Si definiscono <u>matrici equivalenti</u> due matrici che si ottengono l'una dall'altra ~~e~~ eseguendo un numero finito di operazioni elementari.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_2 \to A_2 - A_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A_3 \to 2A_3 + \\ -2A_1 + A_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si definisce <u>matrice a scalini</u> una matrice A che presenta la seguente proprietà:

"il primo elemento diverso da zero di una riga deve essere più a destra del primo elemento diverso da zero della riga precedente"

Per esempio la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è ridotta a scalini, mentre la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

non lo è.

È possibile utilizzando le operazioni elementari trasformare una matrice non a scalini in una matrice a scalini.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_1 \to -A_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_2 \to A_2 + A_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[A_2 \to -2A_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 \to A_3 + A_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

MATRICE INVERSA

Si definisce la matrice inversa di una data matrice A una seconda matrice B tale che

$$\boxed{AB = \mathbb{1} \iff B \doteq A^{-1}}$$

nell'ipotesi che il prodotto tra le due matrici sia il prodotto righe per colonne.

Ovviamente si ottiene immediatamente

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

N.B. Non per tutte le matrici è possibile stabilire la sua matrice inversa. Successivamente stabiliremo una tale condizione. Per ora supponiamo che questa esista.

Verifichiamo la proprietà

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}}$$

DIM Sia $X = (AB)^{-1}$, deve accadere che

$$ABX = \mathbb{1}$$

Se supponiamo di scrivere $X = B^{-1}A^{-1}$ abbiamo

$$ABX = \mathbb{1} \Rightarrow AB(B^{-1}A^{-1}) = \mathbb{1} \Rightarrow A\underbrace{BB^{-1}}_{\mathbb{1}}A^{-1} = \mathbb{1}$$

$$A\mathbb{1}A^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow AA^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} = \mathbb{1}.$$

Non sappiamo ancora calcolare la matrice inversa ma sappiamo che l'inverso di un prodotto tra matrici deve soddisfare la condizione appena dimostrata.

[Non vi è nessuna formula generale sulla somma]

Esiste una particolare proprietà che lega l'operazione di trasposizione e quella di inversione

$$\boxed{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T}$$

Dalla proprietà delle trasposte abbiamo:

DIM.

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = \mathbb{1}^T = \mathbb{1}$$

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = \mathbb{1}^T = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \quad A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Si definisce matrice ortogonale una matrice quadrata che soddisfa la seguente condizione

$$\boxed{A^T = A^{-1}} \quad \text{(MATRICE ORTOGONALE)}$$

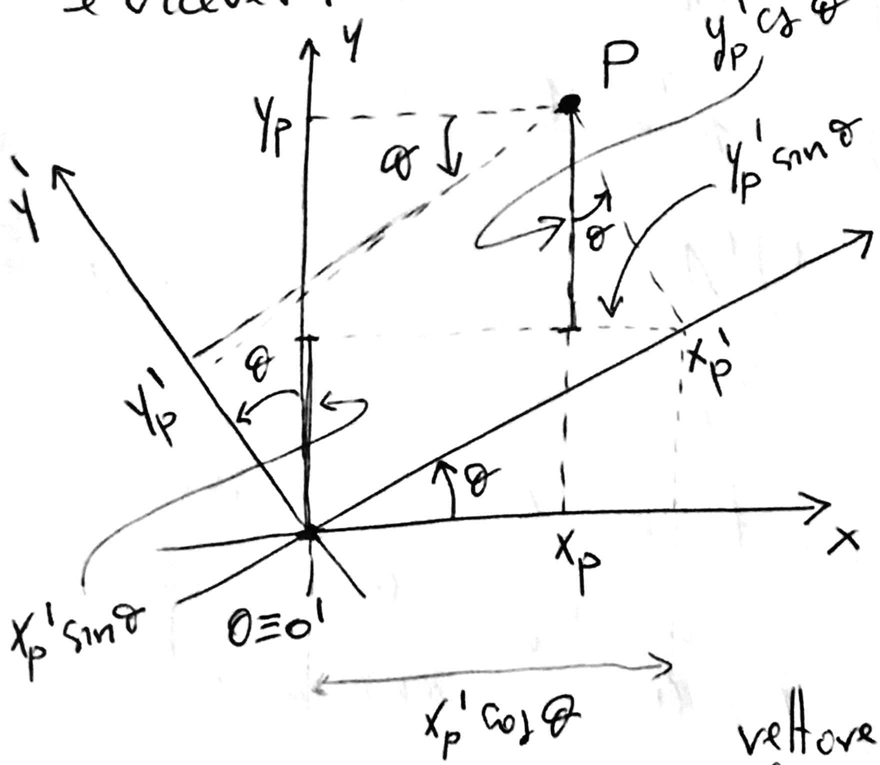
Successivamente sarà chiaro il significato di tale definizione.

CALCOLO MATRICE INVERSA

Prima di ricavare il metodo generale per il calcolo della matrice inversa analizziamo il caso delle rotazioni in un piano cartesiano e se queste possono essere riscritte in forma matriciale con gli strumenti fin qui analizzati.

Consideriamo due sistemi di riferimento cartesiani monometrici ortogonali con le origini coincidenti ma ruotati di un dato angolo θ.

Siano (x_p, y_p) e (x_p', y_p') le coordinate di un generico punto P del piano rispetto ai due sistemi di riferimento. Lo scopo è di legare la coppia di coordinate (x_p, y_p) alla coppia (x_p', y_p') e viceversa.



$$\begin{cases} x_p = x_p' \cos\theta - y_p' \sin\theta \\ y_p = x_p' \sin\theta + y_p' \cos\theta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p' \\ y_p' \end{pmatrix}$$

vettore colonna — matrice — vettore colonna

Introduciamo il simbolo $R(\theta)$ per indicare la matrice e il vettore colonna con il simbolo P. In forma compatta abbiamo:

$$P = R(\theta)\, P'$$

Per calcolare la matrice inversa $R(\theta)^{-1}$ deve essere tale per cui è vero

$$P' = R(\theta)^{-1} P$$

Infatti partendo dalla relazione $P = R(\theta) P'$ basta moltiplicare a sinistra ambo i membri per la matrice inversa $R(\theta)^{-1}$ ed otteniamo $P' = R(\theta)^{-1} P$:

$$P = R(\theta) P' \Rightarrow \quad R(\theta)^{-1} P = \underbrace{R(\theta)^{-1} R(\theta)}_{\mathbb{1}} P'$$

$$\Rightarrow \quad R(\theta)^{-1} P = \mathbb{1} P' \Rightarrow \quad R(\theta)^{-1} P = P'$$

Ci basta invertire il sistema di partenza:

$$\begin{cases} x_p' = \dfrac{x_p}{\cos\theta} + y_p' \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\[2ex] y_p = \dfrac{x_p}{\cos\theta} \sin\theta + y_p' \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + y_p' \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_p' = \dfrac{x_p}{\cos\theta} + y_p' \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\[2ex] y_p - \dfrac{x_p \sin\theta}{\cos\theta} = y_p' \dfrac{1}{\cos\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_p' = \dfrac{x_p}{\cos\theta} + y_p' \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\[2ex] y_p' = y_p \cos\theta - x_p \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_p' = \dfrac{x_p}{\cos\theta} + (y_p \cos\theta - x_p \sin\theta) \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\[2ex] y_p' = y_p \cos\theta - x_p \sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_p' = x_p \cos\theta + y_p \sin\theta \\[2ex] y_p' = - x_p \sin\theta + y_p \cos\theta \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_p' \\ y_p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \Rightarrow P' = R(\theta)^{-1} P$$

Quindi:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad R(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ovviamente basta provare che il loro prodotto è pari alla matrice unità:

$$R(\theta)\, R(\theta)^{-1} = R(\theta)^{-1} R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

N.B. Per l'individuazione della matrice inversa avremmo potuto anche osservare quanto segue:
Se il sistema $x'O'y'$ ruota di θ rispetto al sistema xOy è chiaro che il sistema xOy ruota di $-\theta$ rispetto a $x'O'y'$. Di conseguenza la matrice di rotazione inversa per un sistema è la matrice di rotazione diretta per l'altro sistema. Quindi basta sostituire $\theta \to -\theta$ ed avremmo ottenuto lo stesso risultato:

$$R(-\theta) = R^{-1}(\theta).$$

È facile notare che per la matrice di rotazione siamo in presenza di una <u>matrice ortogonale</u>.
Infatti:

$$R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T.$$

Dopo questa parentesi in cui è stato possibile calcolare l'inversa perché eravamo ancora a un problema di diretta applicazione, passiamo alla costruzione sistematica della matrice inversa.
Questa costruzione la si ottiene per induzione - Partiamo dal caso banale di una matrice (1x1) (punto di uno scalare):

(1x1) $\quad A = \{a\}_{i,j=1}^{1}$ poiché $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1} \Rightarrow A^{-1} = \left\{\frac{1}{a}\right\}_{i,j=1}^{1}$

ovviamente questo ha senso solo se $a \neq 0$

(2x2) $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; deve esistere una matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

per cui $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

quindi devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} a\alpha + b\gamma = 1 \\ c\beta + d\delta = 1 \\ a\beta + b\delta = 0 \\ c\alpha + d\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = -a/b\ \beta \\ \gamma = -c/d\ \alpha \\ a\alpha - \frac{bc}{d}\alpha = 1 \\ c\beta - \frac{da}{b}\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{+a}{ad-bc} \\ \gamma = \frac{-c}{ad-bc} \\ \alpha = \frac{+d}{ad-bc} \\ \beta = \frac{+b}{bc-ad} \end{cases}$$

ovviamente questo ha senso solo se $ad - bc \neq 0$

Introduciamo un nuovo oggetto connesso alla matrice (in questo caso (2x2)):

$$\boxed{ad - bc \doteq \det A \quad \text{DETERMINANTE DELLA MATRICE A (2x2)}}$$

Possiamo quindi riscrivere la matrice inversa di A come segue:

$$A = \{a\}_{i,j=1} \Rightarrow A^{-1} = \left\{\frac{1}{\det A}\right\}_{i,j=1} = \left\{\frac{1}{a}\right\}_{i,j=1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\det A} & \frac{-b}{\det A} \\ \frac{-c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

A questo punto non resta che passare ad una matrice (3x3) e ripercorrere in maniera analoga quanto sviluppato per una matrice (2x2) -
Impostare ora un sistema in 9 incognite e risolverlo

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ l & m & n & p \end{array} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \kappa \\ \eta & \lambda & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a\alpha + b\delta + c\eta = 1 \\ d\beta + e\varepsilon + f\lambda = 1 \\ g\gamma + h\kappa + l\mu = 1 \\ a\beta + b\varepsilon + c\lambda = 0 \\ a\gamma + b\kappa + c\mu = 0 \\ d\alpha + e\delta + f\eta = 0 \\ d\gamma + e\kappa + f\mu = 0 \\ g\alpha + h\delta + l\eta = 0 \\ g\beta + h\varepsilon + l\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\qquad}{\det A} \\ \beta = \frac{\qquad}{\det A} \\ \gamma = \frac{\qquad}{\det A} \\ \delta = \frac{\qquad}{\det A} \\ \varepsilon = \frac{\qquad}{\det A} \\ \kappa = \frac{\qquad}{\det A} \\ \eta = \frac{\qquad}{\det A} \\ \lambda = \frac{\qquad}{\det A} \\ \mu = \frac{\qquad}{\det A} \end{cases}$$

il sistema è risolubile se e solo se la grandezza $\boxed{a(el-fh)-b(dl-fg)+c(dh-eg)}$ deve essere diversa da zero.

è chiaro quindi che tale grandezza che deve essere necessariamente diversa da zero ~~prop~~ rappresenta il determinante per una matrice (3x3)

$$\boxed{a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg) \doteq \det A}$$

DETERMINANTE DELLA MATRICE 3x3

È chiaro che risolvere ora il problema per una matrice (4x4) complica il calcolo ma si troveranno formule che generalizzano i risultati fin qui ottenuti.

A questo punto possiamo introdurre il determinante per una generica matrice quadrata (nxn).

In generale abbiamo avuto fin qui

$$\det\{a_{11}\} = a_{11}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{14}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

e così via.

Possiamo generalizzare il calcolo del determinante.

Sia $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ una matrice quadrata $(n\times n)$.

Definiamo con il simbolo A_{ij} il determinante della sottomatrice ottenuta da A eliminando in quest'ultima la riga i-esima e la colonna j-esima. Evidentemente tale matrice risulta dell'ordine $(n-1)\times(n-1)$.

Dunque abbiamo per la matrice $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$

$$\boxed{\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} A_{1k}}$$

che rappresenta lo sviluppo del determinante rispetto alla prima riga.

Tale espressione contiene in sé le espressioni trovate in precedenza.

Tuttavia in generale è possibile sviluppare il determinante rispetto ad una riga qualsiasi oppure rispetto ad una qualsiasi colonna.

In formule abbiamo: