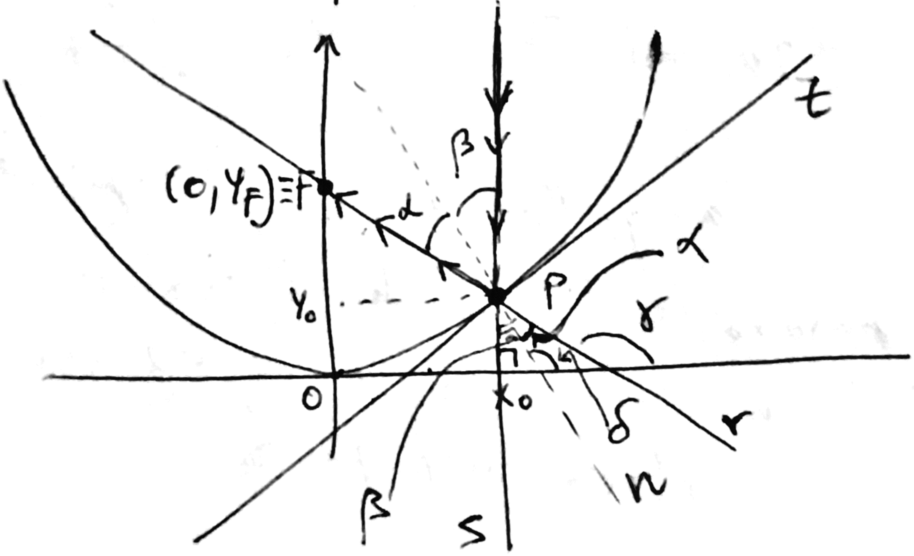
PROPRIETÀ "FISICA" DEL FUOCO

Consideriamo la parabola di equazione $y = ax^2$ con $a > 0$ e consideriamo un punto $P \equiv (x_0, y_0)$ appartenente alla parabola.



t: retta tangente alla parabola nel punto P.
n: retta perpendicolare alla retta t
r: retta passante per i punti P e F
s: retta verticale passante per il punto P.

Vogliamo dimostrare che $\alpha = \beta$.
Notiamo innanzitutto che $\delta = \beta + \pi/2$ e $\gamma = \delta + \alpha$ per il teorema dell'angolo esterno. Quindi:

$$\beta = \delta - \pi/2 \quad e \quad \alpha = \gamma - \delta.$$

Leghiamo gli angoli γ e δ ai coefficienti angolari delle rette r e n.

$$m_t = 2ax_0 \longrightarrow m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{2ax_0} \Rightarrow \boxed{tg\delta = -\frac{1}{2ax_0}}$$

$$m_r = \frac{y_0 - y_F}{x_0} = \frac{ax_0^2 - \frac{1}{4a}}{x_0} = \frac{4a^2x_0^2 - 1}{4ax_0} \Rightarrow \boxed{tg\gamma = \frac{4a^2x_0^2-1}{4ax_0}}$$

Calcoliamo il valore della tangente di α e β:

$$tg\alpha = tg(\gamma - \delta) = \frac{tg\gamma - tg\delta}{1 + tg\gamma\, tg\delta} = \frac{\frac{4a^2x_0^2-1}{4ax_0} + \frac{1}{2ax_0}}{1 - \frac{4a^2x_0^2-1}{4ax_0}\frac{1}{2ax_0}} =$$

$$= \frac{4a^2x_0^2 - 1 + 2}{8a^2x_0^2 - 4a^2x_0^2 + 1} \frac{\cancel{8a^2x_0^2}\,2}{\cancel{4ax_0}} = \frac{\cancel{4a^2x_0^2+1}}{\cancel{4a^2x_0^2+1}}(2ax_0) = 2ax_0$$

$$\boxed{tg\,\alpha = 2ax_0}$$

$$tg\,\beta = tg(\delta - \pi/2) = \frac{\sin(\delta - \pi/2)}{\cos(\delta - \pi/2)} = -\frac{\sin(\pi/2 - \delta)}{\cos(\pi/2 - \delta)} = -\frac{\cos\delta}{\sin\delta}$$

$$= -\frac{1}{tg\,\delta} = -\frac{1}{-1/2ax_0} = 2ax_0$$

$$\boxed{tg\,\beta = 2ax_0} \implies tg\,\alpha = tg\,\beta \implies \boxed{\alpha = \beta}$$

Chiaramente il valore dell'angolo α ($\in \beta$) dipende dalla curvatura della parabola (tramite il parametro a) e dal punto in cui si considera la relazione, ma indipendentemente dal valore del punto x_0 si otterrà sempre la relazione $\alpha = \beta$.
Possiamo quindi affermare che il luogo geometrico della parabola soddisfa una relazione simile alla legge della riflessione. Il vantaggio in questo caso che ogni "raggio" parallelo all'asse y incidente sulla curva parabola in un dato punto di ascissa x_0 "viene riflesso" ~~sempre~~ in direzione di uno stesso punto (il ~~fuoco~~ fuoco).