$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} A_{ik} \quad \text{sviluppo rispetto a } i\text{-esima riga}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj} \quad \text{sviluppo rispetto a } j\text{-esima colonna}$$

Abbiamo ora messo a posto i denominatori degli elementi della matrice inversa. Resta da riscrivere i numeratori degli elementi della matrice inversa. A tal fine introduciamo la matrice cofattore di $\underline{A}$:

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} A_{11} & \cdots & (-1)^{1+n} A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1} A_{n1} & \cdots & (-1)^{n+n} A_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{MATRICE COFATTORE DI } A$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A^{-1} = \frac{\operatorname{cof}(A)^T}{\det A}} \quad \left(\text{MATRICE INVERSA DI } A\right)$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1(3) - (-1)(2) = 5 \neq 0$$

$$\operatorname{cof}(A)_{11} = (-1)^{1+1} A_{11} = 3$$

$$\operatorname{cof}(A)_{12} = (-1)^{1+2} A_{12} = (-1)2 = -2$$

$$\operatorname{cof}(A)_{21} = (-1)^{2+1} A_{21} = (-1)(-1) = 1$$

$$\operatorname{cof}(A)_{22} = (-1)^{22} A_{22} = 1$$

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{cof}(A)^T}{\det A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo effettivamente che sia una matrice inversa:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5+2/5 & -3/5+3/5 \\ -2/5+2/5 & 2/5+3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{cases} 1(3-2)-(-1)(-1)+2(-3) = -6 \\ 0 \quad +3(1-2)-1(2-(-1)) = -6 \\ 1(-1-6)-2(1-0)+1(3) = -6 \end{cases}$$

(sviluppato lungo le tre righe)

$$\mathrm{cof}(A)_{11} = A_{11} = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathrm{cof}(A)_{12} = -A_{12} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathrm{cof}(A)_{13} = A_{13} = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

$$\mathrm{cof}(A)_{21} = -A_{21} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$\mathrm{cof}(A)_{22} = A_{22} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\mathrm{cof}(A)_{23} = -A_{23} = -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

$$\mathrm{cof}(A)_{31} = A_{31} = \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -7$$

$$\mathrm{cof}(A)_{32} = -A_{32} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\mathrm{cof}(A)_{33} = A_{33} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

PRINCIPALI PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

Poiché è possibile sviluppare il determinante lungo una riga o una colonna è chiaro che se in una matrice vi è una riga o una colonna nulla il determinante è nullo.

$$\boxed{\text{se} \quad A_{i_1}=0 \quad \text{o} \quad A^{j_1}=0 \iff \det A=0}$$

dove i_1 o j_1 sono un fissato valore.

Scambiando due righe o due colonne, il determinante cambia segno. Nel caso di matrici (2×2) è intuitivo. Da matrici (3×3) in poi è noto che in base alla definizione di determinante avremo strutture annidate con matrici di ordine inferiore fino a giungere a quelle (2×2).

$$\boxed{\text{se} \quad A_i \leftrightarrow A_k \ \text{oppure} \ A^i \longleftrightarrow A^k \implies \det A \to -\det A}$$

Se due righe (o due colonne) sono proporzionali allora il determinante è nullo.

Infatti nel caso (2×2) abbiamo:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} = \lambda ab-\lambda ab=0$$

$$\det\begin{pmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{pmatrix} = \lambda ab-\lambda ab=0$$

Anche in questo caso per matrici di ordine superiore avremmo strutture annidate di matrici (2×2) a determinanti nulli. Quindi in generale possiamo affermare

$$\boxed{\text{se } A_i = \lambda A_k \text{ oppure } A^J = \lambda A^K \iff \det A = 0}$$

Se una riga o una colonna è moltiplicata per uno scalare allora anche il determinante risulta moltiplicato dalla stessa quantità.
Per dimostrarlo basta sviluppare il determinante rispetto alla riga o colonna in questione.

$$\boxed{\text{se } A_i \to \lambda A_i \text{ oppure } A^J \to \lambda A^J \iff \det A \to \lambda \det A}$$

Effettuando un'operazione elementare del tipo
$A_i \to A_i + \lambda A_k$ oppure $A^J \to A^J + \lambda A^K$ la combinazione cioè sostituire ad una riga (o colonna) la combinazione tra la riga (o colonne) di partenza ed un'altra riga (o colonna) il determinante non cambia.

$$\boxed{\text{se } A_i \to A_i + \lambda A_k \text{ oppure } A^J \to A^J + \lambda A^K \iff \det A \to \det A}$$

Vediamo nel caso di due dimensioni:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+\lambda a & d+\lambda b \end{pmatrix} = a(d+\lambda b) - b(c+\lambda a) = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b+\lambda a \\ c & d+\lambda c \end{pmatrix} = a(d+\lambda c) - (b+\lambda a)c = ad - bc.$$

Il determinante non gode di nessuna proprietà nel caso di somma di matrici. In generale non è possibile ricavare nessuna relazione generale. Infatti l'operazione del determinante non è lineare. A tal riguardo notiamo quanto segue:

$$\det\begin{pmatrix} a & b+\beta \\ c & d+\gamma \end{pmatrix} = \det\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\right]$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \, ; \quad \det\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = 0$$

Calcoliamo il determinante nel caso iniziale

$$\det\begin{pmatrix} a & b+\beta \\ c & d+\gamma \end{pmatrix} = a(d+\gamma) - (b+\beta)c = (ad - bc) + (a\gamma - c\beta) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & \beta \\ c & \gamma \end{pmatrix}$$

quindi la regola con cui si è composto il determinante non rispecchia la regola della somma delle matrici.

Possiamo concludere:

$$\boxed{\det(A+B) \neq \det A + \det B}$$ SEMPRE

Nel caso della trasposta il determinante non deve cambiare. Infatti svolgere il determinante della matrice trasposta rispetto alle righe vuol dire svolgere il determinante della matrice di partenza rispetto alle colonne.

$$\boxed{\det A = \det(A^T)}$$

Nel caso della matrice unità si ha facilmente

$$\boxed{\det \mathbb{1} = 1}$$

Nel caso della matrice diagonale si ha

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

Resta da capire il determinante del prodotto riga per colonna.

Effettuiamo il calcolo nel caso (2×2)

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta\end{pmatrix} =$$

$$= (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) =$$

$$= \cancel{a\alpha c\beta} + \underline{a\alpha d\delta} + \underline{\underline{b\gamma c\beta}} + \cancel{b\gamma d\delta} - \cancel{a\beta c\alpha} - \underline{a\beta d\gamma} - \underline{\underline{b\delta c\alpha}} - \cancel{b\delta d\gamma}$$

$$= ad(\alpha\delta - \beta\gamma) - bc(\alpha\delta - \gamma\beta)$$

$$= (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

Quindi

$$\boxed{\det(AB) = \det A \det B}$$

(Bisognerebbe dimostrarlo per una dimensione generica)

Resta, infine, da calcolare il determinante della matrice inversa. Poiché abbiamo la relazione per il prodotto non resta che applicarlo per una matrice e la sua inversa:

$$AA^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det \mathbb{1}$$

$$\det A \, \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}}$$

RANGO DI UNA MATRICE

Nel riscrivere l'espressione per il determinante abbiamo introdotto il determinante A_{ij} della sottomatrice di A ottenuta dalla matrice A eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow A_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1j-1} & a_{1j+1} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{i-11} \; a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} \cdots a_{i-1n} \\ a_{i+11} \; a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} \cdots a_{i+1n} \\ \vdots & \\ a_{n1} \cdots & \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

i-esima colonna

j-esima colonna

$$\boxed{A_{ij} \text{ è detto } \underline{\text{minore}} \text{ di ordine } (n-1) \text{ della matrice } A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}}$$

Quindi possiamo associare alla matrice A non solo il suo determinante det A ma anche una serie di ulteriori determinanti connessi alle sottomatrici di A.

Nel caso di una matrice (n×n) esistono n^2 minori di ordine $(n-1)$ (cioè n^2 determinanti connessi a n^2 sottomatrici di $(n-1)$ righe e $(n-1)$ colonne) ma esistono anche $(n-1)^2$ minori di ordine $(n-2)$ e così via -

Esempio

$A = \{2\}$ non esiste nessun minore!! Ovvio!

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ quattro minori di ordine 1 $A_{11} = 1$; $A_{12} = 2$; $A_{21} = 3$; $A_{22} = 4$;

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ nove minori di ordine 2 $A_{11} = -3$; $A_{12} = -6$; $A_{13} = -3$; $A_{21} = -6$; $A_{22} = -12$; $A_{23} = -6$; $A_{31} = -3$; $A_{32} = -6$; $A_{33} = -3$;

Possiamo ora introdurre il concetto di rango di una matrice A:

$\boxed{\text{rank}(A) \doteq \rho}$ $\Leftrightarrow$ se ρ rappresenta l'ordine dei minori della matrice A per i quali esiste ed è diverso da zero almeno un minore di ordine ρ, mentre tutti i minori di ordine $(\rho+1)$ sono nulli.

Se la matrice A presenta $\det A \neq 0$ ed è composta da n righe e n colonne allora il rango di A vale n.

$$\boxed{\text{Se } \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow \text{rank} = n}$$

$$\text{Se } \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{allora} \quad \text{rank} \leq n-1$$

Il rango della matrice nulla è zero.

Il rango della matrice unità è pari a n.

Il rango di uno scalare è pari a 1.

Negli altri casi il calcolo del rango va condotto cercando se esiste almeno una sottomatrice di numero massimo di righe e colonne per cui il determinante è diverso da zero.

Due matrici che si ottengono l'una dall'altra applicando un numero finito di operazioni elementari hanno lo stesso rango.

Infatti il determinante delle due matrici rimane necessariamente diverso da zero (dipende dall'operazione elementare ma potrebbe al massimo cambiare di segno o risultare scalato da una costante).

Esempio

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Essendo (4×5) il rango può essere al massimo 4. Se fosse 4 allora deve esistere almeno un minore di ordine 4 diverso da zero.

Le possibili scelte sono in pratica solo 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{determinante è nullo}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{determinante è nullo}$$

Quindi il rango può essere al massimo tre.
Se tra le matrici di ordine (3×3) esiste almeno una con determinante $\neq 0$ allora il rango è tre (altrimenti bisogna scendere alle sottomatrici 2×2).

Consideriamo la matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det = 2(1)+1(1)+1(-1) = 2 \neq 0$$

Quindi il rango è 3.

> Se in una matrice $(n\times n)$ c'è una riga (o una colonna) che è una combinazione lineare di altre righe (o di altre colonne) il rango è al massimo pari a $(n-1)$.

Possiamo quindi affermare che il rango di una matrice è legato al massimo numero di righe e di colonne che sono linearmente indipendenti.

Infine nel caso della matrice trasposta e quella inversa il rango rimane lo stesso:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rank}(A) &= \mathrm{rank}(A^T) \\ \mathrm{rank}(A) &= \mathrm{rank}(A^{-1}) \end{aligned}}$$