/ANTONIO STABILE

arturo.stabile@gmail.com

stabile.antonio@gmail.com

www.arturostabile.com

PROBLEMA 1

"1"

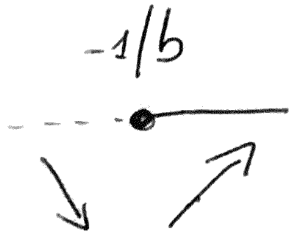
Sia $q(t) = a t\, e^{bt}$ con $a>0$.

$$q'(t) = a e^{bt} + a t\, b e^{bt} = a e^{bt}(1+bt)$$

$$q'(t) \geq 0 \Rightarrow \boxed{1+bt \geq 0}$$

$\boxed{b>0}$

$$t \geq -\frac{1}{b}$$

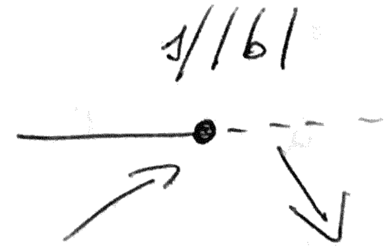


$$\boxed{t = -\frac{1}{|b|} \ (\text{MIN})}$$

$\boxed{b<0} \rightarrow b = -|b|$ (ovvio!!!)

$$1 - |b|t \geq 0$$

$$t \leq 1/|b|$$



$$t = \frac{1}{|b|} \ (\text{MAX})$$

Determinare a e b tale che il punto $(2, 8e^{-1})$ sia un massimo.

$$t_{max} = \frac{1}{|b|} = -\frac{1}{b} \quad (\text{ricordiamo che } b<0)$$

$$y_{max} = y(t_{max}) = a\left(\frac{-1}{b}\right) e^{\cancel{b}\frac{-1}{\cancel{b}}} = -\frac{a}{b} e^{-1}$$

$$\begin{cases} t_{max} = -\frac{1}{b} = 2 \\ y_{max} = -\frac{a}{b}\cancel{e^{-1}} = 8\cancel{e^{-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1/2 \\ a = 4 \end{cases}$$

"2" sia ora $g(t) = 4t\, e^{-t/2}$ (*)

$$g'(t) = 4e^{-t/2} - 4\frac{1}{2} t e^{-t/2} = 2e^{-t/2}(2-t)$$

$$g''(t) = \dots = e^{-t/2}(t-4)$$

$$g''(t) \geq 0 \Rightarrow t-4 \geq 0 \qquad t \geq 4$$

$t=4$ è un flesso per (*)

$F \equiv (4, 16e^{-2})$

$g(4) = 16e^{-2}$;

retta passante per F con coefficiente angolare pari a $g'(4)$:

$$y - 16e^{-2} = g'(4)(x-4)$$

$$y - 16e^{-2} = -4e^{-2}(x-4)$$

3

$$y = -4e^{-2}x + 16e^{-2} + 16e^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = -(4e^{-2})x + 32e^{-2}}$$

"3" Qui a nostro avviso c'è un errore nella traccia che genera qualche interpretazione. Riteniamo che si possa continuare effettuando due interpretazioni:

PRIMA INTERPRETAZIONE

$q(t)$ non può essere la carica che attraversa la superficie all'istante t, bensì è la carica totale che ha attraversato la superficie nell'intervallo di tempo $[0,t]$.

Procediamo, quindi, con tale ipotesi:

$$[a] = C/sec \; ; \quad [b] = sec^{-1} \; ;$$

La corrente elettrica $i(t) = q'(t)$. Quindi

$$\boxed{i(t) = 2e^{-t/2}(2-t)}$$

$$\lim_{t \to +\infty} i(t) = 0^-$$

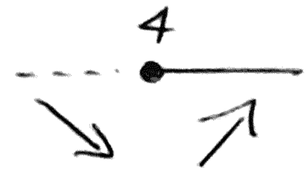
la corrente tende a zero ma con valore negativo quindi vuol dire che cambia segno.

Il flusso di carica inverte il moto!!!

$$\lim_{t \to 0^+} i(t) = 4$$

Studiamo max e min della corrente.

$i'(t) \geq 0 \Rightarrow q''(t) \geq 0 \Rightarrow t-4 \geq 0$

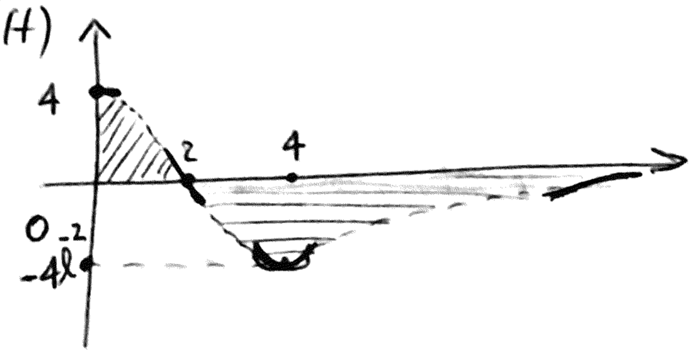


$t=4$ è minimo per la corrente.

$i_{min} = i(t=4) = -4e^{-2}$.

Inoltre per $t=2$ la corrente si annulla.

Il grafico qualitativo è dunque:



$$\begin{cases} i_{max} = 4\,A \\ i_{min} = -4e^{-2}\,A \\ i_{asintotico} = 0 \end{cases}$$

"4" Sia $[0, t_0]$ l'intervallo temporale di riferimento. La carica totale che ha attraversato la superficie in tale intervallo è data:

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} i(t)\,dt = q(t_0) - q(0) = q(t_0)$$

per ovvio significato dell'operazione di integrazione. Dunque:

$$Q(t_0) = 4\,t_0\,e^{-t_0/2}$$

$$\lim_{t_0 \to \infty} Q(t_0) = 0$$

RIFLESSIONE FISICA la carica netta che attraversa la superficie è zero, perché la corrente inverte segno ed

attraverso la superficie in senso contrario. (5)
Il flusso è negativo e dopo un tempo "lungo"
$t_0 \to +\infty$ è come se non fosse ~~fu~~ passato nulla.
Chiaramente dal grafico di $i(t)$, che non è in
scala, si deduce che le due aree //// e ≡
sono in valore assoluto uguale.
La potenza P ai capi di un resistore è data
dalla relazione:
$$P = R\,i^2$$ che si misura in Watt.
quindi l'energia dissipata in $[0, t_0]$:
$$\mathcal{E}_{DISS} = \int_0^{t_0} P(t)\,dt = \int_0^{t_0} R\, i(t)^2\, dt =$$
$$= 12\int_0^{t_0} e^{-t}(2-t)^2\, dt$$ che si misura in Joule
Valutiamo l'integrale:
$$\int e^{-t}(2-t)^2\,dt = -e^{-t}(2-t)^2 - \int\left[-e^{-t}2(2-t)(-1)\right]dt =$$
$$= -e^{-t}(2-t)^2 - 2\int e^{-t}(2-t)\,dt =$$
$$= -e^{-t}(2-t)^2 - 2\left(-e^{-t}(2-t) - \int\left[-e^{-t}(-1)\right]dt\right) =$$
$$= -e^{-t}(2-t)^2 + 2e^{-t}(2-t) - 2e^{-t} =$$
$$= e^{-t}\left[2(2-t) - (2-t)^2 - 2\right] = e^{-t}(-t^2 + 2t - 2)$$

$$\mathcal{E}_{DISS} = 12 e^{-t}(-t^2+2t-2)\Big|_0^{t_0} =$$

$$= 12 e^{-t_0}(-t_0^2+2t_0-2) - 12(-2)$$

$$= 24 - 12 e^{-t_0}(t_0^2-2t_0+2) \quad \left(\text{Energia dissipata}\right)$$

"in Joules."

SECONDA INTERPRETAZIONE

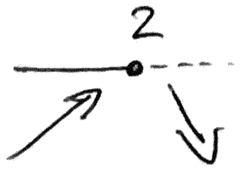
Se $q(t)$ deve essere un'interpretazione puntuale (cioè istantanea) allora può essere intesa come la corrente elettrica. In tale caso $q(t)$ non cambia segno quindi il flusso di carica avviene sempre nello stesso verso e di conseguenza $Q(t_0)$ tenderà ad un valore non nullo per $t_0 \to \infty$

Procediamo, quindi, con tale ipotesi:

"3-bis"

$i(t) = 4te^{-t/2}$ $\qquad [a] = C/sec^2;\ [b] = sec^{-1};$

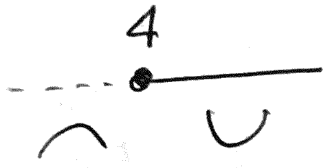
$i'(t) = q'(t) \ge 0 \Rightarrow 2e^{-t/2}(2-t) \ge 0 \qquad t \le 2.$



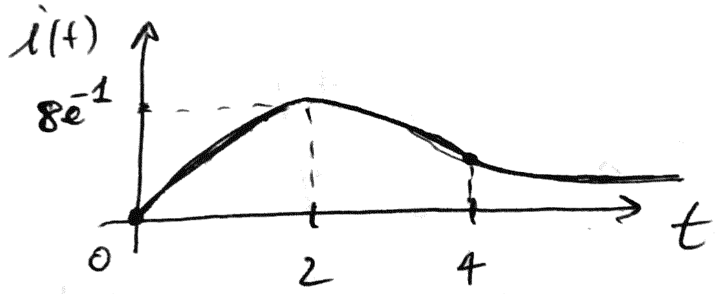
$t=2$ (MAX) $\qquad i_{max} = i(t=2) = 8e^{-1}\ A$

$\lim_{t\to+\infty} i(t) = 0^+ \qquad i(t=0) = 0$

$i''(t) = q''(t) \ge 0 \qquad e^{-t/2}(t-4) \ge 0 \qquad t \ge 4$



$t=4$ punto di flesso.



$$\begin{cases} i_{max} = 8e^{-1}\ \text{A} \\ i_{min} = 0 \\ i_{asintotico} = 0 \end{cases}$$

"4-bis"

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} i(t)\,dt = \int_0^{t_0} 4te^{-t/2}\,dt =$$

$$= 4\left\{ -2te^{-t/2}\Big|_0^{t_0} + 2\int_0^{t_0} e^{-t/2}\,dt \right\} =$$

$$= 4\left\{ -2te^{-t/2}\Big|_0^{t_0} - 4e^{-t/2}\Big|_0^{t_0} \right\} =$$

$$= 4\left\{ e^{-t/2}(-4-2t) \right\}\Big|_0^{t_0} = -4e^{-t_0/2}(4+2t_0) + 16;$$

$$\boxed{Q(t_0) = 16 - 8e^{-t_0/2}(t_0+2)} \longrightarrow 16 \text{ per } t_0 \to \infty.$$

N.B. 16 Coulomb.

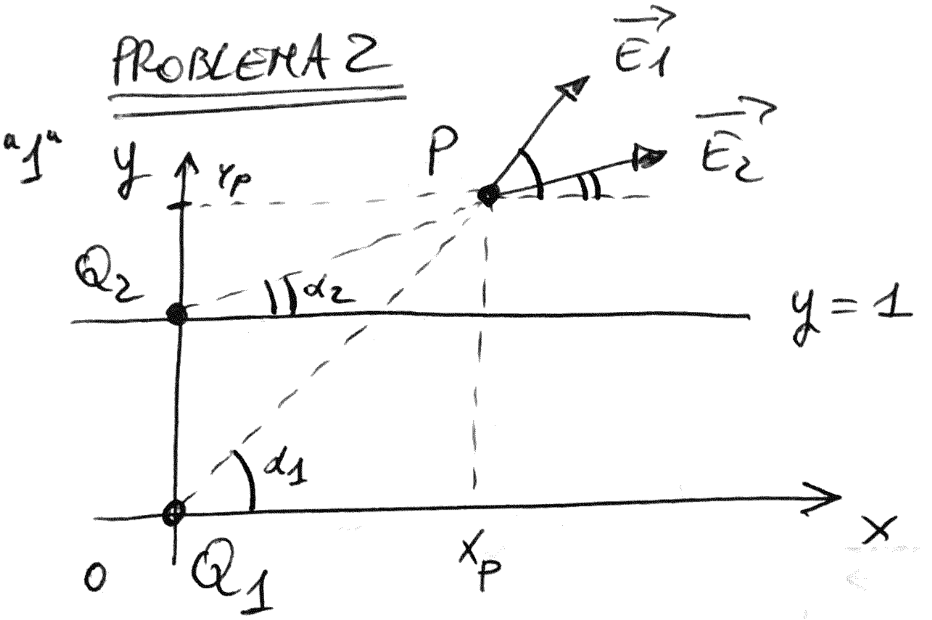
integrazione per parti

$$\mathcal{E}_{DISS} = \int_0^{t_0} 48t^2e^{-t}\,dt = 48\int_0^{t_0} t^2e^{-t}\,dt = \dots =$$

$$= 96 - 48e^{-t_0}(t_0^2+2t_0+2);$$ (Energia dissipata)

"in Joules"

PROBLEMA 2



$P \equiv (x_P, y_P)$

$\vec{E}_{TOT} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$

$Q_1 = 4q$

$Q_2 = q$

Per ragioni connesse ai vettori si intuisce immediatamente che $\vec{E}_{TOT}$ è sempre diverso da zero tranne per i punti (uno solo!) sul segmento Q_1Q_2. La somma di vettori con direzioni diverse non genera mai il vettore nullo.

Dobbiamo, quindi, aspettarci che il punto P dovrà essere di ascisse nulla e ordinata compresa tra 0 e 1. Tale punto si tratterà di un punto di equilibrio instabile poiché appena la carica di prova, supposta positiva, si sposterà dalla posizione individuata da P (con $x_P \neq 0$) subirà una forza di repulsione coulombiana che la allontanerà all'infinito. Tuttavia nel caso in cui gli spostamenti fossero lungo l'asse y vi sarà una forza di richiamo e quindi il punto P diventa (nel caso di $x_P = 0$) un punto di

equilibrio stabile.
Nel caso di una carica di prova negativa il punto P diviene di equilibrio stabile solo per spostamenti orizzontali ($x_p \neq 0$) mentre y_p rimane costante. Anche in questo caso l'equilibrio è instabile per spostamenti con $y_p \neq$ dal valore dell'ordinata che annulla il campo elettrico.
Individuiamo, innanzitutto, il punto P.
Sappiamo:

$$|\vec{E_1}| = \frac{kQ_1}{d_1^2} \; ; \quad |\vec{E_2}| = \frac{kQ_2}{d_2^2} \; ;$$

$$d_1 = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \; ; \quad d_2 = \sqrt{x_p^2 + (y_p - 1)^2}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_p}{d_1} \; ; \quad \sin\alpha_1 = \frac{y_p}{d_1}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{x_p}{d_2} \; ; \quad \sin\alpha_2 = \frac{y_p - 1}{d_2}$$

$$(\vec{E}_{TOT})_x = (\vec{E_1})_x + (\vec{E_2})_x \; ; \quad (\vec{E}_{TOT})_y = (\vec{E_1})_y + (\vec{E_2})_y \; ;$$

$$(\vec{E}_{TOT})_x = |\vec{E_1}| \cos\alpha_1 + |\vec{E_2}| \cos\alpha_2 = \frac{kQ_1}{d_1^3} x_p + \frac{kQ_2}{d_2^3} x_p =$$

$$= kq \left(\frac{4 x_p}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} + \frac{x_p}{(x_p^2 + (y_p - 1)^2)^{3/2}} \right) ;$$

$$\left(\vec{E}_{TOT}\right)_y = \left(\vec{E}_1\right)_y + \left(\vec{E}_2\right)_y =$$

$$= |\vec{E}_1| \sin\alpha_1 + |\vec{E}_2| \sin\alpha_2 = \frac{kQ_1}{d_1^3} y_p + \frac{kQ_2}{d_2^2}(y_p-1)$$

$$= kq\left(\frac{4y_p}{(x_p^2+y_p^2)^{3/2}} + \frac{y_p-1}{(x_p^2+(y_p-1)^2)^{3/2}}\right);$$

Dobbiamo imporre che le componenti di $\vec{E}_{TOT}$ siano nulle:

$$\begin{cases} \left(\vec{E}_{TOT}\right)_x = 0 \\ \left(\vec{E}_{TOT}\right)_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_p\left(\frac{4}{(x_p^2+y_p^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x_p^2+(y_p-1)^2)^{3/2}}\right) = 0 \\ \frac{4y_p}{(x_p^2+y_p^2)^{3/2}} + \frac{y_p-1}{(x_p^2+(y_p-1)^2)^{3/2}} = 0 \end{cases}$$

la prima espressione si annulla solo se $\boxed{x_p = 0}$ (la parentesi tonda è somma di quantità positive).

Bisogna ricercare P sull'asse y.

La seconda espressione diviene:

$$\frac{4\cancel{y_p}}{y_p^{\cancel{3}\,2}} + \frac{y_p-1}{|y_p-1|^3} = 0$$

con la condizione $0 < y_p < 1$

quindi $y_p - 1 < 0$

$$\frac{4}{y_p^2}-\frac{\cancel{(1-y_p)}}{|1-y_p|^{3/2}}=0 \Rightarrow \frac{4}{y_p^2}-\frac{1}{(1-y_p)^2}=0$$

$$y_p^2=4(1-y_p)^2 \qquad y_p^2-4+8y_p-4y_p^2=0$$

$$3y_p^2-8y_p+4=0 \qquad y_p=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\frac{4\pm 2}{3}=\begin{cases}2\\ 2/3\end{cases}$$

$y_p=2$ non è accettabile. Quindi $P\equiv(0,2/3)$

$\boxed{\text{Il punto } (0,2/3) \text{ è l'unico punto del piano in cui il campo elettrico è nullo.}}$

Supponiamo di avere una carica di prova q_0 - l'energia potenziale è data:

$$U(x,y)=\frac{4Kqq_0}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{Kqq_0}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=$$

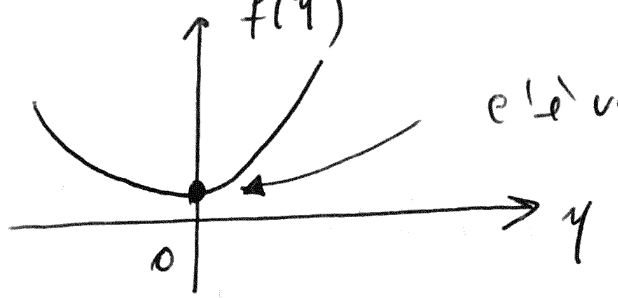
$$=Kqq_0\left(\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}\right)$$

$q_0>0$ Definiamo $f(\eta)\doteq U\left(0,\frac{2}{3}+\eta\right)/Kqq_0$

$$f(\eta)=\frac{4}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}+\eta\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}+\eta-1\right)^2}}=\frac{4}{\left|\frac{2}{3}+\eta\right|}+\frac{1}{\left|\eta-\frac{1}{3}\right|}$$

dove η assume valori nell'intorno di 0 in modo che y assume valori nell'intorno di $2/3$.

Il grafico qualitativo di $f(y)$ è il seguente



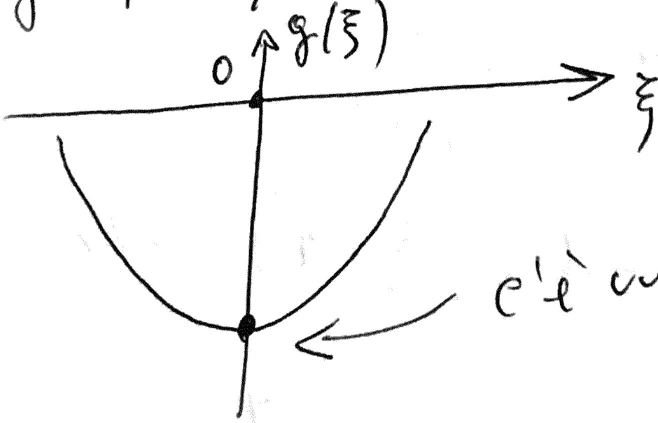
c'è un minimo $\Rightarrow$ equilibrio stabile.

$q_0<0 \Rightarrow q_0=-|q_0|$ Definiamo una nuova funzione $g(\xi) \doteq U(\xi, 2/3)/kq|q_0|$

$$g(\xi) = -\left(\frac{4}{\sqrt{\xi^2+\frac{4}{9}}} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\left(\frac{2}{3}-1\right)^2}} \right)$$

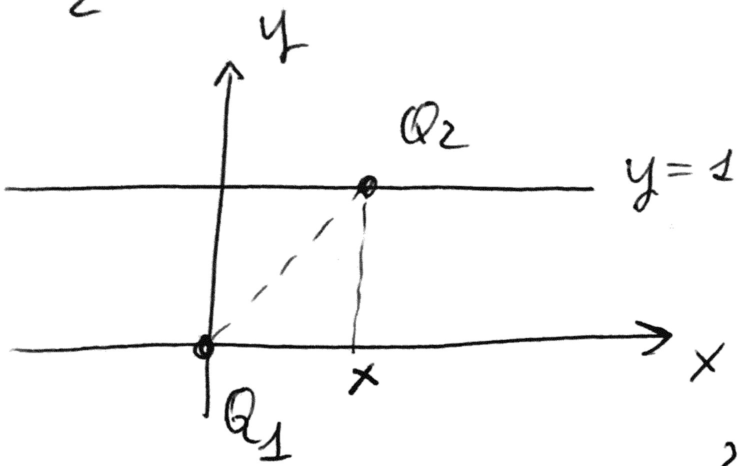
dove ξ assume valori nell'intorno di 0 in modo che x assume anch'esso valori intorno allo zero e ci spostiamo, quindi, orizzontalmente lungo la retta $y=2/3$.

Il grafico qualitativo di $g(\xi)$ è il seguente:



c'è un minimo $\Rightarrow$ equilibrio stabile.

"2"



$d = \sqrt{x^2+1}$

$$U(x) = \frac{k Q_1 Q_2}{d} = \frac{4kq^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

"3" Conviene sempre definire una funzione $f(x)$!

$$f(x) \doteq \frac{U(x)}{4kq^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad D = \mathbb{R}$$

$f(x) = f(-x) \Rightarrow$ funzione pari.

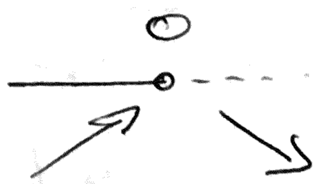
$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ asintoto orizzontale $y = 0$

$f(0) = 1$ intersezione con l'asse y.

$$f'(x) = \left((1+x^2)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{\cancel{2}}(1+x^2)^{-3/2}(\cancel{2}x) = -(1+x^2)^{-3/2}\,x$$

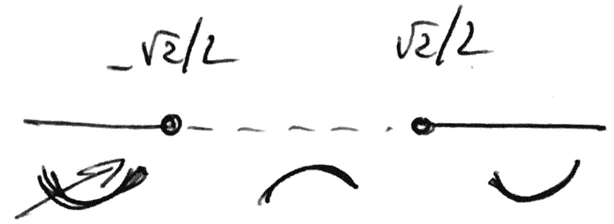
$f'(x) \geq 0 \Rightarrow \quad x \leq 0$



$x = 0$ (MAX) $\Rightarrow f_{max} = 1$.

$$f''(x) = \frac{3}{\cancel{2}}(1+x^2)^{-5/2}\cancel{2}x^2 - (1+x^2)^{-3/2} = (1+x^2)^{-5/2}\left[3x^2-(x^2+1)\right]$$

$f''(x) \geq 0 \implies 2x^2-1 \geq 0 \qquad x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ FLESSI.

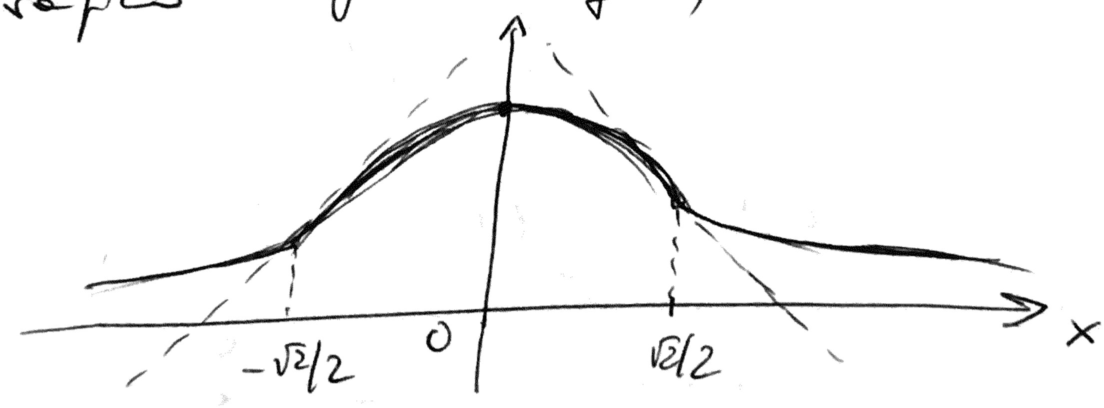
I coefficienti angolari nei punti di flesso devono essere opposti (considerata la simmetria della f-zione).

$$m_\pm = f'\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1\right)^{-3/2} =$$

$$= \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-3/2} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{8}{27}} =$$

$$= \mp\sqrt{\frac{2\cdot 8}{4\cdot 27}} = \mp\frac{2}{\sqrt{27}};$$

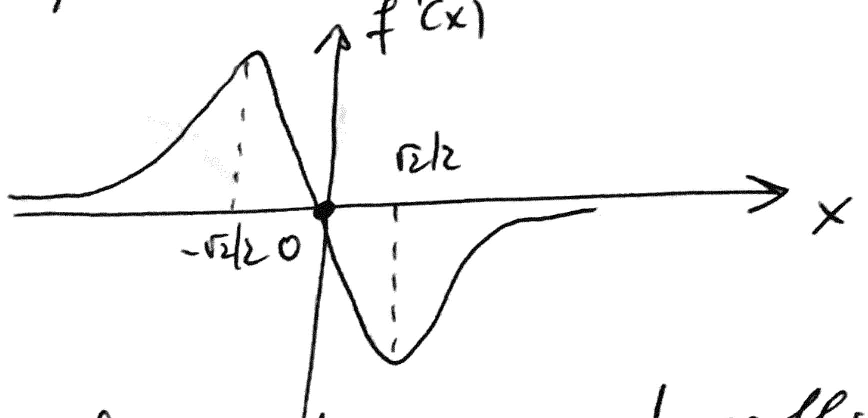
Il grafico di f(x):



"4" Siccome f(x) è pari f'(x) deve essere dispari.

Il punto di minimo di f'(x) deve essere un flesso di f(x) quindi $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (è l'ascissa in corrispondenza della inclinazione della retta (massima) rispetto al semiasse negativo delle ascisse-

Il grafico qualitativo di $f'(x)$ deve essere:



l'integrale di funzioni dispari su intervalli simmetrici è nullo. Infatti:

$$\int_{-m}^{m} f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{-m}^{m} = f(m) - f(-m) = f(m) - f(m) = 0.$$

QUESITI

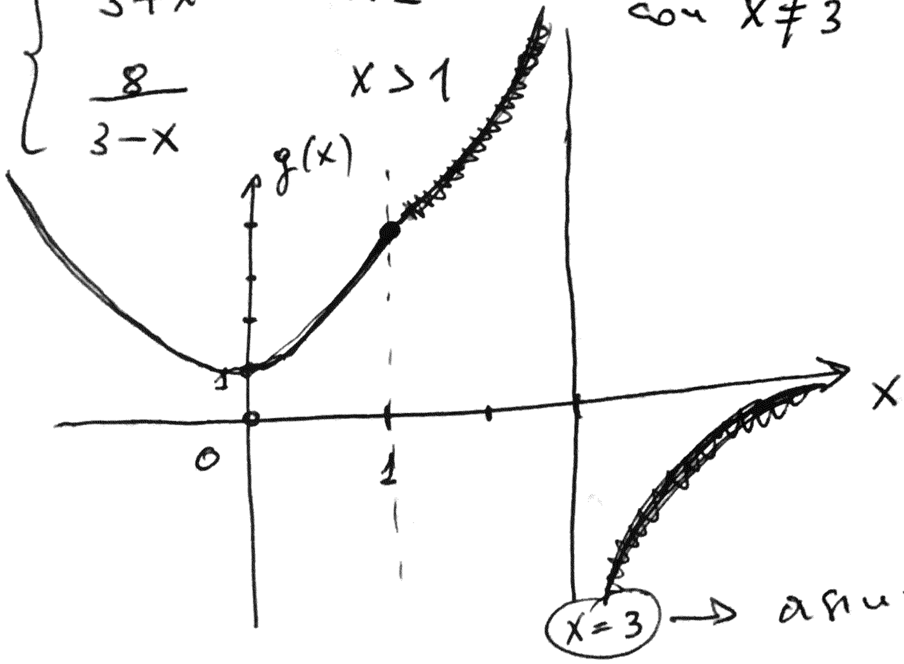
"1" $g(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{per } x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x-3} & x > 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} g(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{b}{x-3} \\ g'(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{b}{x-3}\right)' \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 - a = -\dfrac{b}{2} \\ -2a = \dfrac{-b}{(1-3)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - a = -\dfrac{b}{2} \\ 2a = \dfrac{b}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 - b/8 = -b/2 \\ a = b/8 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) b = -3 \Rightarrow b = -8$$

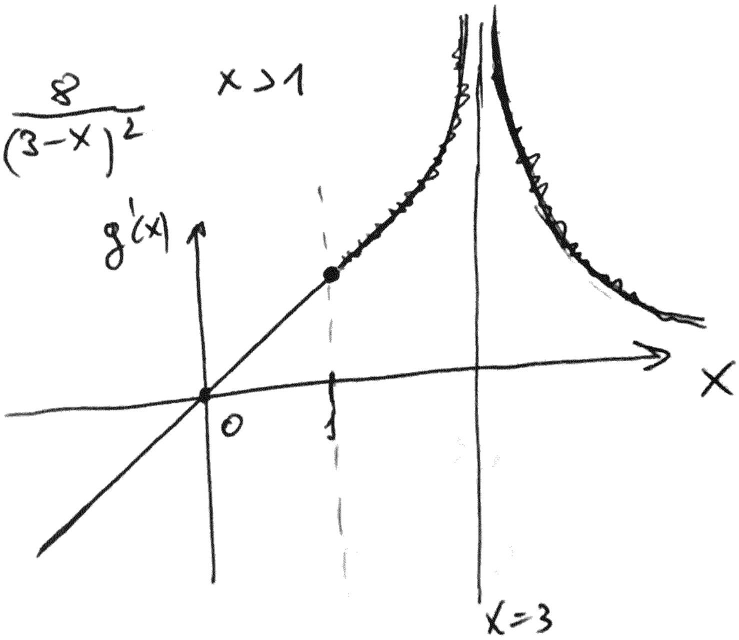
$$\boxed{\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -8 \end{aligned}}$$

$$g(x)=\begin{cases}3+x^2 & x\le 1\\ \dfrac{8}{3-x} & x>1\end{cases}\qquad \text{con } x\neq 3$$



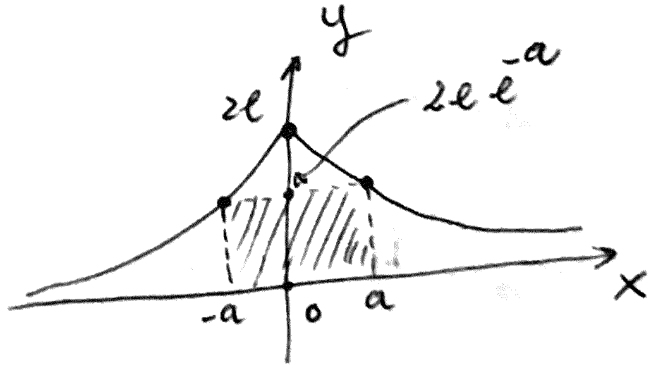
$x=3$ → asintoto verticale

$$g'(x)=\begin{cases}2x & \text{con } x\le 1\\ \dfrac{8}{(3-x)^2} & x>1\end{cases}$$



2ª Sia $y=(2e)\,e^{-|x|}$

$$2e\,e^{-|x|}=\begin{cases}2e\,e^{-x} & x\ge 0\\ 2e\,e^{x} & x<0\end{cases}$$



$$A(a)=2a\,(2e)\,e^{-a}=4e\,a\,e^{-a}$$

$$\frac{dA(a)}{da}=4e\left(e^{-a}-a\,e^{-a}\right)=4e\,e^{-a}(1-a)\ge 0 \Rightarrow a\le 1$$

$a=1$ $a=1$ max

l'area è massima per $a=1$ e il quadrilatero è un quadrato.

$$P(a) = (2a)2 + (2e\,e^{-a})2 = 4(a + e\,e^{-a});$$

$$\frac{dP(a)}{da} = 4(1 - e\,e^{-a}) \geq 0 \qquad 1 - e\,e^{-a} \geq 0 \qquad e^{-a} \leq e^{-1}$$

$-a \leq -1$ $a \geq 1$ $a=1$ $a = 1$ min

il perimetro è minimo per $a=1$.

"3"

$$P = \underbrace{\frac{1}{16}}_{\text{venga estratto il 10}} \left(9\,\frac{1}{16}\right) = \frac{9}{256} \simeq 3{,}5\%$$

$\frac{1}{16} \longrightarrow$ probabilità che venga estratto un numero più piccolo di 10. Siccome sono 9 i numeri più piccoli di 10 abbiamo $9/16$.

$$P = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{16}{5}} = \frac{\cancel{12!}}{\cancel{4!}(12-4)!}\;\frac{\cancel{5!}\,(16-5)!}{\cancel{16!}} = \frac{5}{16\cdot15\cdot14\cdot13}\;\frac{\cancel{11!}}{\cancel{8!}} =$$

numero di combinazioni con cui dispongo 12 numeri in 4 posti

numero di combinazioni con cui dispongo 16 numeri su 5 posti

$$= \frac{\cancel{6}\cdot11\cdot\cancel{10}\cdot\cancel{9}}{16\cdot1\cancel{5}\cdot\cancel{14}\cdot13} = \frac{11\cdot5\cdot3}{16\cdot13\cdot7} = \frac{165}{1456} \simeq 11{,}3\%$$

"4"

$$y = \frac{s(x)}{t(x)}$$

Se y incontra l'asse x in due punti allora $s(x)$ deve avere due radici reali. Quindi deve essere deve come minimo: $s(x) = (x+1)(x-2)$

siccome si aggiunge che y deve essere tangente all'asse x in $x=2$, allora $x=2$ deve essere un punto "doppio" la cui molteplicità deve essere 2.

Abbiamo quindi:

$$s(x) = (x+1)(x-2)^2$$

Inoltre y deve avere due asintoti verticali $x=-3$ e $x=1$ dunque -3 e 1 sono radici di $t(x)$. Da cui:

$$t(x) = (x+3)(x-1)$$

Ora la nostra funzione diviene:

$$y = \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)}$$ che, tuttavia, non è il caso più generale in quanto i due polinomi $s(x)$ e $t(x)$ possono essere moltiplicati per un fattore arbitrario.

Otteniamo quindi:

$$y = A\,\frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)} \quad \text{con } A \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Imponendo la condizione $y(x=7) = 10$

$$10 = A\,\frac{(7+1)(7-2)^2}{(7+3)(7-1)} \Longrightarrow A = 3$$

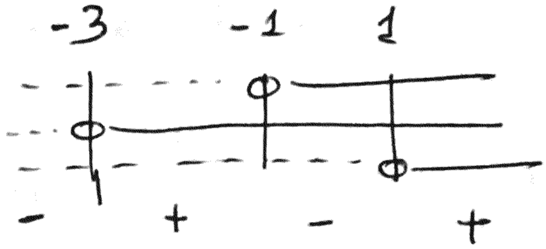
$$\boxed{y = 3\,\frac{(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)}}$$

$y \longrightarrow 3x$ per $x \longrightarrow \pm\infty$ la funzione ammette asintoto obliquo.

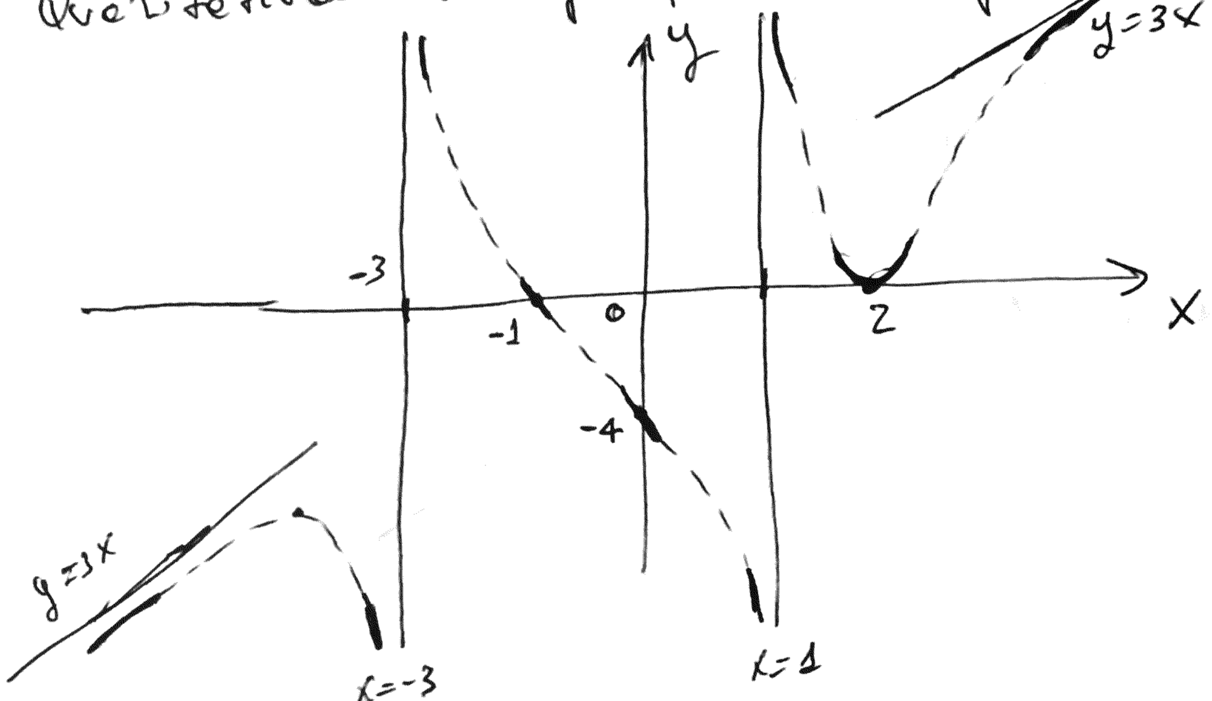
$y(x=0) = -4$

Positività: $y>0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)}{(x+3)(x-1)} > 0$

$x>-1$
$x>-3$
$x>1$



Qualitativamente il grafico è il seguente:



Ci aspettiamo quindi un massimo con $x_{min} < -3$
ed un minimo per $x=2$.

"5" Basta verificare che la distanza del centro della sfera dal piano sia minore del raggio della sfera. In tal caso vi è intersezione.

Una sfera è di equazione

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

il centro è $C \equiv \left(-a/2, -b/2, -c/2\right)$

il raggio $R = \sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{c^2}{4}-d}$

Nel nostro caso $a=-2$; $b=0$; $c=6$; $d=0$

$C\equiv(1,0,-3)$ $\quad R=\sqrt{10}$.

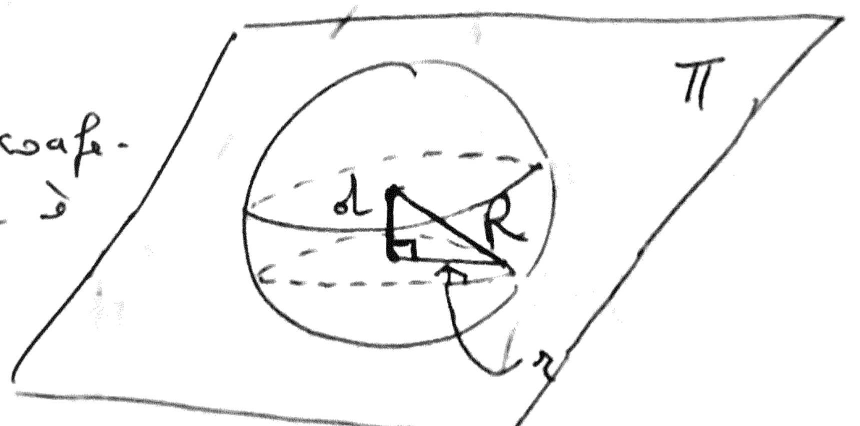
La distanza di un punto dal piano $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ è calcolata come segue:

$$d(P,\pi)=\frac{|\alpha x_P+\beta y_P+\gamma z_P+\delta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \quad \text{se } P\equiv(x_P,y_P,z_P)$$

Nel nostro caso

$$d(P,\pi)=\frac{|3-18+1|}{\sqrt{49}}=\frac{14}{7}=2<\sqrt{10}=R.$$

vi è intersezione.



Il raggio r della circonferenza d'intersezione è dato come

$$r=\sqrt{R^2-d(P,\pi)^2} \stackrel{!}{=} \sqrt{6}$$

"6" La legge oraria $x(t)=\frac{t^2}{9}\left(\frac{t}{3}+2\right)$ non rappresenta un moto uniformemente accelerato perché la sua derivata seconda non è costante. Infatti

$$v(t)=x'(t)=\frac{t^2}{9}+\frac{4}{9}t \quad \text{(velocità istantanea)}$$

$$a(t)=x''(t)=v'(t)=\frac{2t}{9}+\frac{4}{9} \quad \text{(accelerazione istantanea)}$$

La velocità media [illegible] nell'intervallo [0,9] è data come segue:

$$V_m = \frac{x(t=9\,sec)-x(t=0\,sec)}{\Delta t} = \frac{(45-0)\,m}{(9-0)\,sec} = 5\,m/s.$$

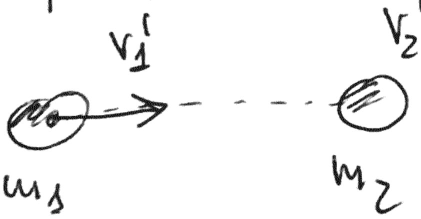
$$V(t^*) = V_m \Rightarrow \frac{t^{*2}}{9}+\frac{4}{9}t^* = 5$$

$$t^{*2}+4t^*-45=0 \qquad t^* = -2\pm\sqrt{4+45} = -2\pm 7 = \begin{cases} 5 \\ -9 \end{cases}$$

non accettabile

$$\boxed{t^* = 5\,sec}$$

7ª In generale in un urto elastico abbiamo la conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto.



$$\begin{cases} m_1 v_1^i = m_1 v_1^f + m_2 v_2^f \\ \frac{1}{2} m_1 {v_1^i}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_1^f}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2^f}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1^f = v_1^i - \frac{m_2}{m_1} v_2^f \\ m_1 {v_1^i}^2 = m_1 \left(v_1^i - \frac{m_2}{m_1} v_2^f \right)^2 + m_2 {v_2^f}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{———} \\ \cancel{m_1 {v_1^i}^2} = \cancel{m_1 {v_1^i}^2} - 2 m_2 v_1^i v_2^f + \frac{m_2^2}{m_1} {v_2^f}^2 + m_2 {v_2^f}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{———} \\ m_2 \left[v_2^f \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) - 2 v_1^i \right] v_2^f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2^f = 0 \\ v_2^f = \dfrac{2 v_1^i}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \end{cases}$$

$v_2^f = 0$ implica che non vi è stato l'urto, quindi la particella m_2 rimane ferma. Di conseguenza, v_1^f sarà uguale alla velocità iniziale v_1^i. La soluzione fisica sarà

$$\boxed{v_2^f = \frac{2 m_1 v_1^i}{m_1 + m_2}}$$

Calcoliamo ora v_1^f:

$$v_1^f = v_1^i - \frac{m_2}{\cancel{m_1}} \frac{2 \cancel{m_1} v_1^i}{m_1 + m_2} = \dots = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^i$$

$$\boxed{v_1^f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^i}$$

Nel nostro caso $m_1 = m$ e $m_2 = 3m$, $v_1^i = v$

$$\begin{cases} v_2^f = \dfrac{2m}{m + 3m} v = \dfrac{v}{2} \\ v_1^f = \dfrac{m - 3m}{m + 3m} v = -\dfrac{v}{2} \end{cases}$$

(m_1 rimbalza su m_2 e torna indietro)

Nel caso di urto completamente anelastico i corpi rimangono uniti. Si conserva solo la quantità di moto:

$$m_1 v_1^i = (m_1 + m_2) v^f$$

$$\Rightarrow \boxed{v^f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1^i}$$

Valutiamo la variazione di energia cinetica:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) {v^f}^2 - \frac{1}{2} m_1 {v_1^i}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2)} \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} V_1^{i\,2} - \frac{1}{2} m_1 V_1^{i\,2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{m_1+m_2} - m_1\right) V_1^{i\,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-m_1 m_2}{m_1+m_2}\right) V_1^{i\,2}.$$

$$\boxed{\Delta K = -\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right) V_1^{i\,2} < 0}$$

è stata dissipata energia nell'urto.

Nel nostro caso abbiamo:

$$\Delta K = -\frac{1}{2}\frac{3 m^{\cancel{2}}}{4 \cancel{m}} v^2 = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = -\frac{3}{4} K_i$$

è stata dissipata il 75% dell'energia iniziale.

La velocità finale dei due corpi uniti nel nostro caso diviene:

$$v^f = \frac{m}{4m} v = \frac{1}{4} v$$

"8" Il flusso magnetico attraverso la spira quadrata è pari a:

$$\Phi_{S'}(\vec{B}) = \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S'} = |\vec{B}|\, \ell^2 = B_0(2+\sin\omega t)\,\ell^2$$

La fem in valore assoluto (non ci interessa il senso di percorrenza della corrente indotta) è

$$f_{em} = \left|\frac{d\Phi_{S'}(\vec{B})}{dt}\right| = B_0 \ell^2 \omega\, |\cos\omega t|$$

$$i_{IND} = f_{em}/R = \frac{B_0 \ell^2 \omega}{R} |\cos\omega t| = I_0 |\cos\omega t|$$

dove I_0 rappresenta la massima corrente indotta.

$[B_0] = [T] = [Kg][C]^{-1}[s]^{-1}$;

$[\omega_0] = [s]^{-1}$;

$[R] = [\Omega] = [Kg][m^2][s]^{-1}[C]^{-2}$;

$[\ell^2] = [m]^2$;

Esprimendo il tutto nel sistema MKS.