

TEORIA CINETICA DEI GAS

(1)

Le ipotesi fondamentali della teoria cinetica dei gas sono ricomprendibili nei seguenti punti:

- 1) Un gas è costituito da un numero N di molecole. Tutte le molecole di una stessa specie chimica sono indistinguibili. Se m indica con un la massa di ogni molecola, la massa totale è mN . Se M è il peso molecolare allora il numero di gramma-molecole è:

$$n = \frac{mN}{M} \quad (\text{GRAMMA-MOLECOLE})$$

Il numero di molecole N_A contenute in una mole di gas prende il nome di numero di Avogadro ed è:

$$N_A = \frac{N}{n} = \frac{M}{m} = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{\text{molecole}}{\text{gramma-mole}}.$$

Essendo una mole di gas ideale alla temperatura di 273°K e alla pressione di 1 atm occupa il volume di $22,4 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$, ci sono circa $3 \cdot 10^{19}$ molecole in 1 cm^3 e $3 \cdot 10^{16}$ molecole in $1 \mu\text{m}^3$.

- 2) Le molecole di un gas ideale si muovono con velocità come piccole sfere impetuose libere e indifferenziali, che si muovono in tutte le direzioni con tutti i possibili valori della velocità (in modulo) compresi fra 0 e ∞ . Nell'intervallo di temperature e pressioni in cui si può parlare di gas ideale, la distanza media fra due molecole è grande rispetto alle dimensioni di una molecola. Il diametro delle molecole è dell'ordine di $2 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$. In conseguenza normale la distanza media fra due molecole è circa 50 volte

il diametro.

- 3) Le molecole non esercitano alcuna forza, né attrattiva né repulsiva sulle altre molecole, soltanto presso i vasi le pareti trasferiscono una quantità di moto. Fra un urto ed il successivo il moto delle molecole è rettilineo uniforme.
- 4) Le pareti contro le quali i vasi sono lisce, e p.t. v.t. sono perfettamente elastiche. Se w è la velocità (in modulo) con cui la molecola giunge in una parete, l'urto scambia solo la componente w_x passando a $-w_x$, in modo da aver avuto una variazione pari a $-2w_x$.
- 5) In assenza di forze esterne le molecole sono uniformemente distribuite in tutto il volume del contenitore. La densità molecolare N/V è costante, quindi in un elemento di volume dV ci sono dN molecole:

$$dN = \frac{N}{V} dV$$

- 6) Le velocità di una molecola non ha una direzione privilegiata, ma in un preciso istante punta in una o nell'altra direzione senza motivo.
- 7) Non tutte le molecole hanno la stessa velocità. Né tutte le molecole avranno nel loro cammino velocità compresa fra zero ed infinito (quelle della luce).

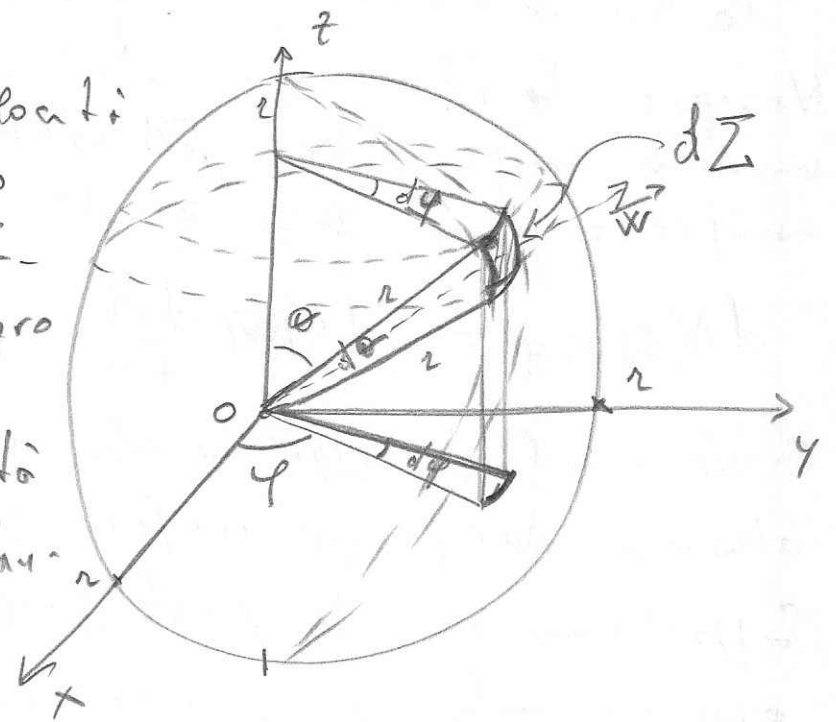
Se n indica con $dN_{\vec{w}}$ il numero di molecole con velocità comprese tra $|\vec{w}|$ e $|\vec{w}| + d|\vec{w}|$, si assume che $dN_{\vec{w}}$ all'equilibrio sia costante.

(3)

Questi i punti si può costruire la teoria - Prima di passare al calcolo introdurremo alcune proprietà utili, necessariamente.

Consideriamo un vettore velocità \vec{w} diretto dal punto O verso l'elemento di superficie $d\Sigma$.

Vogliamo calcolare il numero di molecole che hanno il vettore velocità \vec{w} rappresentati da \vec{w} . Introduciamo l'angolo solido $d\Omega$ così definito:



$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{r^2} = \frac{r \sin \theta \, r \, d\theta \, d\phi}{r^2} = \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$d\Sigma = r \, d\theta \, r \sin \theta \, d\phi = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$ rappresenta l'elemento di superficie ottenuto tagliando la sfera (metà sfera) con angoli $d\phi$ e altri tagli (paralleli) con angolo $d\theta$.

$\frac{N}{4\pi r^2}$ = numero di punti per unità di superficie.

$4\pi r^2$: superficie della sfera di raggio r .
 quindi il numero di molecole nelle superficie $d\Sigma$ sarà

$$\frac{N}{4\pi r^2} d\Sigma = N \frac{d\Sigma}{4\pi r^2} = \left(\frac{N}{4\pi}\right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = dN_{\theta, \phi}$$

dove $dN_{\vec{v}, \varphi}$ è il numero di particelle aventi direzione compresa nell'angolo solido $d\Omega$. Se $dN_{|\vec{v}|}$ rappresenta il numero di particelle con velocità compresa tra $|\vec{v}|$ e $|\vec{v}| + d|\vec{v}|$, allora la frazione di queste molecole la cui velocità è diretta entro $d\Omega$ è $d\Omega/4\pi$.

Ne segue che il numero di molecole la cui velocità ha modulo compreso tra $|\vec{v}|$ e $|\vec{v}| + d|\vec{v}|$ ed anche direzione compresa tra φ e $\varphi + d\varphi$ è:

$$dN_{|\vec{v}|, \varphi} = dN_{|\vec{v}|} \frac{d\Omega}{4\pi} = \left(\frac{1}{4\pi}\right) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dN_{|\vec{v}|}$$

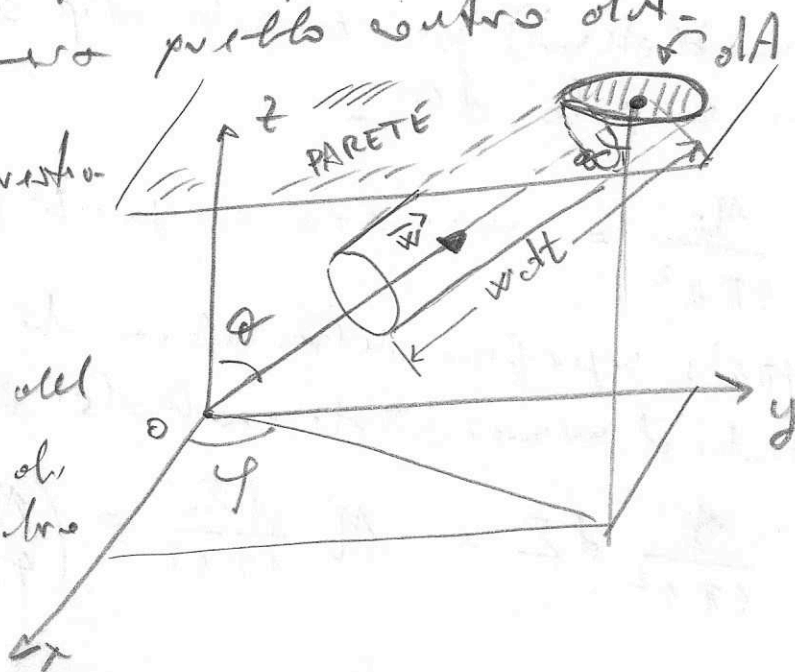
Questo risultato esprime che non esiste per le velocità alcuna direzione preferenziale.

Supponiamo ora che questo gruppo di molecole si stia avvicinando e successivamente urti ad una parete di superficie dA . Le maggior parte delle molecole urterà oltre la prima parete che si trova a dA ; ma se loro fanno a controllare solo quelle comprese in un cilindro di altezza $|\vec{v}|dt$, dove dt è l'intervallo di tempo con il quale si controlla che l'unica parete con cui urtano è quella entro dA .

Il volume del cilindro in questione è dato da

$$dV = |\vec{v}| dt dA \cos\vartheta$$

mentre con V il volume del contenitore. La frazione di molecole contenute nel cilindro



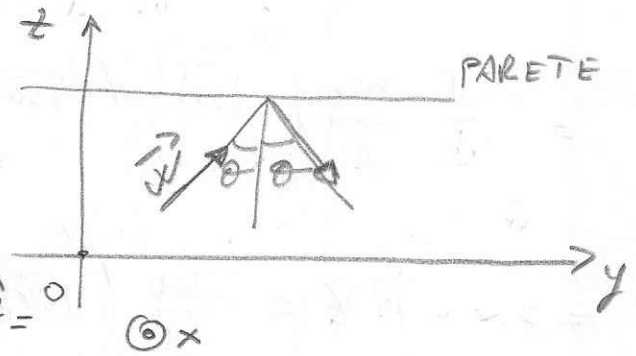
terzo dV/V . Quindi è presto la funzione obliqua. (3)
 cioè con velocità prossime a \vec{w} (in modulo e in direzione) che urtano la superficie dA nel tempo dt è dato che

$$dN_{|\vec{w}|, \theta, \varphi} \frac{dV}{V} = \left(\frac{1}{4\pi V} \right) |\vec{w}| \cos \theta \sin \theta \, dt \, dA \, d\theta \, d\varphi \, dN_{|\vec{w}|}$$

Quando una molecola urta contro la parete formando un angolo θ abbiamo che $w_{\perp} = |\vec{w}| \cos \theta$ quindi la quantità di moto che subisce una variazione pari a

$$- 2m|\vec{w}| \cos \theta.$$

Ora la variazione totale delle quantità di moto



$$d\vec{P}_{|\vec{w}|, \theta, \varphi} = dN_{|\vec{w}|, \theta, \varphi} \frac{dV}{V} (-2m|\vec{w}| \cos \theta) \hat{z} = 0$$

$$= dN_{|\vec{w}|} \frac{\sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{4\pi} \frac{|\vec{w}| \, dt \, dA \, \cos \theta}{V} (-2m|\vec{w}| \cos \theta) \hat{z}$$

$$\text{Infine } \Delta \vec{P} = m \vec{w}_{f, z} - m \vec{w}_{i, z} = -m \vec{w}_{i, z} - m \vec{w}_{i, z} = -2m \vec{w}_{i, z}$$

$$= -2m \vec{w}_{z, i} = -2m|\vec{w}| \cos \theta \hat{z}.$$

La variazione delle quantità di moto per unità di tempo e di area in seguito agli urti che tutte le direzioni rappresentate da pressione $dP_{|\vec{w}|}$ esercitate sulle pareti tutte $dN_{|\vec{w}|}$ molecole di peso. Ricordando che si parla delle variazioni delle quantità di moto, si ottiene la pressione esercitata dalle $dN_{|\vec{w}|}$ molecole sulle pareti. Fra dP tale pressione:

$$dP = - \frac{1}{dt} \frac{d|\vec{P}_{\vec{w}, \theta, \varphi}|}{dA} = \frac{m|\vec{w}|^2}{2\pi} \frac{dN_{|\vec{w}|}}{V} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi$$

Quindi:

$$P = \frac{m}{2\pi V} \int_0^{\infty} |\vec{w}|^2 dN_{|\vec{w}|} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta =$$

$$= \frac{m}{2\pi V} 2\pi \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} \right) \int_0^{\infty} |\vec{w}|^2 dN_{|\vec{w}|}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{m}{V} \int_0^{\infty} |\vec{w}|^2 dN_{|\vec{w}|}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{m}{3} \int_0^{\infty} |\vec{w}|^2 dN_{|\vec{w}|}$$

Diamo una prima interpretazione dell'integrale:

Notiamo

$$\langle |\vec{w}|^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\vec{w}_i|^2 = \frac{1}{N} \sum |\vec{w}_i|^2 \Delta N_{|\vec{w}_i|} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^{\infty} |\vec{w}|^2 dN_{|\vec{w}|}$$

$$\text{che cui } \int_0^{\infty} |\vec{w}|^2 dN_{|\vec{w}|} = N \langle |\vec{w}|^2 \rangle \quad (*)$$

$\langle |\vec{w}|^2 \rangle$: VELOCITÀ QUADRATICA MEDIA

$$PV = \frac{m}{3} N \langle |\vec{w}|^2 \rangle$$

Dalla legge dei gas perfetti. $PV = nRT$ (SUCCESSIVAMENTE SARA' MOSTRATA)

obtieniamo:

$$n R T = \frac{1}{3} m N \langle |\vec{v}|^2 \rangle$$

$$n R T = \frac{2}{3} N \left\{ \frac{1}{2} m \langle |\vec{v}|^2 \rangle \right\} = \frac{2}{3} N \langle E_c \rangle$$

$\langle E_c \rangle$: energia cinetica media.

$$\frac{2}{3} \langle E_c \rangle = \frac{n}{N} R T = \frac{1}{N_A} R T, \quad \text{posto } k_B = \frac{R}{N_A}$$

↓
CONSTANTE DI
BOLTZMANN

$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

 (EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA)

L'energia cinetica media delle particelle in un gas a temperatura T è data da $\frac{3}{2} k_B T$.
Ecco il motivo del perché $T=0$ K implica che le particelle sono ferme. (Ovviamente pronto ricorso a una teoria classica ed è valida a temperature elevate).

Il calore specifico a volume costante è definito come

$$c_v = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \Big|_{v=const} = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \Big|_{v=const}.$$

poiché $Q - L = \Delta U$ e se $v=const \Rightarrow Q = \Delta U$.

L'energia interna rappresenta l'agitazione media delle particelle costituenti il gas; quindi, possiamo porre che

$$U = N \langle E_c \rangle = N \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} n R T$$

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{dV}{dT} \Big|_{V=\text{const}} = \frac{1}{\mu} \frac{3}{2} \mu R = \frac{3}{2} R.$$

Ecco spiegato perché il calore specifico a volume costante di un gas monoatomico (molecole approssimate a sferette) è pari a $\frac{3}{2} R$ che può essere riscritto come $3(\frac{R}{2})$ dove tre è interpretabile come il numero di gradi di libertà di ogni singola molecola (che sono sfere!).

Insieme tutte le direzioni sono equivalenti e nell'ottica che le velocità hanno gli stessi valori, in tutte le direzioni:

$$\begin{aligned} \langle E_C \rangle &= \frac{1}{2} m \langle |\vec{w}|^2 \rangle = \frac{m}{2} \langle w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 \rangle = \frac{m}{2} 3 \langle w_x^2 \rangle \\ &= \frac{m}{2} 3 \langle w_y^2 \rangle = \frac{m}{2} 3 \langle w_z^2 \rangle \end{aligned}$$

$\langle E_C \rangle = 3 \left(\frac{m}{2} \langle w_i^2 \rangle \right)$ dove $\langle w_i^2 \rangle$ rappresenta la velocità quadratica media lungo una delle tre direzioni fondamentali. Quindi, dall'equipartizione dell'energia:

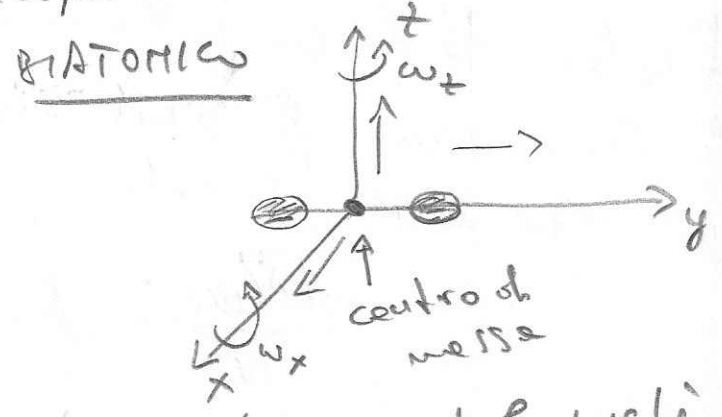
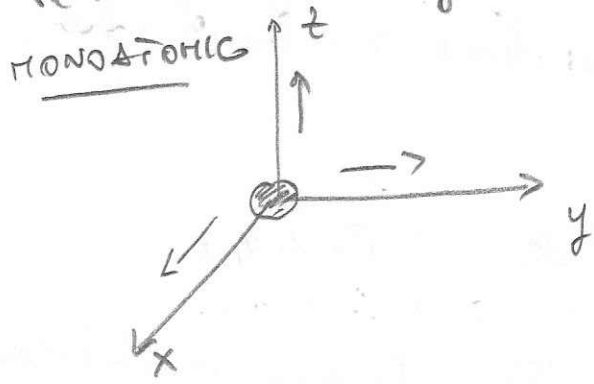
$$\frac{3}{2} m \langle w_i^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \frac{m}{2} \langle w_i^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

Per ogni grado di libertà (lungo x, y, z) abbiamo un contributo $\frac{1}{2} k_B T$ all'energia.

Se questo discorso viene trasferito nell'ambito dell'energia interna U abbiamo $\frac{1}{2} n R T$ per ogni contributo.

to d'energia a quelle interna. Se roghiamo
 calcolare il calore specifico avremo punti 2 ($1/2 R$).
 Quindi per ogni grado di liberta abbiamo un contributo
 $1/2 R$ al calore specifico.

Nel caso che un gas biatomico vale $5/2 R$.
 Se l'interpretazione fatta e corretta, allora un gas
 biatomico presenta 5 gradi di liberta e non 3
 come quello monoatomico. Infatti un gas biatomico
 unico non e approssimabile ad una sfera (punti
 fuiforme), bensu ad una sbarretta (corpo rigido).
 Tale sbarretta presenta tre gradi di liberta dovuti
 al moto del centro di massa (si comporta come
 gas monoatomico) e due gradi di liberta dovuti
 al moto di rotazione (si comporta come una sbar-
 retta in rotazione). Infatti:



la rotazione intorno all'asse y e traslazioni picchi
 e traslazioni il movimento di energia lungo y.
 Quindi $\langle E_c \rangle$ per il gas biatomico sarebbe:

$$\langle E_c \rangle = \frac{m}{2} |\vec{v}|^2 + \frac{I}{2} |\vec{\omega}|^2 = 3 \left(\frac{m}{2} v_x^2 \right) + 2 \left(\frac{I}{2} \omega_x^2 \right)$$

$$= 3 \left(\frac{1}{2} k_B T \right) + 2 \left(\frac{1}{2} k_B T \right) = \frac{5}{2} k_B T \quad \text{Per } n_i \sim$$

ottenere

$$C_v = \frac{5}{2} R \quad (\text{BIATOMICO}) -$$

Per concludere cerchiamo di studiare la relazione

(*)

$$\langle |\vec{w}|^2 \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty |\vec{w}|^2 dN_{|\vec{w}|}$$

Vogliamo calcolare l'espressione di $N_{|\vec{w}|}$ in termini di $|\vec{w}|$. Rappresento per componenti \vec{w}^2 .

Se il nostro sistema presenta N particelle, la frazione di particelle aventi velocità lungo x compresa tra w_x e $w_x + dw_x$ sarà una frazione del numero di particelle lungo x e sarà proporzionale a dw_x .

Quindi:

$$\frac{dN_{w_x}}{N} = f(w_x) dw_x$$

L'ipotesi che lungo tutte e tre le direzioni deve essere le stesse cose f deve essere lo stesso anche lungo gli altri assi. Quindi:

$$\frac{dN_{w_i}}{N} = f(w_i) dw_i \quad i = x, y, z$$

P.S. che f deve avere sempre la stessa forma analitica è una conseguenza dell'equiprobabilità delle direzioni.

Consideriamo la frazione di particelle dN_{w_x} che hanno modulo delle velocità fra w_y e $w_y + dw_y$. Per lo stesso ragionamento otteniamo

$$dN_{w_x, w_y} = dN_{w_x} \frac{dN_{w_y}}{N} = N f(w_x) dw_x f(w_y) dw_y$$

In questa sottounione ci sarà ancora un'ulteriore
 avente una sola delle velocità compreso fra w_2 e $w_2 + dw_2$.
 Quindi:

$$dN_{w_x, w_y, w_z} = dN_{w_x, w_y} \frac{dN_{w_z}}{N} = N f(w_x) f(w_y) dw_x dw_y f(w_z) dw_z$$

$$= N f(w_x) f(w_y) f(w_z) dw_x dw_y dw_z$$

Introduciamo la densità dei punti di velocità ρ con
 definita:

$$\rho = \frac{dN_{w_x, w_y, w_z}}{dw_x dw_y dw_z} = N f(w_x) f(w_y) f(w_z)$$

Poiché le velocità non hanno direzione privilegiata
 (o come si vuol dire isotropo) la densità
 ρ deve essere una costante in tutti i punti della
 superficie $w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = |\vec{w}|^2$, il cui raggio è
 il modulo delle velocità. Ne consegue $\rho = \text{costante}$
 e $|\vec{w}|^2 = \text{costante}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \text{cost.} \\ |\vec{w}|^2 = \text{cost.} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N f(w_x) f(w_y) f(w_z) = \text{cost.} \\ w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = \text{cost.} \end{array} \right.$$

Influenzando rispetto alle variabili w_x, w_y, w_z abbiamo:

$$\begin{cases} f(w_x) f(w_z) \frac{\partial f(w_x)}{\partial w_x} dw_x + f(w_x) f(w_z) \frac{\partial f(w_y)}{\partial w_y} dw_y + \\ + f(w_x) f(w_y) \frac{\partial f(w_z)}{\partial w_z} dw_z = 0 \\ w_x dw_x + w_y dw_y + w_z dw_z = 0 \end{cases}$$

Dividendo la prima espressione per $f(w_x) f(w_y) f(w_z)$ abbiamo

$$\begin{cases} \frac{1}{f(w_x)} \frac{\partial f(w_x)}{\partial w_x} dw_x + \frac{1}{f(w_y)} \frac{\partial f(w_y)}{\partial w_y} dw_y + \frac{1}{f(w_z)} \frac{\partial f(w_z)}{\partial w_z} dw_z = 0 \\ w_x dw_x + w_y dw_y + w_z dw_z = 0 \end{cases}$$

che può essere completata introducendo la Σ (Lagrange moltiplicatore):

$$\begin{cases} \sum_{i=x,y,z} \frac{1}{f(w_i)} \frac{\partial f(w_i)}{\partial w_i} dw_i = 0 \\ \sum_{i=x,y,z} w_i dw_i = 0 \end{cases}$$

Tale problema (di vincolo) si può risolvere introducendo il cosiddetto moltiplicatore di Lagrange λ .
(in analisi sarà chiaro il motivo!!) $\lambda \in \mathbb{R}$

Il sistema diventa:

$$\sum_{i=x,y,z} \frac{1}{f(w_i)} \frac{\partial f(w_i)}{\partial w_i} dw_i + \lambda \sum_{i=x,y,z} w_i dw_i = 0$$

che cui

$$\sum_{i=x,y,z} \left(\frac{1}{f(w_i)} \frac{\partial f(w_i)}{\partial w_i} + \lambda w_i \right) dw_i = 0$$

che si annulla se si annulla il generico addendo:

$$\left(\frac{1}{f(w_i)} \frac{\partial f(w_i)}{\partial w_i} + \lambda w_i \right) dw_i = 0 \quad \forall dw_i$$

per cui

$$\frac{1}{f(w_i)} \frac{\partial f(w_i)}{\partial w_i} + \lambda w_i = 0 \quad \forall i=x,y,z$$

una presta equazione è un'equazione differenziale la cui incognita è una funzione che w_i . Si risolve immediatamente. Infatti

$$\frac{1}{f(w_i)} \frac{\partial f(w_i)}{\partial w_i} = \frac{\partial}{\partial w_i} \ln f(w_i)$$

Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial w_i} \ln f(w_i) = -\lambda w_i$$

Se come f dipende da una sola variabile $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dx}$

$$\frac{d}{dw_i} \ln f(w_i) = -\lambda w_i$$

$$\int \frac{d}{dw_i} \ln f(w_i) dw_i = -\lambda \int w_i dw_i$$

$$\Rightarrow \ln f(w_i) = -\frac{\lambda w_i^2}{2} + K$$

$$\Rightarrow f(w_i) = K e^{-\lambda \frac{w_i^2}{2}}$$

Si assume p è definita come il prodotto di $f(w_i)$
 allora:

$$p = N \prod_{i=x,y,z} f(w_i) = N K e^{-\frac{\lambda}{2} (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)}$$

$$= N K e^{-\frac{\lambda}{2} |\vec{w}|^2}$$

K deve essere calcolato imponendo

$$\int_{\text{tutto lo spazio}} p(\vec{w}) dw_x dw_y dw_z = N \quad (\text{numero totale di})$$

particelle

$$\int_{\text{tutto lo spazio}} p(\vec{w}) dw_x dw_y dw_z = N K \int_{\text{tutto lo spazio}} e^{-\frac{\lambda}{2} |\vec{w}|^2} dw_x dw_y dw_z = N$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{\int_{\text{tutto lo spazio}} e^{-\frac{\lambda}{2} |\vec{w}|^2} dw_x dw_y dw_z}$$

Per trovare l'integrale al denominatore
 (INTEGRALE GAUSSIANO)

$$\int_{\text{tutto lo spazio}} e^{-\frac{\lambda}{2} |\vec{w}|^2} dw_x dw_y dw_z = 4\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2} |\vec{w}|^2} |\vec{w}|^2 d|\vec{w}| =$$

PASSAGGIO ALLE COORDINATE POLARI $\rightarrow (|\vec{w}|, \theta, \varphi)$

(w_x, w_y, w_z) COORDINATE CARTESIANE

P.S. SARA' CHIARO IN ANALISI

$$= \sqrt{4\pi} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{(\lambda/2)^3}} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{3/2}; \Rightarrow n = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{3/2} \quad (8)$$

Infine abbiamo:

$$\rho = N \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{\lambda}{2} |\vec{w}|^2}$$

DENSITÀ PUNTI VELOCITÀ

Calcoliamo il numero di particelle con velocità compresa tra $|\vec{w}|$ e $|\vec{w}| + d|\vec{w}|$. Quindi $dN_{|\vec{w}|} =$

$$= F(|\vec{w}|) d|\vec{w}| = \rho(|\vec{w}|) 4\pi |\vec{w}|^2 d|\vec{w}| = 4\pi N \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{3/2} |\vec{w}|^2 e^{-\frac{\lambda}{2} |\vec{w}|^2} d|\vec{w}|$$

Da cui possiamo definire la obstruzione delle velocità $F(|\vec{w}|)$:

$$F(|\vec{w}|) = 4\pi N \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{3/2} |\vec{w}|^2 e^{-\frac{\lambda}{2} |\vec{w}|^2}$$

Possiamo calcolare il valore quadratico medio delle velocità:

$$\langle |\vec{w}|^2 \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty |\vec{w}|^2 dN_{|\vec{w}|} = \frac{1}{N} \int_0^\infty |\vec{w}|^2 F(|\vec{w}|) d|\vec{w}| =$$

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx$$

INTEGRALE GAUSSIANO

n	I_n
0	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi/\alpha}$
1	$\frac{1}{2\alpha}$
2	$\frac{1}{4} \sqrt{\pi/\alpha^3}$
3	$\frac{1}{2\alpha^2}$
4	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$
...	...
!	!

$$= \frac{1}{N} 4\pi N \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} |\vec{w}|^4 e^{-\frac{\lambda}{2} |\vec{w}|^2} d|\vec{w}| =$$

$$= 4\pi \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{(\lambda/2)^5}} = \frac{4\pi \lambda^{3/2}}{\cancel{2\sqrt{2}} \cancel{\pi} \cancel{2\sqrt{2}} \cancel{8}} \frac{3}{\cancel{8}} \frac{\pi^{1/2}}{4\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{3}{\lambda}; \Rightarrow \boxed{\langle |\vec{w}|^2 \rangle = \frac{3}{\lambda}}$$

il moltiplicatore di Lagrange incarna alle velocità quadratiche medie, quindi anche all'energia $\langle E_c \rangle$:

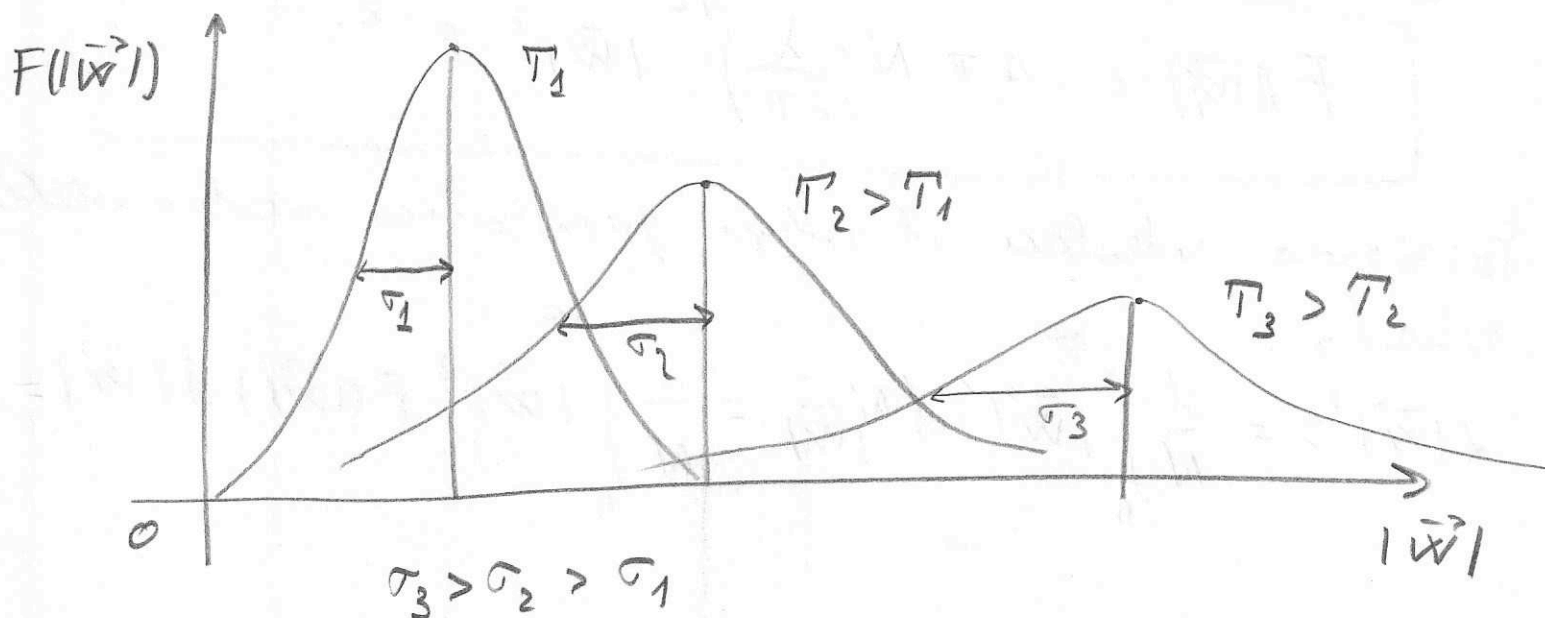
$$\langle E_c \rangle = \frac{m}{2} \langle |\vec{w}|^2 \rangle = \frac{m}{2} \frac{3}{\lambda}$$

ma dall'equipartizione dell'energia abbiamo

$$\frac{3m}{2\lambda} = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{m}{k_B T}}$$

Grafichiamo $F(|\vec{w}|)$:

$$F(|\vec{w}|^2) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{\frac{1}{2} m |\vec{w}|^2}{k_B T}}$$



Per $T \rightarrow 0$ $F(|\vec{w}|)$ diventa molto piccola (9)
 il che significa che le particelle diminuiscono la loro velocità, mentre $T \rightarrow \infty$ $F(|\vec{w}|)$ si allarga e le particelle tendono ad avere probabilisticamente tutte le velocità tra zero ed infinito (col nome prete delle stelle).
 Da notare che le velocità più probabili non corrispondono con le velocità medie. Infatti la velocità più probabile $|\vec{w}|^*$ è tale che $\frac{dF(|\vec{w}|)}{d|\vec{w}|} = 0$ (è il massimo di F):

$$\frac{dF(|\vec{w}|)}{d|\vec{w}|} = 0 \Rightarrow \frac{m}{k_B T} |\vec{w}|^3 = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{w}|^* = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{VELOCITÀ} \\ \text{PIÙ PROBABILE} \end{array} \right)$$

mentre la velocità media è data da

$$\langle |\vec{w}| \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} |\vec{w}| F(|\vec{w}|) d|\vec{w}| =$$

$$= \frac{1}{N} 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} |\vec{w}|^3 e^{-\frac{m}{2} \frac{|\vec{w}|^2}{k_B T}} d|\vec{w}| =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \left(\frac{k_B T}{m/2} \right)^2 = \dots = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{VELOCITÀ} \\ \text{MEDIA} \end{array} \right)$$