Calcoliamo il prodotto scalare di $\vec{a}$ con i versori $\hat{i}$ e $\hat{j}$:

$$\vec{a} \cdot \hat{i} = a_x(1) + a_y(0) = a_x$$
$$\vec{a} \cdot \hat{j} = a_x(0) + a_y(1) = a_y$$

a_x e a_y sono le proiezioni di $\vec{a}$ lungo gli assi x (o lungo il versore $\hat{i}$) e y (o lungo il versore $\hat{j}$) e si ottengono semplicemente come prodotto scalare, rispettivamente, con il versore $\hat{i}$ e $\hat{j}$.

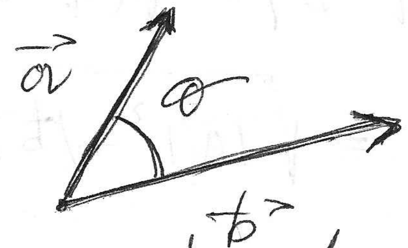
Quindi il prodotto scalare "<u>misura</u>" quanto di un vettore è lungo una particolare direzione (individuata dal versore)

Infatti se $\vec{a}$ è un vettore lungo l'asse x $(\vec{a} = (a_x, 0))$ $\vec{a} \cdot \hat{j} = 0$ (il vettore non ha componenti lungo l'asse y, individuato dal versore $\hat{j}$).

A questo punto è ovvio e scontato notare che $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ ($\hat{i}$ e $\hat{j}$ sono per costruzione perpendicolari).

Si dimostra che il prodotto scalare $\vec{a}\cdot\vec{b}$ può essere espresso anche in funzione dell'angolo compreso tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. In particolare

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad (\square)$$



Da questa formula, ovviamente, si vede che se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono perpendicolari ($\theta = \pi/2$) allora $\cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

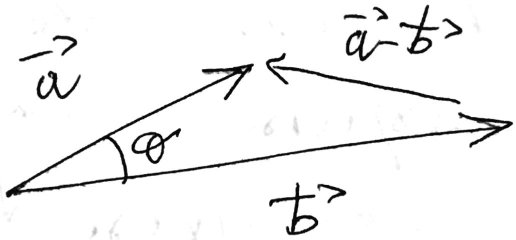
La dimostrazione prevede qualche lungo e laborioso calcolo con uso di funzioni trigonometriche ma come tutto in fisica e matematica si dimostra!!

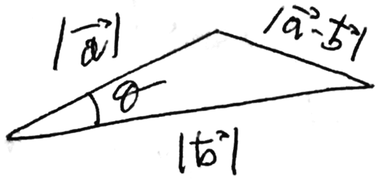
Dalla ($\square$) si ottiene immediatamente l'espressione dell'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \theta = \arccos\left[\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right]$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI CARNOT

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ costruiamo il modulo del vettore $\vec{a}-\vec{b}$:





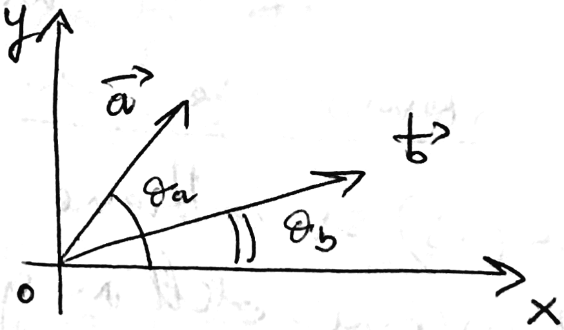
$$|\vec a-\vec b| = \sqrt{(\vec a-\vec b)\cdot(\vec a-\vec b)} = \sqrt{\vec a\cdot\vec a+\vec b\cdot\vec b-2\vec a\cdot\vec b} =$$

$$= \sqrt{|\vec a|^2+|\vec b|^2-2|\vec a||\vec b|\cos\theta}$$

c.v.d.

Dimostriamo la relazione (□). Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano bidimensionale consideriamo due generici vettori $\vec a=(a_x,a_y)$ e $\vec b=(b_x,b_y)$ che formano, rispettivamente, con l'asse x l'angolo θ_a e θ_b.

L'angolo compreso tra i due vettori sarà θ e vale $\theta_a-\theta_b$.



Valutiamo la grandezza $\cos\theta=\cos(\theta_a-\theta_b)$. Dalla formula della sottrazione del coseno si ha

$$\cos\theta=\cos(\theta_a-\theta_b)=\cos\theta_a\cos\theta_b+\sin\theta_a\sin\theta_b$$

che può essere riscritta in termini dei moduli di $\vec a$, $\vec b$ e delle loro componenti

$$\cos\theta_a=\frac{a_x}{|\vec a|},\quad \cos\theta_b=\frac{b_x}{|\vec b|},\quad \sin\theta_a=\frac{a_y}{|\vec a|},\quad \sin\theta_b=\frac{b_y}{|\vec b|}$$

Quindi

$$\cos\theta = \frac{a_x}{|\vec{a}|}\frac{b_x}{|\vec{b}|} + \frac{a_y}{|\vec{a}|}\frac{b_y}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

da cui si ottiene $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y$

C.V.D.

PRODOTTO VETTORIALE

Lo scopo di tale operazione è di individuare un vettore perpendicolare a ~~due~~ un piano. Innanzitutto notiamo come sia (ovviamente) impossibile ottenere un vettore perpendicolare ~~[illegible]~~ contemporaneamente a due vettori non paralleli e che tutti e tre appartengono allo stesso piano (escludiamo superfici non piatte!). Applicando la definizione di prodotto scalare e ragionando per assurdo supponiamo che esiste un vettore $\vec{c} = (c_x, c_y)$ perpendicolare ai vettori dati $\vec{a} = (a_x, a_y)$ e $\vec{b} = (b_x, b_y)$. Le componenti c_x e c_y dovrebbero soddisfare il seguente sistema:

$$0 = \vec{c}\cdot\vec{a} = c_x a_x + c_y a_y$$
$$0 = \vec{c}\cdot\vec{b} = c_x b_x + c_y b_y$$

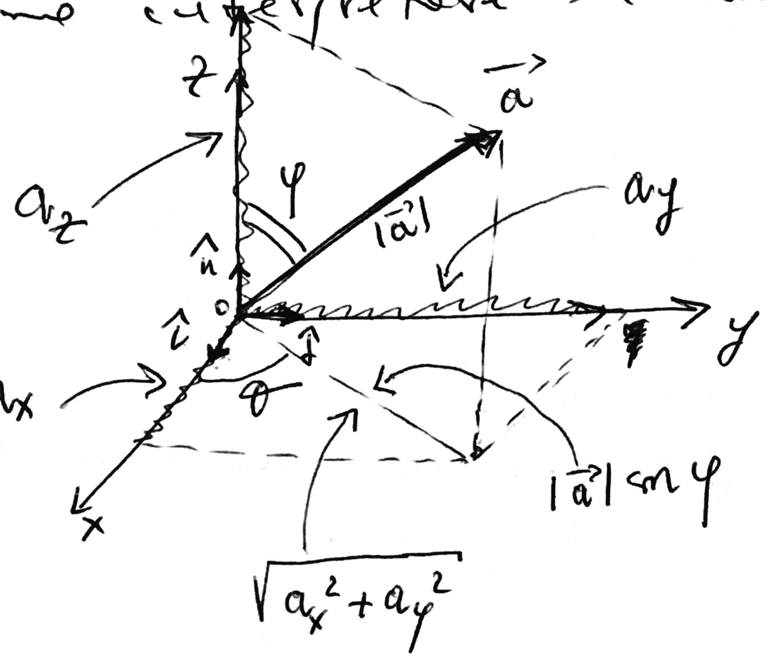
$$\Rightarrow \begin{cases} a_x c_x + b_x c_x = 0 \\ a_y c_y + b_y c_y = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $c_x = c_y = 0$

Dunque **non esiste** nessun vettore $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$!! (Ovvio!!) Bisogna quindi supporre che i nostri vettori siano tridimensionali, aggiungendo una terza componente:

$$\vec{a} = (a_x, a_y) \longrightarrow \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

Come rappresentare il vettore tridimensionale! Come interpretare le tre componenti?



$$\begin{cases} a_x = (|\vec{a}| \sin\varphi) \cos\theta \\ a_y = (|\vec{a}| \sin\varphi) \sin\theta \\ a_z = |\vec{a}| \cos\varphi \end{cases}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Il prodotto scalare si generalizza immediatamente a tre dimensioni come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

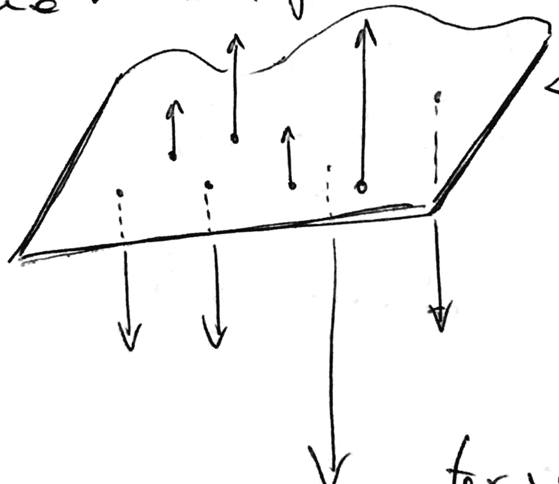
Possiamo ora definire il prodotto vettoriale come la ricerca di un vettore perpendicolare ad un piano (individuato quest'ultimo da due vettori non paralleli). Siano dati i vettori $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, calcoliamo il vettore $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ tale che:

$$0 = \vec{c}\cdot\vec{a} = c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z$$

$$0 = \vec{c}\cdot\vec{b} = c_x b_x + c_y b_y + c_z b_z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = 0 \\ b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = 0 \end{cases} \qquad (S)$$

sistema di tre incognite in due equazioni di cui non sarà possibile definire univocamente il vettore $\vec{c}$ (resta un'incognita indeterminata). Questo fatto è normale poiché dato un piano, di vettori ortogonali al piano stesso se ne trovano infiniti



Bisognerà quindi imporre una terza condizione. Cominciamo a risolvere il sistema (S)

$$\begin{cases} c_x = -\dfrac{a_y}{a_x}c_y - \dfrac{a_z}{a_x}c_z \\ b_x\left(-\dfrac{a_y}{a_x}c_y - \dfrac{a_z}{a_x}c_z\right) + b_y c_y + b_z c_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_x = -\dfrac{a_y}{a_x}c_y - \dfrac{a_z}{a_x}c_z \\ c_y = \dfrac{a_z b_x - a_x b_z}{a_x b_y - a_y b_x}\, c_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_y = \dfrac{a_z b_x - a_x b_z}{a_x b_y - a_y b_x}\, c_z \\[2ex] c_x = -\dfrac{a_y}{a_x}\,\dfrac{a_z b_x - a_x b_z}{a_x b_y - a_y b_x}\, c_z - \dfrac{a_z\, c_z}{a_x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{- - - - - - - -} \\[2ex] c_x = \dfrac{\cancel{-a_y a_z b_x} + a_x a_y b_z - a_z a_x b_y \cancel{+ a_z a_y b_x}}{a_x (a_x b_y - a_y b_x)}\, c_z \end{cases}$$

Quindi la soluzione diviene:

$$\begin{cases} c_x = \dfrac{a_y b_z - a_z b_y}{a_x b_y - a_y b_x}\, c_z \\[2ex] c_y = \dfrac{a_z b_x - a_x b_z}{a_x b_y - a_y b_x}\, c_z \\[2ex] c_z = c_z \quad (\text{indeterminato}) \end{cases} \qquad (\star)$$

A c_z possiamo sostituire qualsiasi valore e il vettore $\vec{c}$ risulta sempre perpendicolare a $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Da notare che il tutto è corretto e ha senso fisico (anche matematico) se $a_x b_y - a_y b_x \neq 0$

cioè $a_x b_y \neq a_y b_x \Rightarrow b_y/b_x \neq a_y/a_x$

cioè i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ <u>non</u> devono essere parallelo nel piano xy, altrimenti il vettore $\vec{c}$ non esiste. 23

Da notare che il sistema avrebbe potuto essere risolto in altri due modi ottenendo come soluzione:

$$\begin{cases} c_x = c_x \text{ (indeterminato)} \\ c_y = \dfrac{a_z b_x - a_x b_z}{a_y b_z - a_z b_y} c_x \\ c_z = \dfrac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_z - a_z b_y} c_x \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} c_x = \dfrac{a_y b_z - a_z b_y}{a_z b_x - a_x b_z} c_y \\ c_y = c_y \text{ (indeterminato)} \\ c_z = \dfrac{a_x b_y - a_y b_x}{a_z b_x - a_x b_z} c_y \end{cases}$$

La soluzione ha senso se $a_y b_z - a_z b_y \neq 0$
$\Rightarrow b_z/b_y \neq a_z/a_y$
vettori non paralleli nel piano yz

La soluzione ha senso se $a_z b_x - a_x b_z \neq 0$
$\Rightarrow b_z/b_x \neq a_z/a_x$
vettori non paralleli nel piano xz

Quindi il tutto ha senso se i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non sono paralleli!!!

Tra gli infiniti vettori sceglieremo quello per cui $c_z = a_x b_y - a_y b_x$ (del primo sistema (*)) ed otteremo quindi un solo vettore perpendicolare al piano!

$$\vec{c} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$

il vettore $\vec{c}$ è detto prodotto vettoriale dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e lo indichiamo come $\vec{a} \times \vec{b}$.

Si legge "a vector b".

Si nota che

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{a} &= 0 \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -\ \vec{b} \times \vec{a} \end{aligned}}$$

Il prodotto vettoriale è anticommutativo. Bisogna stare attenti all'ordine con cui si pongono i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Quanto vale il modulo del prodotto vettoriale?

Si dimostra ~~che ... ...~~ che

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$$

dove θ è l'angolo formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

N.B. Da non confondere con $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$

Dunque il prodotto vettoriale è massimo (inteso come modulo) quando $\vec{a} \perp \vec{b}$ ed è minimo (vale zero) se i vettori sono paralleli o antiparalleli.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{cases} |\vec{a}|\,|\vec{b}| & \text{se } \vec{a} \perp \vec{b} \\ 0 & \text{se } \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ oppure } \vec{a} \parallel -\vec{b} \end{cases}$$

Un modo semplice per ricordarsi l'espressione del prodotto vettoriale è il seguente:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \hat{i} \begin{pmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{pmatrix} +$$

$$\hat{j} \begin{pmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{pmatrix} + \hat{k} \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} = \hat{i}\, c_x + \hat{j}\, c_y + \hat{k}\, c_z$$

Applicando l'espressione del prodotto vettoriale calcoliamo i prodotti vettoriali tra $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$:

$$\hat{i} \times \hat{j} = (1,0,0) \times (0,1,0) = \ldots = (0,0,1) = \hat{k}$$

$$\hat{i} \times \hat{k} = (1,0,0) \times (0,0,1) = \ldots = (0,-1,0) = -\hat{j}$$

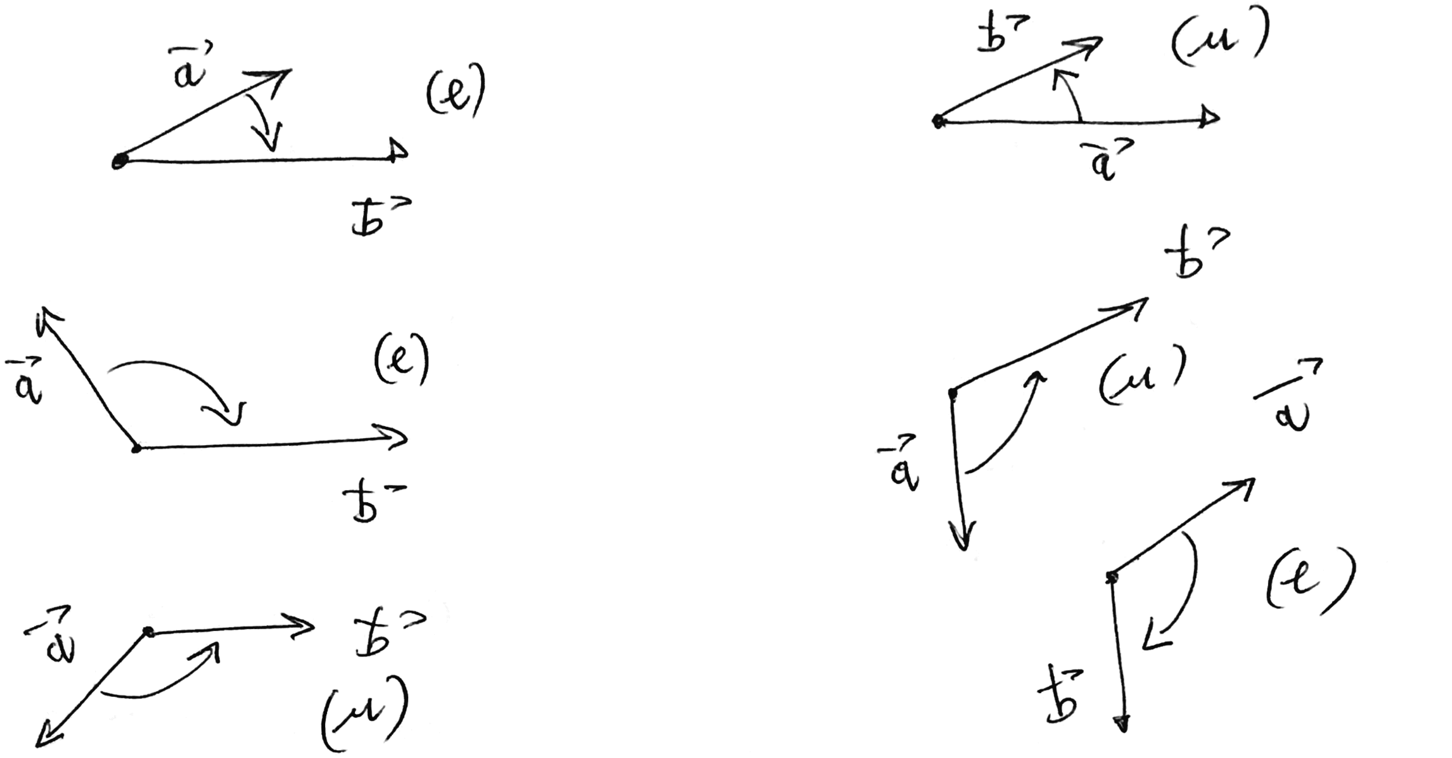
$$\hat{j} \times \hat{k} = (0,1,0) \times (0,0,1) = \ldots = (0,0,1) = \hat{k}$$

ovviamente $\hat{j} \times \hat{i} = \ldots = (0,0,-1) = -\hat{k}$ ecc...

Possiamo quindi introdurre una regola intuitiva per calcolare il verso del prodotto vettoriale. Infatti il modulo è definito come $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, la direzione deve essere perpendicolare al piano contenente $\vec{a}$ e $\vec{b}$, resta quindi il verso.

Il verso del prodotto vettoriale è tale da vedere il primo vettore ruotare sul secondo in senso antiorario con un angolo inferiore a π.

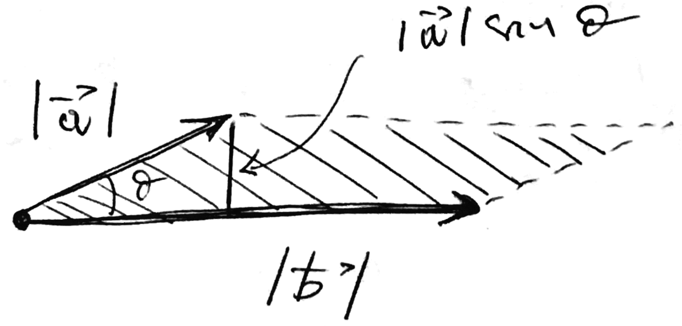
Esempio: Calcoliamo il verso di $\vec{a} \times \vec{b}$
se i vettori sono disposti come segue:



e: verso entrante nel foglio
u: verso uscente dal foglio.

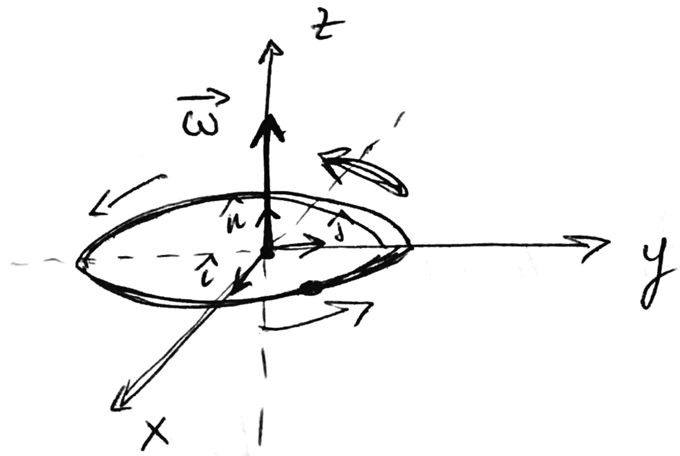
Il modulo di $\vec{a} \times \vec{b}$ rappresenta l'area del parallelogramma costruito con i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

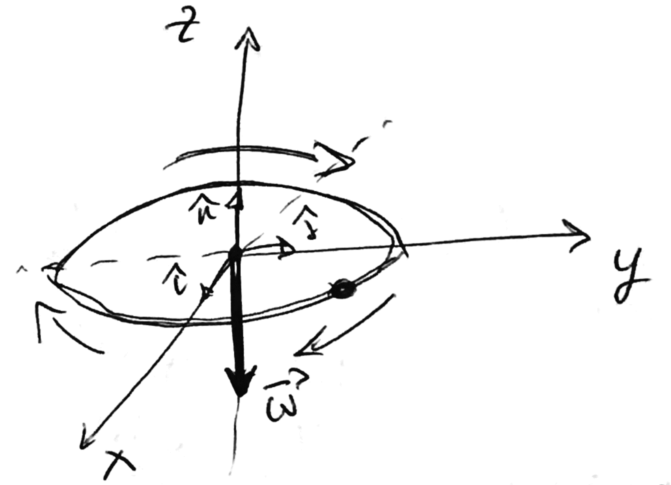
Infatti



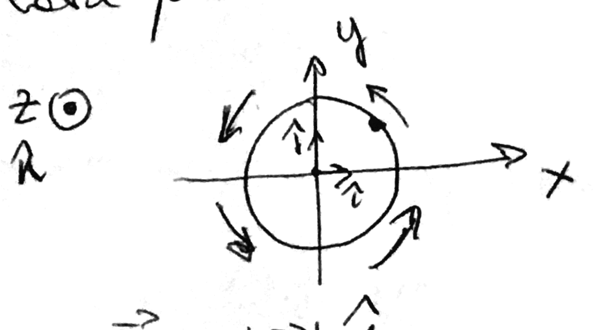
VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE

La velocità angolare è tecnicamente un vettore poiché non è rappresentata solo dall'intensità della rotazione, appunto, il modulo, ma bisogna individuare anche il piano di rotazione ed infine il verso della rotazione. Per questi aspetti è utile introdurre il vettore $\vec{\omega}$ con le seguenti caratteristiche: la direzione è perpendicolare al piano della rotazione, il modulo vale $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$ ed il verso è tale che vedere la rotazione in senso antiorario.

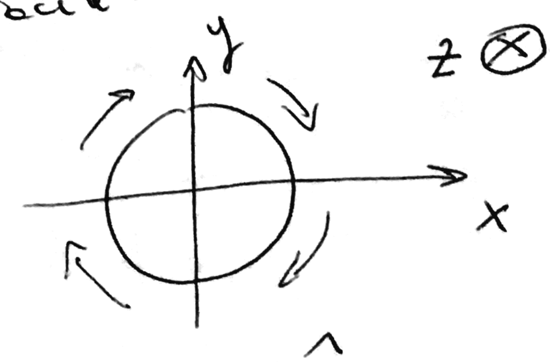




Per rappresentare il tutto su un piano conviene introdurre una piccola convenzione per il terzo asse. Useremo il simbolo "⊙" per indicare che il terzo asse è perpendicolare al foglio con verso uscente mentre il simbolo "⊗" per indicare quando il verso è entrante.



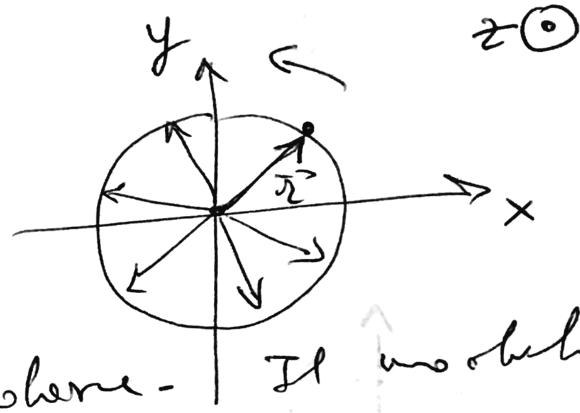
$\vec{\omega} = |\vec{\omega}|\,\hat{n}$



$\vec{\omega} = |\vec{\omega}|\,\hat{n}$

FORMULA DI POISSON

Tale formula permette di calcolare la velocità connessa ad un vettore rotante.
Si definisce vettore rotante un vettore che cambia solo in direzione (il modulo resta costante).
Il vettore posizione nel moto circolare uniforme è un vettore rotante.



La velocità $\vec{v}$ è data dalla relazione:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare. Il modulo di $\vec{v}$ è dato come $|\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{r}| \sin\theta$ ma $\theta = \pi/2$ quindi otteniamo la nota formula

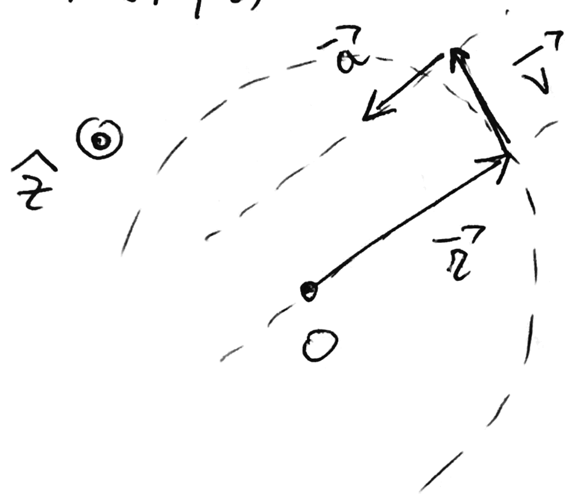
$|\vec{v}| = \omega R$ se $R = |\vec{r}|$ e $\omega = |\vec{\omega}|$.

$\vec{v}$ è perpendicolare sia a $\vec{\omega}$ che $\vec{r}$ come deve essere nel moto circolare.

Il vettore $\vec{v}$, nel caso che il moto sia anche uniforme, è anch'esso un vettore rotante (altrimenti l'angolo fra $\vec{v}$ ed $\vec{r}$ cambierebbe), quindi potremo riapplicare la formula di Poisson e calcolare l'accelerazione (notiamo che l'accelerazione è concettualmente la velocità con cui si modifica il vettore velocità connesso al vettore posizione).

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -|\vec{\omega}|^2 \vec{r}$$

$$|\vec{a}| = |\vec{\omega}|^2 |\vec{r}| = \omega^2 R$$ (accelerazione centripeta)



$$\vec{\omega} = |\vec{\omega}|\,\hat{z}$$