SISTEMI LINEARI

Si definisce in generale <u>sistema lineare</u> di <u>m equazioni</u> in <u>n incognite</u> il seguente sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \text{con } m \neq n$$

dove $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sono le incognite, $(b_1, \dots, b_m)$ sono i termini noti e a_{ij} i coefficienti numerici.

Risolvere tale sistema vuol dire calcolare le n-ple ordinate di valori $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ che soddisfano il sistema lineare.

Utilizzando la notazione matriciale ed introducendo i vettori colonna e la matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \doteq A \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \doteq x \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \doteq b$$

matrice dei coefficienti — vettore incognito — vettore termine noto

(anche detta <u>matrice incompleta</u>)

il sistema lineare può essere riscritto come segue

$$\boxed{Ax = b}$$

SISTEMA LINEARE

Accanto alla matrice dei coefficienti A si introduce una seconda matrice (detta completa) così definita

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

MATRICE COMPLETA

A è una matrice $(m \times n)$, A' è una matrice $(m \times (n+1))$, mentre x e b sono vettori colonna di dimensione rispettivamente n ed m.

Si definisce sistema lineare omogeneo un sistema lineare in cui il vettore colonna termine noto è pari a zero:

$$\boxed{Ax = 0}$$

SISTEMA LINEARE OMOGENEO

Iniziamo a capire quante soluzioni ammette un sistema lineare. Ovviamente può ammettere nessuna soluzione (e per questo diremo che il sistema è impossibile).

Supponiamo che presenti due soluzioni diverse fra loro. Siano x_I e x_{II} le soluzioni. Dunque deve essere vero che

$$A x_I = b \quad e \quad A x_{II} = b$$

ma anche che

$$A x_I - A x_{II} = b - b = 0 \Rightarrow A(x_I - x_{II}) = 0$$

$x_I - x_{II}$ è soluzione del sistema lineare omogeneo.

Se le soluzioni fossero due allora la loro differenza deve essere soluzione del sistema omogeneo.

Costruiamo ora una "nuova possibile soluzione" come combinazione lineare di una delle due di partenza e dell'omogenea associata. Sia λ il coefficiente di proporzionalità arbitrario:

$$x_g = x_I + \lambda (x_I - x_{II})$$

valutiamo $A x_g$:

$$A x_g = A\left(x_I + \lambda(x_I - x_{II})\right) = A x_I + \lambda A(x_I - x_{II}) = A x_I + \lambda 0 =$$

$$= A x_I = b \Rightarrow A x_g = b$$

Anche x_g è soluzione per qualsiasi valore di λ.

Dunque le soluzioni sono infinite.

> Possiamo concludere affermando che ~~un~~ sistema lineare $Ax = b$ può avere nessuna, una oppure infinite soluzioni.

Bisogna ora capire come poter individuare le condizioni aritmetiche per la ricerca della soluzione.

A tal fine consideriamo il caso più semplice possibile - un sistema lineare di sole due equazioni in sole due incognite

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = b_1 \\ \gamma x + \delta y = b_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\underset{\sim}{x} = b}$$

Chiaramente se il determinante dei coefficienti è diverso da zero $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ la soluzione può essere individuata immediatamente una volta nota la matrice inversa dei coefficienti -

$$A^{-1} A \underset{\sim}{x} = A^{-1} b \qquad \mathbb{1}\underset{\sim}{x} = A^{-1} b \qquad \underset{\sim}{x} = A^{-1} b$$

oppure

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{cof}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^T}{\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} b_1\delta - \beta b_2 \\ \alpha b_2 - \gamma b_1 \end{pmatrix}}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

infine

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1\delta - \beta b_2}{\alpha\delta - \beta\gamma} \\[2ex] y = \dfrac{\alpha b_2 - \gamma b_1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \end{cases}$$

le soluzioni trovate sono le stesse che si ottengono con il metodo della sostituzione (per esempio). Infatti:

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1-\beta y}{\alpha} \\ \gamma \dfrac{b_1-\beta y}{\alpha} + \delta y = b_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{b_1-\beta y}{\alpha} \\ y(\delta - \gamma\beta/\alpha) = b_2 - \dfrac{\gamma b_1}{\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1-\beta y}{\alpha} \\ y = \dfrac{\alpha b_2-\gamma b_1}{\alpha\delta-\beta\gamma} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{b_1}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{\alpha b_2-\gamma b_1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\right) = \dfrac{b_1\delta-\beta b_2}{\alpha\delta-\beta\gamma} \\ y = \dfrac{\alpha b_2-\gamma b_1}{\alpha\delta-\beta\gamma} \end{cases}$$

Quindi il metodo matriciale è compatibile con la tecnica della sostituzione.

Se avessimo avuto un sistema di tre equazioni in tre incognite la soluzione si sarebbe sempre scritta come $A^{-1}b$ (ovviamente ove A è una matrice 3×3 e b ha tre componenti).

Per concludere notiamo che le soluzioni trovate presentano una struttura nei le quali rapporti di determinanti: Ricapitolando abbiamo

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1\delta-\beta b_2}{\alpha\delta-\beta\gamma} = \dfrac{\det\begin{pmatrix} b_1 & \beta \\ b_2 & \delta \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}; \\ y = \dfrac{\alpha b_2-\gamma b_1}{\alpha\delta-\beta\gamma} = \dfrac{\det\begin{pmatrix} \alpha & b_1 \\ \gamma & b_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}; \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Lo step successivo è un sistema ~~3x~~ di tre equazioni in tre incognite che risolto con il metodo della sostituzione porta alla soluzione formale del seguente tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det A} \\ x_2 = \dfrac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}}{\det A} \\ x_3 = \dfrac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{\det A} \end{cases}$$

ovviamente sempre se $\det A \neq 0$

Per induzione possiamo scrivere la soluzione generale del problema ad n equazioni in n incognite. Quindi la soluzione del problema generale quando $\boxed{m = n}$ è che esiste sempre una ed una sola soluzione ammesso che il determinante della matrice incompleta sia diverso da zero. Tale soluzione è un vettore colonna ottenuto dal prodotto riga per colonna fra l'inverso della matrice incompleta ed il vettore colonna termine noto. In formule, quindi, otteniamo:

$$\boxed{Ax = b \iff \exists!\, x = A^{-1}b \quad \text{se } m=n,\ \det A \neq 0}$$

~~$Ax = b$, $m=n$~~

Resta da valutare il caso in cui $m \neq n$.
Per questo introduciamo il <u>TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI</u>

> Il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione se e soltanto se $rank(A) = rank(A')$

Valutando le due matrici (completa e incompleta) si riscontra che i ranghi sono diversi; il sistema non ammette nessuna soluzione. Deduciamo quindi che il sistema è impossibile.
Nel caso in cui i ranghi sono uguali allora il sistema ammette una oppure infinite soluzioni. In particolare:

se $rank(A) = rank(A') = n$ $\quad \exists!$ soluzione. (a)

se $rank(A) = rank(A') < n$ $\quad \exists$ infinite soluzioni (b)

Il caso (a) rientra nella situazione vista in precedenza (n incognite in n equazioni e $\det A \neq 0$)
Il caso (b) è quando abbiamo più incognite rispetto al numero di equazioni, di conseguenza esistono più soluzioni in quanto qualche incognita va considerata come un parametro. In tal caso il numero di soluzione è $\infty^{n-rank(A)}$.
Se $n - rank(A) = 1$ avremo un parametro, $n - rank(A) = 2$ avremo due parametri, ecc...