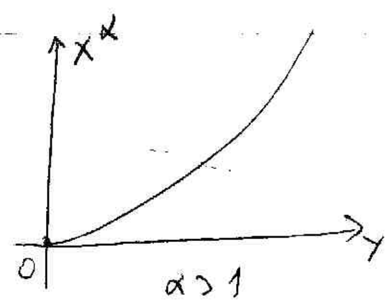
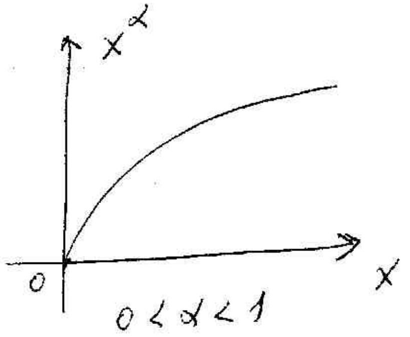
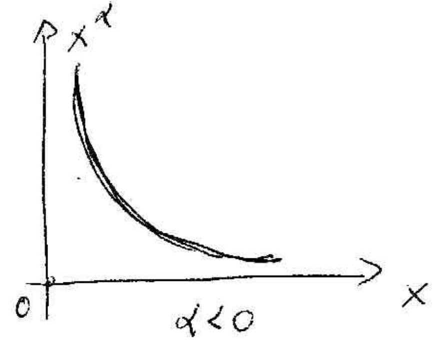
La funzione potenza con esponente α è strettamente crescente se $\alpha > 0$ e strettamente decrescente se $\alpha < 0$. Infatti i grafici sono

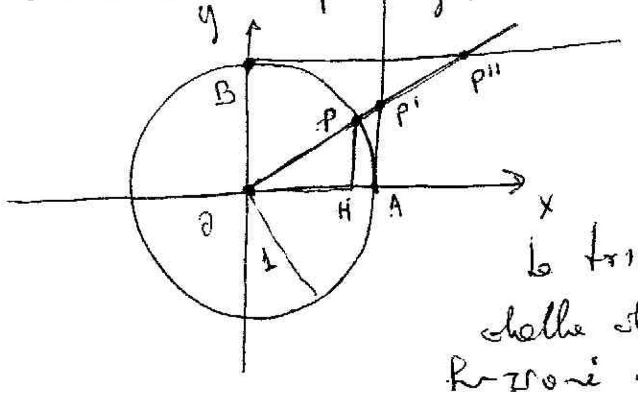






TRIGONOMETRIA

Sia una circonferenza di raggio unitario $x^2+y^2=1$



$\widehat{AP} \doteq x$

$\overline{OH} = \cos x$

$\overline{PH} \doteq \sin x$

La trigonometria nasce dalla definizione di due funzioni dell'arco

Ovviamente, poiché $\cos x$ e $\sin x$ sono le componenti del punto P che appartiene alla circonferenza, deve essere sempre verificata la seguente proprietà:

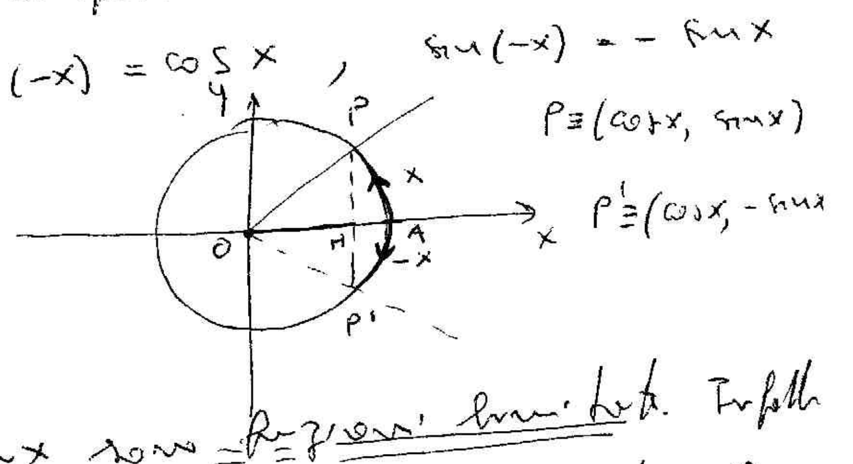
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$ (PROPRIETÀ FONDAMENTALE TRIGONOMETRICA)

quindi $\cos x$ e $\sin x$ non sono indipendenti fra loro ma nota una delle due si può ricavare l'altra

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}\ , \quad \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

Dalla loro definizione geometrica si nota che il coseno è una funzione pari, mentre il seno è dispari:

$$\cos(-x) = \cos x\ , \quad \sin(-x) = -\sin x$$



$\cos x$ e $\sin x$ sono funzioni limitate. Infatti

$$|\cos x| \le 1\ , \quad |\sin x| \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

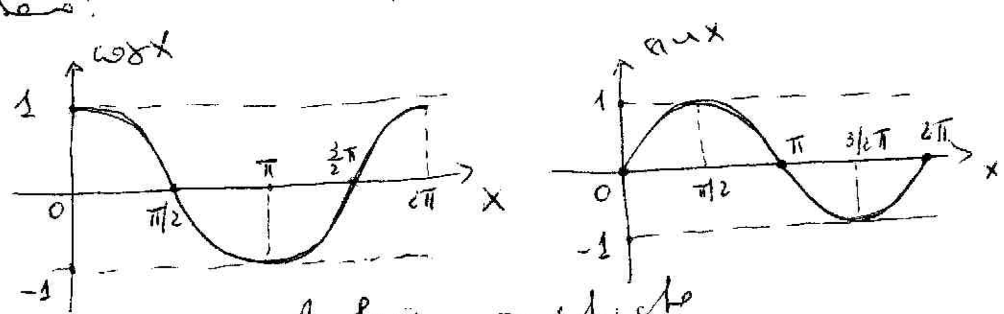
$\cos x$ e $\sin x$ sono funzioni periodiche. Infatti il punto P può "ruotare" sulla circonferenza in maniera indefinita. Quindi ogni giro completo $\sin x$ e $\cos x$ devono assumere gli stessi valori, ovvero ogni numero di volte (intero) di giri completi.

$$\cos(x + k2\pi) = \cos x \, , \quad \sin(x + k2\pi) = \sin x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \, , \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

N.B. Il giro completo nella circonferenza è 2π poiché il raggio è 1.

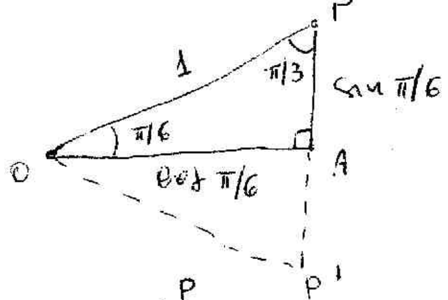
Essendo periodiche le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ basta analizzarle nell'intervallo $[0, 2\pi]$. I grafici sono:



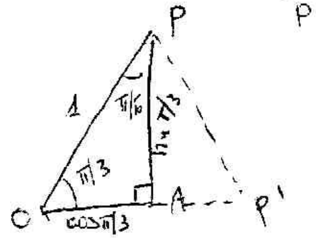
Possiamo concludere quindi che

$$\begin{cases} \cos x \\ \sin x \end{cases} : \forall x \in \mathbb{R} \to [-1,1] \subset \mathbb{R}$$

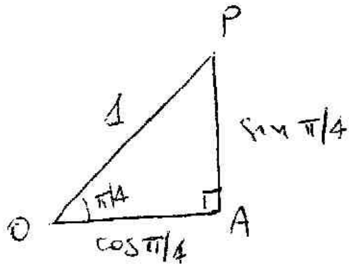
Per valori di $x = \{0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2\}$ è possibile calcolare immediatamente i corrispondenti valori di $\cos x$ e $\sin x$.



$$\sin \pi/6 = 1/2$$
$$\cos^2 \pi/6 + \sin^2 \pi/6 = 1$$
$$\cos \pi/6 = \pm \sqrt{1 - (1/2)^2}$$
$$\cos \pi/6 = \pm \sqrt{3}/2$$



$$\cos \pi/3 = 1/2$$
$$\cos^2 \pi/3 + \sin^2 \pi/3 = 1$$
$$\sin \pi/3 = \pm \sqrt{3}/2$$



$$\cos \pi/4 = \sin \pi/4$$
$$\cos^2 \pi/4 + \sin^2 \pi/4 = 1$$
$$\cos \pi/4 = \sin \pi/4 = \pm \sqrt{2}/2$$

Considerando i triangoli OPH e OP'A (che sono simili) possiamo stimare il segmento $\overline{AP'}$. Infatti

$$\overline{OH} : \overline{OA} = \overline{PH} : \overline{AP'} \iff \overline{AP'} = \frac{\overline{PH} \cdot \overline{OA}}{\overline{OH}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\overline{AP'}$ è detto tangente dell'arco x

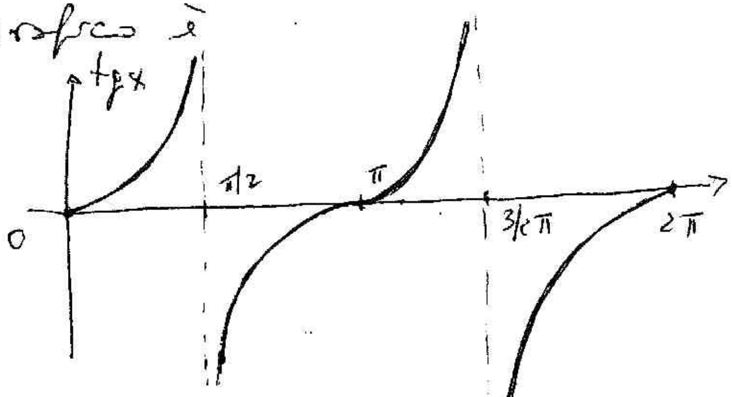
$$tg\, x \doteq \frac{\sin x}{\cos x}$$

ovviamente quanto introdotto ha senso se $\cos x \neq 0$ quindi $x \neq \pi/2$. Si calcolano, quindi, i valori della funzione tangente per gli angoli fondamentali: $tg\, 0 = 0$; $tg\, \pi/6 = \sqrt{3}/3$; $tg\, \pi/4 = 1$;

tg π/6 = √3 ; tg π/2 non esiste. Notiamo che la funzione tg x non è limitata ed assume valori maggiori di uno. In particolare per valori $x \in [0, \pi/2)$, $tg\, x \in [0, +\infty)$. La periodicità della funzione tg x è diversa da quella delle funzioni cos x e sin x. Infatti nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la funzione tg x assume per ben due volte gli stessi valori. Si conclude che il periodo è pari a π.

$$tg(x + n\pi) = tg\, x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

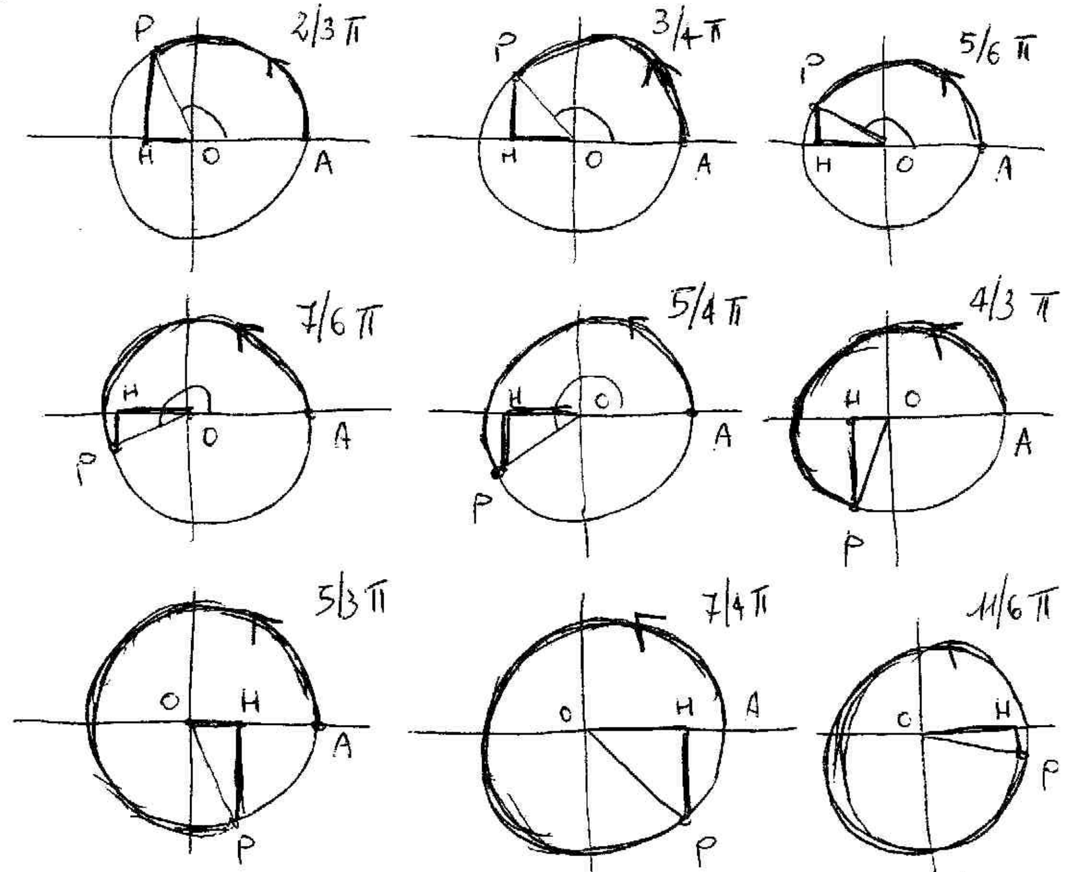
Il grafico è



La funzione tg x è dispari. Infatti

$$tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tg\, x$$

Avendo valutato i valori delle funzioni sin x, cos x, tg x nel primo quadrante, possiamo passare agli altri quadranti. Infatti



Ragionando sui triangoli simili ottenuti rispetto a quello nel primo quadrante si ottengono i seguenti valori:

x	cos x	sin x	tg x
0	1	0	0
π/6	√3/2	1/2	√3/3
π/4	√2/2	√2/2	1
π/3	1/2	√3/2	√3
π/2	0	1	/

x	cos x	sin x	tg x
2/3 π			
3/4 π			
5/6 π			
π	-1	0	0

x	$\cos x$	$\sin x$	$\text{tg}\, x$
$7/6\,\pi$			$\sqrt{3}/3$
$5/4\,\pi$			1
$4/3\,\pi$			$\sqrt{3}$
$3/2\,\pi$	0	-1	—

x	$\cos x$	$\sin x$	$\text{tg}\, x$
$5/3\,\pi$			
$7/4\,\pi$			
$11/6\,\pi$			
2π	1	0	0

Altra funzione trigonometrica importante è la cosiddetta cotangente: cotg x. Il segmento corrispondente alla cotg x è $\overline{BP''}$:

$$\overline{BP''} \doteq \text{cotg}\, x$$

Dai triangoli OPH e OBP'' abbiamo:

$$\overline{OH} : \overline{BP''} = \overline{PH} : \overline{OB}$$

$$\overline{BP''} = \frac{\overline{OH} \cdot \overline{OB}}{\overline{PH}} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Quindi

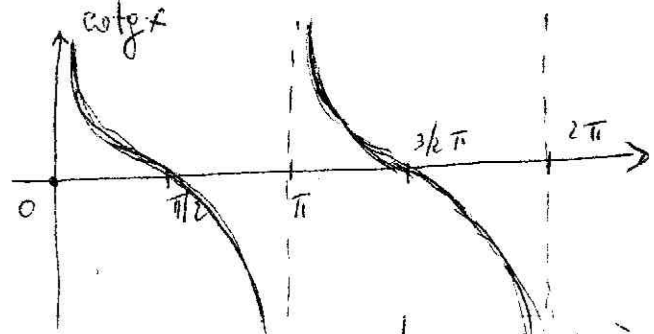
$$\text{cotg}\, x \doteq \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\text{tg}\, x}$$

Come per la funzione tg x anche la cotg x è periodica di $k\pi$ ed è dispari:

$$\text{cotg}\,(x + k\pi) = \text{cotg}\, x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{cotg}\,(-x) = \frac{1}{\text{tg}\,(-x)} = -\frac{1}{\text{tg}\, x} = -\text{cotg}\, x$$

Il grafico della funzione cotg x è:



Notiamo che il segmento $\overline{OP'}$ può essere valutato in questo modo

$$\overline{OP'} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AP'}^2} = \sqrt{1 + \text{tg}^2 x} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x}$$

mentre il segmento $\overline{OP''}$ in maniera analoga:

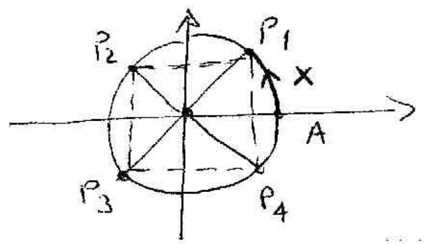
$$\overline{OP''} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BP''}^2} = \sqrt{1 + \text{cotg}^2 x} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sin x}$$

Il segmento $\overline{OP'}$ è detto funzione secante di x, mentre $\overline{OP''}$ è detta funzione cosecante di x:

$$\sec x \doteq \frac{1}{\cos x}, \quad \text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$$

Molto utile in diversi casi è considerare gli <u>archi associati</u>

$$\widehat{AP_1} = x$$
$$\widehat{AP_2} = \pi - x$$
$$\widehat{AP_3} = \pi + x$$
$$\widehat{AP_4} = 2\pi - x = -x$$



ARCHI SUPPLEMENTARI: x, $\pi - x$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$
$$tg(\pi - x) = -tg\, x$$
$$cotg(\pi - x) = -cotg\, x$$

ARCHI CHE DIFFERISCONO DI π: x, $x + \pi$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$
$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$
$$tg(x + \pi) = tg\, x$$
$$cotg(x + \pi) = cotg\, x$$

ARCHI ESPLEMENTARI (OPPOSTI): $2\pi - x$, x (oppure $x, -x$)

$$\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(2\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$$
$$tg(2\pi - x) = tg(-x) = -tg\, x$$
$$cotg(2\pi - x) = cotg(-x) = -cotg\, x$$

ARCHI COMPLEMENTARI: x e $\pi/2 - x$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$$
$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$$
$$tg(\pi/2 - x) = cotg\, x$$
$$cotg(\pi/2 - x) = tg\, x$$

ARCHI CHE DIFFERISCONO DI $\pi/2$: x e $\pi/2 + x$

$$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$$
$$\sin(\pi/2 + x) = \cos x$$
$$tg(\pi/2 + x) = -cotg\, x$$
$$cotg(\pi/2 + x) = -tg\, x$$

Dalla relazione fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ in termini di $tg\, x$ otteniamo:

$$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

da cui

$$tg\, x = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$$

$$tg\, x = \pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

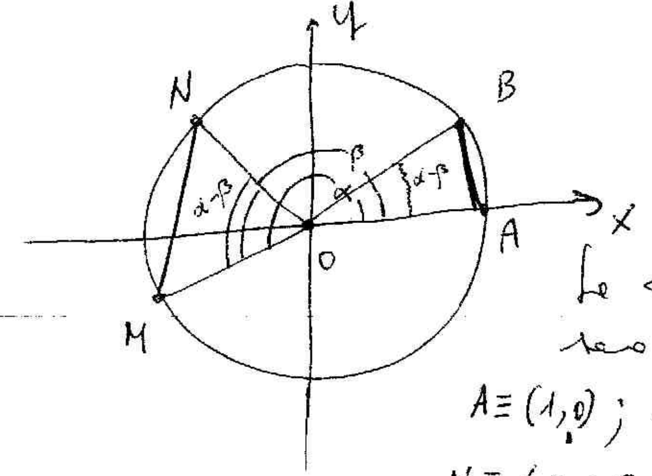
ed invertendo otteniamo:

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 x}}$$

$$\sin x = \pm \frac{tg\, x}{\sqrt{1 + tg^2 x}}$$

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Sia $\widehat{AM} = \alpha$ e $\widehat{AN} = \beta$ due archi qualunque e sia $\overline{MN}$ la corda sottesa dell'arco $\widehat{MN} = \alpha - \beta$.



$\overline{AB} = \overline{MN}$ per costruzione

Le coordinate dei punti sono:

$A \equiv (1,0)$; $B \equiv (\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$

$N \equiv (\cos\beta, \sin\beta)$; $M \equiv (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$$\overline{AB} = \overline{MN} \iff \sqrt{[1-\cos(\alpha-\beta)]^2 + [0-\sin(\alpha-\beta)]^2} =$$
$$= \sqrt{[\cos\beta - \cos\alpha]^2 + [\sin\alpha - \sin\beta]^2}$$

$$(1-\cos(\alpha-\beta))^2 + \sin^2(\alpha-\beta) = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

dopo qualche passaggio si ottiene

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

formula di sottrazione per il coseno.
Ora sostituendo $\beta \to -\beta$ otteniamo la formula per l'addizione del coseno:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Per quelle relative al seno basta ricordarsi le proprietà degli archi complementari. Quindi sostituiamo $\alpha \to \pi/2 - \alpha$

$$\cos(\pi/2 - \alpha - \beta) = \cos(\pi/2-\alpha)\cos\beta + \sin(\pi/2-\alpha)\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

infine sostituendo $\beta \to -\beta$ otteniamo

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

In conclusione otteniamo

(FORMULE ADDIZIONE SOTTRAZIONE)

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

Volendo calcolare per la $\mathrm{tg}\, x$, basta applicare la definizione:

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

Le formule ottenute sono valide nell'ipotesi che $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $\beta \neq \pi/2 + k\pi$, $\alpha+\beta \neq \pi/2 + k\pi$ e $\alpha-\beta \neq \pi/2 + k\pi$, poiché la funzione tangente non è definita.

FORMULE DUPLICAZIONE

Siamo interessati a valutare le funzioni trigonometriche per angoli del tipo 2α.
Infatti se $\beta = \alpha$, abbiamo:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \begin{cases} 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha \sin\alpha$$

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Anche in questo caso per le funzioni tangenti vi sono delle restrizioni, ed:

$$\alpha \neq \pi/4 + k\pi/2 \; ; \; \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \; \alpha \neq \pi/4 + k\pi/2.$$

FORMULE PARAMETRICHE

Spesso è utile esprimere in altro modo le formule di duplicazione del seno e del coseno.
Ponendo $\alpha/2$, troviamo:

$$\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

da cui

$$\sin\alpha = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

dividendo per $\cos^2\alpha/2$ $\quad (\alpha \neq \pi + k2\pi)$

si ottiene:

$$\sin\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha/2}{1 + tg^2\alpha/2}, \quad \cos\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha/2}{1 + tg^2\alpha/2}$$

definendo $t \doteq tg\,\alpha/2$ si ha

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \left(\text{FORMULE PARAMETRICHE}\right)$$

Tali relazioni sono dette ~~formule~~ *formule parametriche* ed esprimono il seno ed il coseno di un arco in funzione razionale della tangente dell'arco metà. Esse sono valide $\forall\, \alpha \neq \pi + k2\pi$.

FORMULE DI BISEZIONE

Poiché $\cos 2\alpha = \begin{cases} 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$, sostituendo

$\alpha \to \alpha/2$ abbiamo:

$$\cos\alpha = \begin{cases} 1 - 2\sin^2\alpha/2 \\ 2\cos^2\alpha/2 - 1 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \sin\alpha/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\alpha/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \end{cases} \quad \left(\text{FORMULE BISEZIONE}\right)$$

e per la tangente

$$tg\,\alpha/2 = \frac{\sin \alpha/2}{\cos \alpha/2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

se $\alpha \neq \pi + n2\pi$.

FORMULE DI PROSTAFERESI

Sono utili a trasformare in prodotti le somme o le differenze di funzioni trigonometriche. Dalle formule di addizione e sottrazione otteniamo

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

da cui

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

Poniamo

$$\begin{cases}\alpha+\beta = p \\ \alpha-\beta = q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = \frac{p+q}{2} \\ \beta = \frac{p-q}{2}\end{cases}$$

otteniamo:

$$\begin{cases}\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{cases}$$

ripetendo lo stesso discorso per il coseno si ottiene:

$$\begin{cases}\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{cases}$$

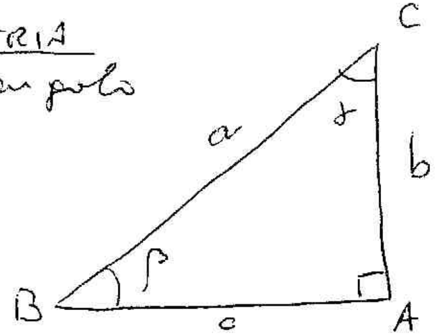
FORMULE DI WERNER

Rappresentano la versione inversa di quelle di prostaferesi. Infatti ripetendo un discorso analogo si ottiene:

$$\begin{cases}\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} \\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}\end{cases}$$

APPLICAZIONE TRIGONOMETRIA

Sia un triangolo rettangolo



$b = a\sin\beta = a\cos\gamma$

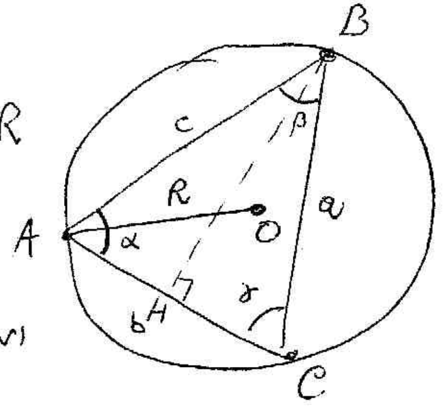
$c = a\cos\beta = a\sin\gamma$

$b = c\,tg\,\beta = c\,cotg\,\gamma$

$tg\,\beta = \frac{b}{c}$

Sia ora un generico triangolo inscritto in una circonferenza di raggio R

TEOREMA DEI SENI



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

TEOREMA DELLE PROIEZIONI

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$
$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

TEOREMA DEL COSENO (o DI CARNOT)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

ALTRE RELAZIONI

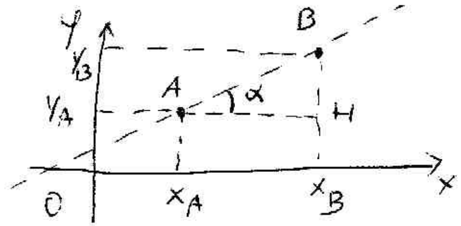
$$S \text{ (superficie triangolo)} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BH} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(FORMULA DI ERONE)}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

⌈ PARENTESI PROPRIETÀ RETTA in $\mathbb{R}^2$

Come è stato introdotto in precedenza per lo studio della retta il coefficiente angolare della retta passante per due punti $A \equiv (x_A, y_A)$, $B \equiv (x_B, y_B)$ è stato che



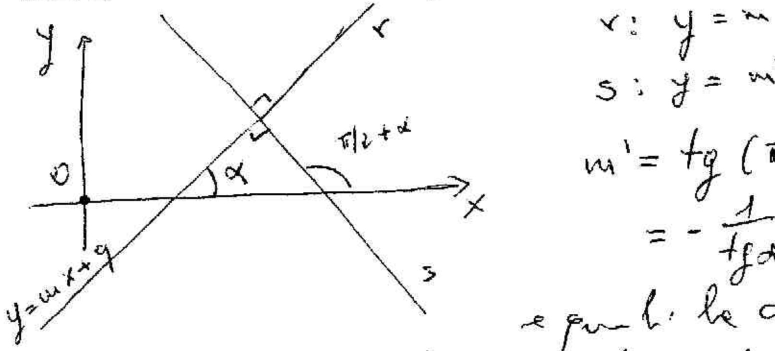
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

che corrisponde nel triangolo ABH alla tangente dell'angolo α;

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = tg\,\alpha$$

che chiarisce la motivazione dell'appellativo angolare per m.

È possibile, in maniera semplice, dimostrare la condizione di ortogonalità tra due rette. Infatti data una retta $y = mx + q$ notiamo:



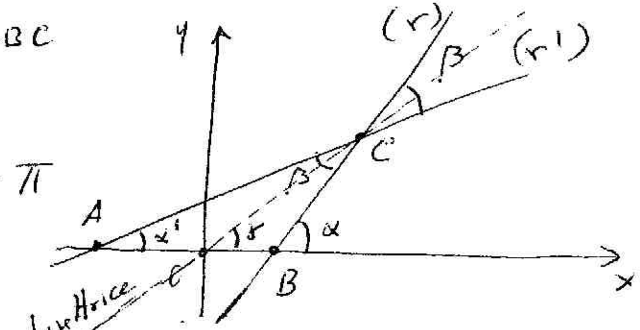
$$r: y = mx + q$$
$$s: y = m'x + q'$$
$$m' = tg(\pi/2 + \alpha) = -\cot g\,\alpha = -\frac{1}{tg\,\alpha} = -\frac{1}{m}$$

e quindi la condizione $m'm = -1$

Calcoliamo ora l'angolo tra due rette date in termini dei coefficienti angolari:

$$(r')\; y = m'x + q' \quad e \quad y = mx + q \quad (r)$$

Nel triangolo ABC si ha



$$\alpha' + (\pi-\alpha) + \beta = \pi$$

$$\beta = \alpha - \alpha'$$

$$tg\,\beta = tg\,(\alpha-\alpha') = \frac{tg\,\alpha - tg\,\alpha'}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\alpha'}$$

che in termini di coefficienti angolari

$$tg\,\beta = \frac{m-m'}{1+mm'}$$

Calcoliamo il coefficiente angolare della retta bisettrice. Sia γ l'angolo che la bisettrice forma con l'asse x.

Nel triangolo OCB si ha

$$\gamma + (\pi-\alpha) + \frac{\beta}{2} = \pi$$

$$\gamma + \cancel{\pi} - \alpha + \frac{\alpha-\alpha'}{2} = \cancel{\pi} \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha+\alpha'}{2}$$

$$tg\,\gamma = tg\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right) \Rightarrow m_\gamma = tg\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)$$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$\forall x \in \mathbb{R}$ si introducono due funzioni della variabile reale x dette funzioni iperboliche

$$\cosh x \doteq \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \sinh x \doteq \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

dette rispettivamente coseno iperbolico di x e seno iperbolico di x. Come nel caso della trigonometria si introduce la funzione rapporto tra seno iperbolico e coseno iperbolico detta tangente iperbolica,

$$tgh\,x \doteq \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

La proprietà fondante delle funzioni iperboliche è

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(è proprio ciò che succede per la trigonometria ma vi è il + mentre la differenza di quadrati ricorda l'equazione dell'iperbole)

Si verificano facilmente le proprietà:

$\sinh(-x) = -\sinh x$ (funzione dispari)

$\cosh(-x) = \cosh x$ (funzione pari)

$tgh(-x) = -tgh\,x$ (funzione dispari)

$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

Gli andamenti delle funzioni iperboliche sono