# MATRICI E DETERMINANTI

Si definisce **matrice** una **tabella ordinata** rettangolare di elementi disposti secondo righe e colonne. In simboli sia A una matrice e la sua rappresentazione è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ & & & & a_{mn} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & \end{pmatrix}$$

dove i $m \times n$ elementi sono generalmente dei numeri. Tale matrice presenta "n" colonne ed "m" righe. Il generico elemento della matrice lo rappresentiamo con il simbolo $a_{ij}$ dove $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. L'elemento $a_{ij}$ è individuato dall'incrocio della "i-esima" riga e la "j-esima" colonna.

Spesso indicheremo la matrice anche in modo compatto come segue:

$$A = \{a_{ij}\}_{i=1,\, j=1}^{m \quad n} \quad \begin{pmatrix}\text{MATRICE} \\ \text{RETTANGOLARE}\end{pmatrix}$$

Si definisce **matrice quadrata** la matrice con lo stesso numero di righe e di colonne ($m=n$). In questo caso indicheremo la matrice semplicemente come

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \quad \begin{pmatrix}\text{MATRICE} \\ \text{QUADRATA}\end{pmatrix}$$

Spesso utilizzeremo anche la nozione di **vettore riga** e **vettore colonna**.

La matrice che presenta tutti gli elementi pari a zero rappresenta la **matrice nulla**.
Possiamo immediatamente notare come la matrice è una generalizzazione del concetto di vettore come questo era una generalizzazione del concetto di scalare. Possiamo quindi ridefinire lo scalare come una matrice $(1\times 1)$, mentre un vettore è una matrice $(1\times n)$ oppure $(n\times 1)$.
Definiamo **matrice unità**, e la indicheremo con il simbolo $\mathbb{1}$, una matrice quadrata che presenta i seguenti valori:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases} \qquad i,j=1,\dots,n \qquad \left(\begin{matrix}\text{MATRICE}\\ \text{UNITÀ}\end{matrix}\right)$$

la cui rappresentazione matriciale è

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Definiamo **matrice diagonale** una matrice quadrata che presenta elementi diversi da zero solo se $i=j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\text{MATRICE}\\ \text{DIAGONALE}\end{matrix}$$

SOMMA DI DUE MATRICI

Siano $A=\{a_{ij}\}_{i=1\,j=1}^{m\quad n}$ e $B=\{b_{ij}\}_{i=1\,j=1}^{m\quad n}$ due matrici $m\times n$; definiamo somma $A+B$ una terza matrice $C=\{c_{ij}\}_{i=1\,j=1}^{m\quad n}$ se è soddisfatta la seguente condizione

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad i=1,\dots,m \ \text{e}\ j=1,\dots,n$$

e indicheremo la somma come $A+B=C$.

Data la matrice $A$, chiameremo la matrice $B$ opposta di $A$ se accade $b_{ij}=-a_{ij}$ $\begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$

$$B=-A \iff$$

$$A+B=0 \iff$$

PRODOTTO DI UNO SCALARE PER UNA MATRICE

Sia $k$ uno scalare e sia $A=\{a_{ij}\}_{i=1\,j=1}^{m\quad n}$ la matrice, definiamo $C$ matrice ottenuta dal prodotto di $k$ per $A$ se accade:

$$c_{ij}=k\,a_{ij} \quad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix} \iff C=kA$$

COMBINAZIONE LINEARE TRA MATRICI

Siano due matrici $A=\{a_{ij}\}_{i=1\,j=1}^{m\quad n}$ e $B=\{b_{ij}\}_{i=1\,j=1}^{m\quad n}$

e siano due scalari $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$C=\alpha A+\beta B \iff c_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta b_{ij} \quad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$$

TRASPOSTA DI UNA MATRICE

Si definisce trasposta della matrice $A=\{a_{ij}\}_{i=1\,j=1}^{m\quad n}$ una nuova matrice che si ottiene da $A$ invertendo le righe con le colonne (oppure le colonne con le righe

Tale matrice la indicheremo con il simbolo $A^T$ (trasposta di A). In simboli:

$$A = \{a_{ij}\}_{i=1\,j=1}^{m\quad n} \quad ; \quad A^T = \{b_{ij}\}_{i=1\,j=1}^{n\quad m} \Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$$

Quindi se A è una matrice con m righe e n colonne e n colonne allora $A^T$ è una matrice con n righe e m colonne.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Nel caso di un vettore riga abbiamo:

$$(1 \ 2 \ 3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

nel caso di un vettore colonna abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}^T = (6 \ 7 \ 9)$$

Con l'operazione di trasposizione possiamo passare dai vettori riga ai vettori colonna e viceversa.

Ovviamente è intuitivo dedurre

$$\boxed{(A^T)^T = A}$$

Si definisce <u>matrice simmetrica</u> una matrice quadrata che coincide con la sua trasposta:

$$\boxed{A^T = A} \Leftrightarrow \text{(matrice simmetrica)}$$

In termini di elementi della matrice: $\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$

Si definisce <u>matrice antisimmetrica</u> una matrice quadrata che è opposta alla sua trasposta:

$\boxed{A^T = -A}$ $\Longleftrightarrow$ (matrice antisimmetrica)

In termini di elementi della matrice: $\boxed{a_{ij} = -a_{ji}}$

Ovviamente nel caso di matrici antisimmetriche le diagonali deve essere nulle ($a_{11} = -a_{11}$, $a_{22} = -a_{22}, \dots$)

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & +3 \\ +1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

simmetrica — antisimmetrica

È facile dimostrare che

$$\boxed{\begin{aligned} (KA)^T &= KA^T \\ (A+B)^T &= A^T + B^T \end{aligned}}$$ con $K \in \mathbb{R}$

<u>N.B.</u> Se $A$ non è simmetrica necessariamente $A + A^T$ è simmetrica. Infatti $(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$

Se $A$ non è antisimmetrica necessariamente $A - A^T$ è antisimmetrica. Infatti $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$.

Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ; $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$A + A^T = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ $\qquad A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

# PRODOTTO TRA MATRICI (prodotto riga per colonna) 

Bisogna introdurre un'operazione di moltiplicazione fra due matrici che generalizzi il prodotto scalare tra due vettori così come questo ultimo generalizzava il prodotto tra scalari.

Accanto alla matrice $A = \{a_{ij}\}_{i=1\, j=1}^{m\quad n}$ introduciamo i vettori riga e colonna come segue:

$$A_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3} \dots a_{in})$$

VETTORE i-ESIMO RIGA

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

VETTORE COLONNA J-ESIMO

Si definisce prodotto (riga per colonna) delle due matrici $A = \{a_{ij}\}_{i=1\, j=1}^{m\quad n}$ e $B = \{b_{ij}\}_{i=1\, j=1}^{n\quad p}$ la matrice $C = \{c_{ij}\}_{i=1\, j=1}^{m\quad p}$ e la indicheremo come

$$\boxed{C = AB \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

PRODOTTO RIGA x COLONNA

Da un punto di vista matriciale

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \dots & A_1 \cdot B^p \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \dots & \\ \vdots & & & \\ A_m \cdot B^1 & A_m \cdot B^2 & \dots & A_m \cdot B^p \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

Sia $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Siano altre matrici generiche $(2\times 2)$. Abbiamo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

Il prodotto righe per colonne gode delle proprietà

$$\boxed{ABC = A(BC) = (AB)C}$$

DIM. Calcoliamo $A(BC)$. Sia $D = BC$ e $E = AD$

$$d_{ij} = \sum_k b_{ik} c_{kj}$$

$$e_{ij} = \sum_k a_{ik} d_{kj} = \sum_k a_{ik} \sum_l b_{kl} c_{lj} = \sum_{k,l} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

Calcoliamo $(AB)C$. Sia $F = AB$ e $G = FC$

$$f_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

$$g_{ij} = \sum_k f_{ik} c_{kj} = \sum_k \sum_l a_{il} b_{lk} c_{kj} = \sum_{k,l} a_{il} b_{lk} c_{kj}$$

$\Rightarrow \boxed{e_{ij} = g_{ij}}$ poiché $k$ ed $l$ sono indici muti: la matrice $E$ e la matrice $G$ sono uguali.

Quindi

È soddisfatta anche la proprietà

$$\boxed{A(B+C) = AB + AC}$$

DIM. Calcoliamo $A(B+C)$. Sia $D = B + C$ e $E = AD$

$$e_{ij} = \sum_k a_{ik} d_{kj} = \sum_k a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_k a_{ik} b_{kj} + \sum_k a_{ik} c_{kj} = f_{ij} + g_{ij}$$

dove $F = AB = \{f_{ij}\}$ e $G = AC = \{g_{ij}\}$

Si verifica facilmente che $\boxed{A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A}$

Il prodotto riga per colonna <u>non è commutativo</u>:

$$\boxed{AB \neq BA} \quad \left(\begin{array}{c}\text{in generale} \\ \text{non è commutativo}\end{array}\right)$$

<u>Bisogna stare</u> attenti all'<u>ordine</u> dei fattori.

Infatti calcoliamo $C = AB$ e $D = BA$

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \qquad d_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj}$$

quindi $c_{ij} \neq d_{ij}$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

TRASPOSTA DI UN PRODOTTO RIGA PER COLONNA

$$\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$$

<u>DIM.</u> calcoliamo $D = (AB)^T$

$$d_{ij} = \left(\sum_k a_{ik} b_{kj}\right)^T = \sum_k a_{jk} b_{ki}$$

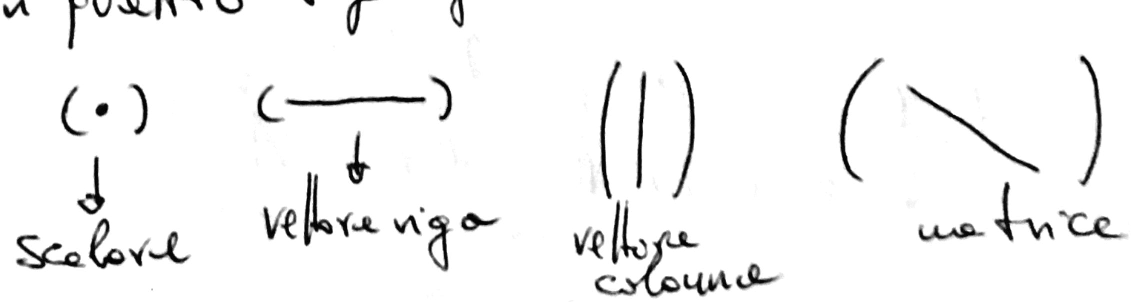
calcoliamo $E = B^T A^T$

$$e_{ij} = \sum_k b'_{ik} a'_{kj} = \sum_k b_{ki} a_{jk} = \sum_k a_{jk} b_{ki}$$

quindi $\boxed{e_{ij} = d_{ij}}$

---

Possiamo riassumere i vari oggetti fin qui analizzati in quattro tipologie:



Il prodotto di uno scalare (∘) per un vettore riga (—) o vettore colonna (|) o ancora per una matrice (\) ci dà esattamente un oggetto della stessa natura. In questo caso è il prodotto di uno scalare per un vettore o per una matrice già definiti.

(∘) (—) = (—) (∘) (\) = (\)

(∘) (|) = (|)

Tuttavia è interessante capire le combinazioni possibili nell'effettuare il prodotto riga per colonna quando consideriamo i vettori riga, colonna e le matrici. Inoltre è utile ricordare che il prodotto riga per colonna non è commutativo e quindi dipende dall'ordine dei fattori.

Graficamente abbiamo:

(\)(\) = (\) ; (—)(\) = (—) ;

(\)(—) = (\) ; (|)(\) = (\) ;

(\)(|) = (|) ; (—)(|) = (∘) ;

(|)(—) = (\) ; (—)(—) = (—) ;

(|)(|) = (|) ;

Possiamo concludere che l'unica combinazione per ottenere uno scalare dal prodotto di vettori riga, colonne e matrici è il seguente

$$(\text{—})(\diagdown)(|) = (\cdot)$$

che utilizzando l'operazione di trasposizione può essere riscritta come segue

$$\boxed{(|)^T(\diagdown)(|) = (\cdot)}$$

OPERAZIONI ELEMENTARI

Si definisce *operazione elementare* sulle righe (o sulle colonne) di una matrice generica $A$ una delle seguenti operazioni:

1) moltiplicare un'intera riga (o un'intera colonna) per uno scalare: $A_i \to \lambda A_i$ (o $A^j \to \lambda A^j$) con $\lambda \in \mathbb{R}$.
2) scambiare di posto due righe (o due colonne): $A_i \to A_{i'}$ (o $A^j \to A^{j'}$)
3) aggiungere un multiplo di una riga (o di una colonna) ad un'altra riga (o ad un'altra colonna): $A_i \to A_i + \lambda A_{i'}$ (o $A^j \to A^j + \lambda A^{j'}$)