URTI

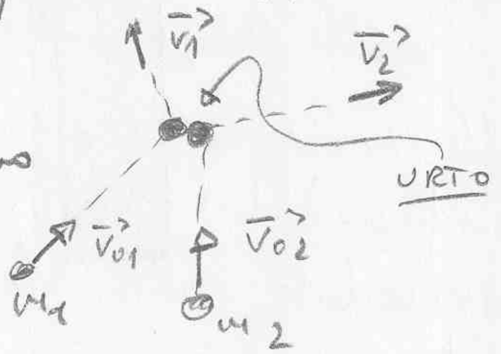
Consideriamo due oggetti puntiformi di massa m_1 e m_2 che si muovono sotto l'azione di forze esterne $\vec{F}_{e1}$ e $\vec{F}_{e2}$.
Per ciascuno di essi possiamo scrivere

$$\begin{cases} \vec{F}_{e1} = m_1 \vec{a}_1 = \dfrac{d\vec{q}_1}{dt} \\ \vec{F}_{e2} = m_2 \vec{a}_2 = \dfrac{d\vec{q}_2}{dt} \end{cases}$$

Integrando queste due equazioni fra due istanti qualunque t_0 e t_1 si ha

$$\begin{cases} \vec{I}_{e1} = \vec{q}_1(t) - \vec{q}_1(t_0) = \vec{q}_1 - \vec{q}_{01} = \Delta \vec{q}_1 \\ \vec{I}_{e2} = \vec{q}_2(t) - \vec{q}_2(t_0) = \vec{q}_2 - \vec{q}_{02} = \Delta \vec{q}_2 \end{cases}$$

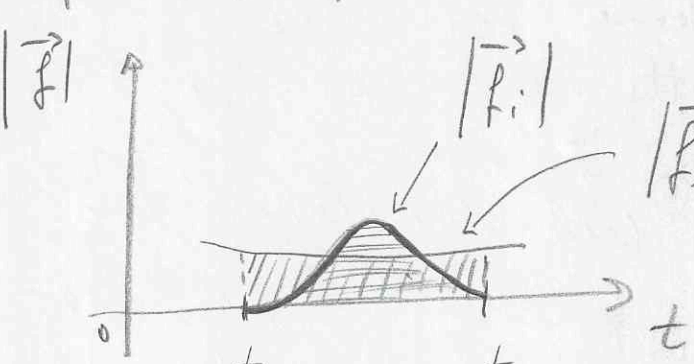
dove $\vec{I}_{e1}$ e $\vec{I}_{e2}$ rappresentano l'impulso di $\vec{F}_{e1}$ e $\vec{F}_{e2}$ fra gli istanti t_0 e t.



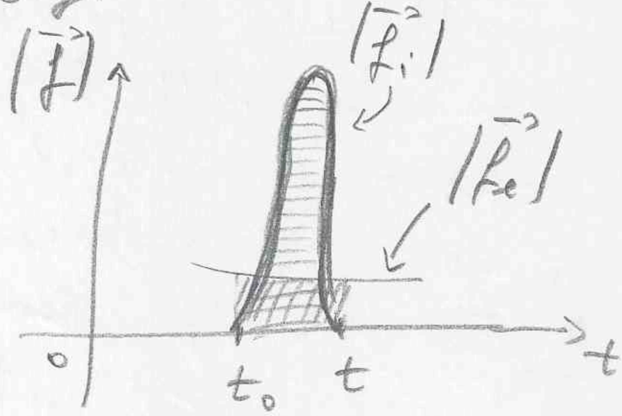
Poiché le forze esterne che agiscono sulle sfere hanno in generale un andamento regolare in funzione del tempo, $\vec{I}_{e1}$ e $\vec{I}_{e2}$ sono infinitesimi di ordine ~~superiore~~ uguale o superiore a Δt ed anche simultaneamente. Supponiamo che le due sfere vengano a contatto. Alle forze esterne $\vec{F}_{e1}$ e $\vec{F}_{e2}$ si sovrappongono durante il contatto le forze $\vec{F}_{i1}$ e $\vec{F}_{i2}$ che le sfere si scambiano tra di loro.
Rispetto al sistema formato dalle due sfere, $\vec{F}_{i1}$ e $\vec{F}_{i2}$ sono forze interne; quindi $\vec{F}_{i1} = -\vec{F}_{i2}$.
Integrando rispetto al tempo tra t_0 e t_1 si ottiene:

$$(\star)\quad \begin{cases} \vec{I}_{e1} + \vec{I}_i = \Delta \vec{q}_1 \\ \vec{I}_{e2} - \vec{I}_i = \Delta \vec{q}_2 \end{cases}$$

Se le due sfere sono molto deformabili, il contatto può durare per un tempo $\Delta t = t - t_0$ abbastanza lungo; e può essere allora che le forze interne $\vec{f}_i$ restino durante il contatto confrontabili, in intensità con le forze esterne. In questo caso, anche i moduli dei relativi impulsi $\vec{I}_i$ e $\vec{I}_e$ sono fra loro confrontabili. Se le sfere sono rigide, il tempo Δt di contatto diviene più breve. L'impulso $\vec{I}_i$ delle forze interne è comunque tale da provocare delle variazioni di quantità di moto $\Delta \vec{q}$ che sono confrontabili in modulo con le quantità di moto possedute dalle sfere; nel brevissimo intervallo di tempo Δt per cui dura il contatto, le forze mutue devono essere intensissime, spesso di molti ordini di grandezza più intense delle forze esterne.



$////// \to |\vec{I}_e| \qquad \equiv \to |\vec{I}_i|$



$////// \to |\vec{I}_e|$

$\equiv \to |\vec{I}_i|$

Gli impulsi $\vec{I}_{e1}$ e $\vec{I}_{e2}$ delle forze esterne, calcolati nel breve intervallo Δt, hanno per conseguenza moduli $|\vec{I}_{e1}|$ e $|\vec{I}_{e2}|$ trascurabili rispetto a $|\vec{I}_i|$.

In effetti si dice per definizione che due oggetti puntiformi subiscono un urto quando essi interagiscono scambiandosi un impulso $\vec{I}_i$ confrontabile in intensità col modulo delle loro quantità di moto, in un tempo Δt tanto breve che risulti, rispetto a $|\vec{I}_i|$, trascurabile l'impulso delle forze esterne

$$|\vec{I}_{e1}|, |\vec{I}_{e2}| \ll |\vec{I}_i|$$

Sotto queste ipotesi le relazioni (*) divengono:

$$(\ast\ast) \begin{cases} \vec{I}_i = \Delta \vec{q}_1 = m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_{01} \\ -\vec{I}_i = \Delta \vec{q}_2 = m_2 \vec{v}_2 - m_2 \vec{v}_{02} \end{cases}$$

dove $\vec{I}_i = \int_{t_0}^{t} \vec{f}_i(t)\, dt$ è la definizione di impulso.

In un problema d'urto lo stato del moto iniziale delle due particelle ($\vec{q}_{01} = m_1 \vec{v}_{01}$ e $\vec{q}_{02} = m_2 \vec{v}_{02}$) è noto e si tratta di determinare lo stato di moto finale, specificato (nel nostro caso) dai due vettori $\vec{q}_1 = m_1 \vec{v}_1$ e $\vec{q}_2 = m_2 \vec{v}_2$.

Notiamo che sommando membro a membro (**)

si ha:

$$\Delta \vec{q}_1 + \Delta \vec{q}_2 = 0 \iff \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{q}_{01} + \vec{q}_{02}$$

In un urto tra corpi non vincolati si conserva la quantità di moto totale.

Il caso più usuale che si presenta nella pratica è quello di un oggetto dotato di una certa velocità (detto proiettile) che va ad urtare contro un oggetto fermo (detto bersaglio). Il sistema Oxyz in cui il bersaglio è fermo viene detto sistema del laboratorio. Conviene scegliere uno degli assi del sistema Oxyz coincidente con la direzione che prima dell'urto ha la velocità $\vec{v}_0$ del proiettile.

Con questa scelta nel sistema Oxyz le condizioni iniziali $\vec{q}_{01}$ e $\vec{q}_{02}$ possono essere scritte come

$$\begin{cases} \vec{q}_{01} = (|\vec{q}_{01}|, 0, 0) = (m_1|\vec{v}_0|, 0, 0) \\ \vec{q}_{02} = (0, 0, 0) \end{cases}$$

In molti casi (ad esempio nel gioco del biliardo) l'urto fra particelle macroscopiche è vincolato ad avvenire in un piano. Anche quando questo vincolo non esiste, e l'urto ha luogo nello spazio, se indichiamo con Σ il piano individuato da $\vec{q}_{01}$ e $\vec{q}_1$ (cioè le direzioni che il proiettile ha prima e dopo l'urto), questo contiene anche $\vec{q}_2$ (cioè la direzione del vincolo del bersaglio). Essendo infatti nulla la proiezione ortogonale a Σ di $\Delta\vec{q}_1 = \vec{q}_1 - \vec{q}_{01}$ in virtù di $\Delta\vec{q}_1 + \Delta\vec{q}_2 = 0$ deve essere nulla anche la componente ortogonale a Σ di $\Delta\vec{q}_2$. Scegliendo tale piano Σ come piano xy si ha per quanto detto:

$$\begin{cases} \vec{q}_1 = (q_{1x}, q_{1y}, 0) \\ \vec{q}_2 = (q_{2x}, q_{2y}, 0) \end{cases}$$

Oltre al sistema $Oxyz$ del laboratorio, introduciamo ora anche il sistema di riferimento $Cx'y'z'$ del centro di massa C (con origine in C e assi $x'y'z'$ paralleli ad xyz). Poiché nell'urto la quantità di moto totale del sistema si conserva, il centro di massa C si muove nel laboratorio con velocità $\vec{V}_c$ costante. Infatti:

$$(m_1+m_2)\vec{V}_{0c} = \vec{Q}_0 = \vec{q}_{01} + \vec{q}_{02} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{Q} = (m_1+m_2)\vec{V}_c$$

Quindi $\vec{V}_{0c} = \vec{V}_c$. Anche il sistema $Cx'y'z'$ è inerziale e quindi utile per scrivere le espressioni dinamiche dell'urto. Rispetto al sistema $Oxyz$ abbiamo:

$$\vec{V}_c = \vec{V}_{0c} = \frac{\vec{Q}}{m_1+m_2} = \frac{\vec{Q}_0}{m_1+m_2} = \frac{\vec{q}_{01}+\vec{q}_{02}}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_0$$

Usando le trasformazioni galileiane è possibile calcolare le velocità delle particelle nel sistema del centro di massa:

$$\vec{v}'_{01} = \vec{v}_0 - \vec{V}_C = \vec{v}_0 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_0 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_0$$

$$\vec{v}'_{02} = 0 - \vec{V}_C = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_0$$

da notare che $\vec{v}'_{01} + \vec{v}'_{02} \neq 0$ ma se calcoliamo $\vec{q}'_{01}$ e $\vec{q}'_{02}$ si ha $\vec{q}'_{01} + \vec{q}'_{02} = 0$. Infatti:

$$\vec{q}'_{01} = m_1 \vec{v}'_{01} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_0$$

$$\vec{q}'_{02} = m_2 \vec{v}'_{02} = -\frac{m_2 m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_0$$

Dunque nel centro di massa la quantità di moto totale è zero. Tuttavia essendo inerziale $Ox'y'z'$ si avrà la conservazione della quantità di moto totale durante l'urto e ciò avviene:

$$\vec{q}'_1 + \vec{q}'_2 = 0$$

Per motivi di simmetria, la trattazione dei problemi d'urto assume la sua massima semplicità nel sistema del centro di massa. Tuttavia la definizione delle condizioni iniziali (lancio del proiettile) e la misura delle grandezze finali vengono effettuate nel sistema OXYZ. Per conseguenza la procedura più efficace per la trattazione dei problemi d'urto è la seguente:

a) Definizione delle configurazioni iniziali nel sistema $Oxyz$

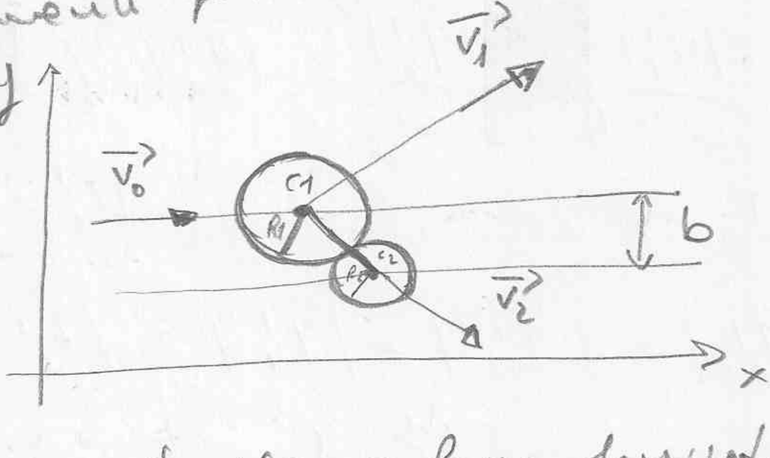
b) Trasformazione al sistema $Cx'y'z'$

c) Calcolo della cinematica finale e delle conseguenze dinamiche nel sistema $Cx'y'z'$

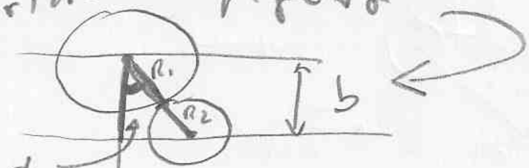
d) Trasformazione dei risultati da $Cx'y'z'$ a $Oxyz$.

"URTO ELASTICO"

Consideriamo due sfere che compiono un urto. Nel sistema $Oxyz$ la sfera proiettile (raggio R_1 e massa m_1) si muove inizialmente con velocità $\vec{v_0}$; la sfera bersaglio (di raggio R_2 e massa m_2) è inizialmente ferma.



Supponiamo che non vi siano forze dissipative di nessun genere (in questo caso parliamo di <u>urto elastico</u>). La distanza b è detta <u>parametro d'urto</u> ed è espressa come $\cos\alpha = \dfrac{b}{R_1+R_2}$ dove α è l'angolo descritto in figura



In base alle ipotesi dinamiche fatte sappiamo innanzitutto che $\vec{I}_{i2} = -\vec{I}_{i1}$ e che la loro direzione è quella della congiungente C_1C_2.
Inoltre non essendoci forze dissipative si conserva l'energia cinetica tra il prima ed il dopo dell'urto. Questo deve valere in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.
Nel sistema $Cx'y'z'$ si ha:

$$K'_0 = \frac{|\vec{q}\,'_{01}|^2}{2m_1} + \frac{|\vec{q}\,'_{02}|^2}{2m_2} = |\vec{q}\,'_{02}|^2\left(\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}\right)$$

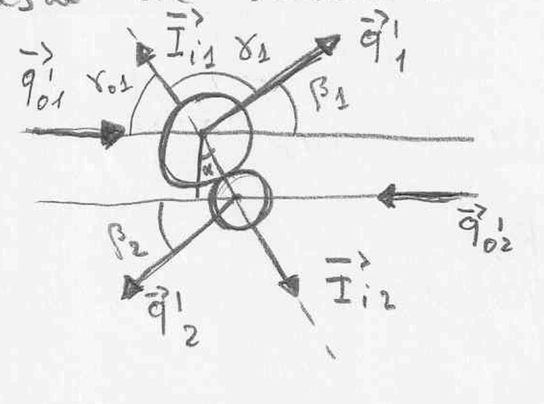
poiché $\vec{q}\,'_{01} = -\vec{q}\,'_{02}$. Lo stesso deve valere dopo l'urto:

$$K' = \frac{|\vec{q}\,'_1|^2}{2m_1} + \frac{|\vec{q}\,'_2|^2}{2m_2} = |\vec{q}\,'_1|^2\left(\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}\right)$$

Ma essendo l'urto elastico $K'_0 = K'$ abbiamo

$$|\vec{q}\,'_{01}| = |\vec{q}\,'_{02}| = |\vec{q}\,'_1| = |\vec{q}\,'_2| = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}|\vec{V}_0|$$

concludiamo, quindi, che nel sistema $Cx'y'z'$ si conserva il modulo delle quantità di moto delle due particelle.
Resta da calcolare gli angoli di uscita ed in particolare β_1 (angolo tra $\vec{q}\,'_1$ e $\vec{q}\,'_{01}$). Stesso discorso per β_2 (angolo $\vec{q}\,'_2$ e $\vec{q}\,'_{02}$).



Considerato che i moduli di $\vec{q}'_{01}$ e $\vec{q}'_1$ sono uguali e che $\Delta\vec{q}'_1$ deve essere diretto come $\vec{I}'_{i1}$ abbiamo:

$\left[\; \vec{I}'_{i1} = \vec{q}'_1 - \vec{q}_{01} \right.$

$$\gamma_{01} = \gamma_1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \pi - 2\gamma_{01}$$

Inoltre $\quad \alpha + \gamma_{01} + \pi/2 = \pi \quad \Rightarrow \quad \gamma_{01} = \pi/2 - \alpha$

otteniamo:

$$\beta_1 = \pi - 2(\pi/2 - \alpha) = 2\alpha$$

dove α è tale che $\cos\alpha = \dfrac{b}{R_1 + R_2}$

Dunque, ora, abbiamo tutte le informazioni!

$$\begin{cases} |\vec{v}'_1| = \dfrac{|\vec{q}'_1|}{m_1} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}|\vec{v}_0| \\[2ex] |\vec{v}'_2| = \dfrac{|\vec{q}'_2|}{m_2} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}|\vec{v}_0| \end{cases}$$

Utilizzando le trasformazioni galileiane Calcoliamo otteniamo le velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Scriviamo le componenti nel sistema $Cx'y'z'$:

$$\begin{cases} (\vec{v}'_1)_x = |\vec{v}'_1|\cos\beta_1 \\[1ex] (\vec{v}'_1)_y = |\vec{v}'_1|\sin\beta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\vec{v}'_2)_x = -|\vec{v}'_2|\cos\beta_2 \\[1ex] (\vec{v}'_2)_y = -|\vec{v}'_2|\sin\beta_2 \end{cases}$$

ed applicando le trasformazioni inverse abbiamo:

$$\begin{cases} (\vec{v}_1)_x = (\vec{v}_c)_x + (\vec{v}'_1)_x = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}|\vec{v}_0| + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}|\vec{v}_0|\cos 2\alpha \\[2ex] (\vec{v}_1)_y = (\vec{v}_c)_y + (\vec{v}'_1)_y = 0 + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}|\vec{v}_0|\sin 2\alpha \end{cases}$$

da cui

$$(13)\quad\begin{cases} (\vec{V}_1)_x = \dfrac{|\vec{V}_0|}{m_1+m_2}\left(m_1 + m_2 \cos 2\alpha\right) \\[2ex] (\vec{V}_1)_y = \dfrac{m_2 |\vec{V}_0|}{m_1+m_2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

In maniera analoga per $\vec{V}_2$:

$$\begin{cases} (\vec{V}_2)_x = (\vec{V}_c)_x + (\vec{V}_2')_x = \dfrac{m_1 |\vec{V}_0|}{m_1+m_2} - \dfrac{m_1}{m_1+m_2} |\vec{V}_0| \cos \beta_1 \\[2ex] (\vec{V}_2)_y = (\vec{V}_c)_y + (\vec{V}_2')_y = 0 - \dfrac{m_1}{m_1+m_2} |\vec{V}_0| \sin \beta_1 \end{cases}$$

da cui

$$(14)\quad\begin{cases} (\vec{V}_2)_x = \dfrac{m_1 |\vec{V}_0|}{m_1+m_2}\left(1 - \cos 2\alpha\right) \\[2ex] (\vec{V}_2)_y = -\dfrac{m_1 |\vec{V}_0|}{m_1+m_2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

N.B. Se il moto avviene inizialmente lungo l'asse x, cioè non vi è contributo lungo l'asse y, anche dopo l'urto dobbiamo avere lungo l'asse y un contributo netto pari a zero. Infatti $(\vec{V}_2)_y + (\vec{V}_1)_y \neq 0$ ma ciò che deve essere nullo è la somma delle quantità di moto lungo l'asse y. Infatti

$$m_2 (\vec{V}_2)_y + m_1 (\vec{V}_1)_y = 0 \quad !!!$$

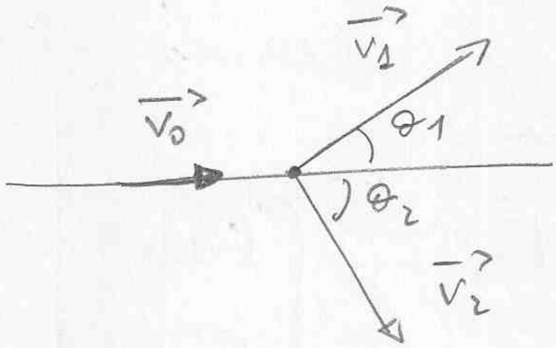
Quanto riportato è un caso generale di urto tra due particelle (manca solo il caso in cui il bersaglio sia anch'esso in moto). Vogliamo, ora, ottenere due casi più semplici quali conseguenze di quanto considerato.

URTO ELASTICO FRA SFERE DI UGUALE MASSA

Quindi, $m_1 = m_2$. Le relazioni ($\square$) e ($\triangle$) divengono

$$\begin{cases} (\vec{V}_1)_x = \dfrac{|\vec{V}_0|}{2}(1+\cos 2\alpha) \\ (\vec{V}_1)_y = \dfrac{|\vec{V}_0|}{2}\sin 2\alpha \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} (\vec{V}_2)_x = \dfrac{|\vec{V}_0|}{2}(1-\cos 2\alpha) \\ (\vec{V}_2)_y = -\dfrac{|\vec{V}_0|}{2}\sin 2\alpha \end{cases}$$

Calcoliamo gli angoli θ_1 e θ_2 (come che divergono)



$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{(\vec{V}_1)_y}{(\vec{V}_1)_x} = \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \\ \operatorname{tg}\theta_2 = \dfrac{(\vec{V}_2)_y}{(\vec{V}_2)_x} = -\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} \end{cases}$$

Notiamo che

$$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha(1-\cos 2\alpha)}{1-\cos^2 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cancel{\sin 2\alpha}(1-\cos 2\alpha)}{\sin^{\cancel{2}} 2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$$

Quindi,

$$\operatorname{tg}\theta_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta_2}$$ (condizione di ortogonalità)

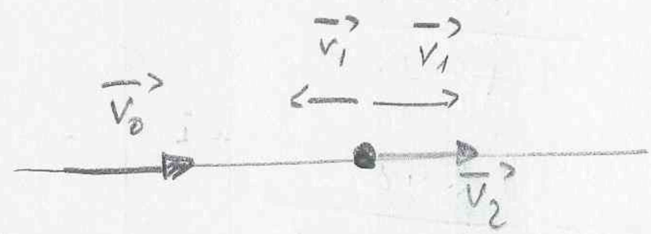
cioè $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$.

In un urto elastico fra sfere che hanno uguale massa, nel sistema del laboratorio $Oxyz$, le direzioni delle velocità dopo l'urto formano fra di loro un angolo retto.

URTO ELASTICO FRONTALE (CENTRALE) FRA DUE SFERE

L'urto frontale è caratterizzato da $b=0$ (parametro d'urto); da cui segue $\cos\alpha = 0$ cioè $\alpha = \pi/2$. Ma pure $\cos 2\alpha = -1$ e $\sin 2\alpha = 0$, le relazioni (14) e (15) divengono:

$$\begin{cases} (\vec{v}_1)_x = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,|\vec{v}_0| \\ (\vec{v}_2)_y = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} (\vec{v}_2)_x = \dfrac{2 m_1}{m_1 + m_2}\,|\vec{v}_0| \\ (\vec{v}_2)_y = 0 \end{cases}$$



Notare che m_2 si muoverà sempre in avanti, mentre m_1 si muoverà in avanti se $m_1 > m_2$, tornerà indietro se $m_1 < m_2$, resterà ferma se $m_1 = m_2$.

In quest'ultimo caso ($m_1 = m_2$) si ottiene:

$$\begin{cases} (\vec{v}_1)_x = 0 \\ (\vec{v}_1)_y = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} (\vec{v}_2)_x = |\vec{v}_0| \\ (\vec{v}_2)_y = 0 \end{cases}$$

cioè la sfera m_1 "cede" la sua velocità alla sfera m_2.

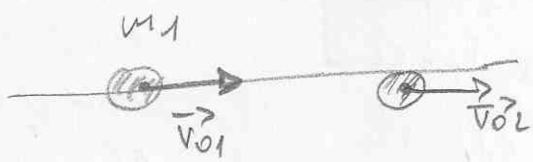
Generalizziamo i risultati ottenuti ([illegible]) e ([illegible]) nel caso in cui anche il bersaglio è in moto. Supponendo di avere $\vec{V}_{01}$ e $\vec{V}_{02}$, la velocità del centro di massa diviene:

$$\vec{V}_{0C} = \frac{m_1 \vec{V}_{01} + m_2 \vec{V}_{02}}{m_1+m_2} = \vec{V}_C$$

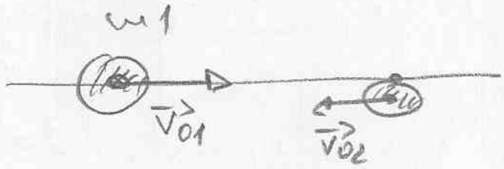
da cui le velocità di m_1 ed m_2 prima dell'urto nel sistema $Cx'y'z'$ sono:

$$\begin{cases} \vec{V}'_{01} = \vec{V}_{01} - \vec{V}_C = \vec{V}_{01} - \dfrac{m_1 \vec{V}_{01} + m_2 \vec{V}_{02}}{m_1+m_2} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\left(\vec{V}_{01} - \vec{V}_{02}\right) \\[2ex] \vec{V}'_{02} = \vec{V}_{02} - \vec{V}_C = \vec{V}_{02} - \dfrac{m_1 \vec{V}_{01} + m_2 \vec{V}_{02}}{m_1+m_2} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\left(\vec{V}_{02} - \vec{V}_{01}\right) \end{cases}$$

Limitandoci al caso in cui le due sfere si muovono con la stessa direzione (ma verso anche diverso)



oppure



(È ovvio che $|\vec{V}_{01}| > |\vec{V}_{02}|$)

Nel centro di massa la quantità di moto si conserva e vale per ogni sfera in modulo $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}|\vec{V}_{01} - \vec{V}_{02}|$, quindi:

$$\begin{cases} (\vec{V}'_1)_x = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\left(|\vec{V}_{01}| - |\vec{V}_{02}|\right)\cos 2\alpha \\[2ex] (\vec{V}'_1)_y = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\left(|\vec{V}_{01}| - |\vec{V}_{02}|\right)\sin 2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\vec{V}'_2)_x = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\left(|\vec{V}_{01}| - |\vec{V}_{02}|\right)\cos 2\alpha \\[2ex] (V'_2)_y = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\left(|\vec{V}_{01}| - |\vec{V}_{02}|\right)\sin 2\alpha \end{cases}$$

da cui nel sistema $Oxyz$:

$$\begin{cases} (\vec{V}_1)_x = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}(v_{01}-v_{02})\cos 2\alpha + \dfrac{m_1 v_{01}+m_2 v_{02}}{m_1+m_2} \\ (\vec{V}_1)_y = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}(v_{01}-v_{02})\sin 2\alpha \end{cases} \qquad (\circ)$$

$$\begin{cases} (\vec{V}_2)_x = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}(v_{02}-v_{01})\cos 2\alpha + \dfrac{m_1 v_{01}+m_1 v_{02}}{m_1+m_2} \\ (\vec{V}_2)_y = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}(v_{02}-v_{01})\sin 2\alpha \end{cases} \qquad (\circ\circ)$$

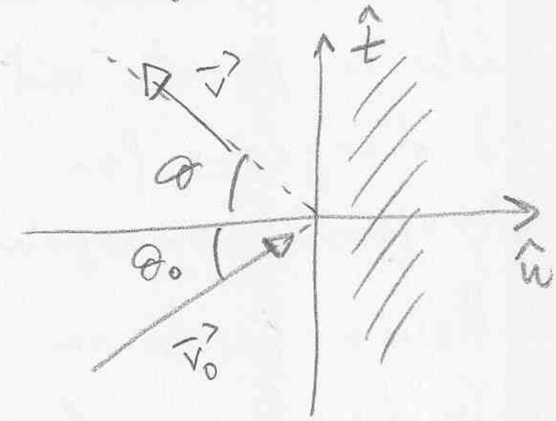
dove $\cos\alpha = \dfrac{b}{R_1+R_2}$

URTO ELASTICO DI UNA SFERA CONTRO PARETE DI MASSA INFINITA

L'urto elastico di una sfera di massa m contro una parete di massa infinita può essere trattato in termini molto semplici. In virtù della conservazione della quantità di moto totale, la parete subisce una variazione di quantità di moto uguale e opposta alla variazione della quantità di moto $\Delta\vec{q}$ subita dalla particella. Poiché la parete è inizialmente ferma, il modulo della sua quantità di moto $\vec{q}_p$ è pari al modulo di $\Delta\vec{q}$: $|\vec{q}_p| = |\Delta\vec{q}|$. Tuttavia l'energia cinetica della parete diviene nulla nel limite $M \to \infty$. L'energia cinetica del sistema coincide con l'energia cinetica della sfera. Perciò nell'urto elastico si conserva l'energia cinetica della sfera (e dunque il modulo della sua velocità):

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_0|$$

D'altro canto in virtù delle assenze di forze di attrito, l'impulso subito dalla particella è ortogonale alla parete. Procedendo $\vec{I} = \Delta\vec{q}$ otteniamo:



$$\begin{cases} (\vec{I})_n = (\Delta\vec{q})_n \\ 0 = (\Delta\vec{q})_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_n = m v_n - m v_{0n} = -m v \cos\theta - m v_0 \cos\theta_0 \\ 0 = m v_t - m v_{0t} \end{cases}$$

Con l'aggiunta che $|\vec{v}| = |\vec{v}_0|$ otteniamo:

$$\begin{cases} -m v_0 (\cos\theta + \cos\theta_0) = I_n \\ m v_0 (\sin\theta - \sin\theta_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \theta_0$$

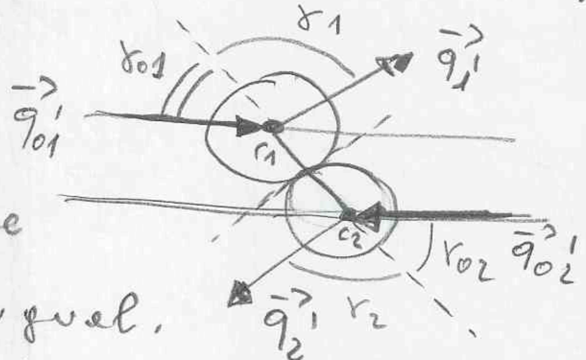
e $\quad I_n = -2 m v_0 \cos\theta_0$

Riepilogando $\vec{I}_s = -2 m v_0 \cos\theta_0 \, \hat{n}$ (impulso subito dalla sfera) e $\vec{I}_p = 2 m v_0 \cos\theta_0 \, \hat{u}$ (impulso subito dalla parete)

"URTO ANELASTICO"

In generale negli urti fra particelle vi è sempre attrito e vi sono nel contatto sempre forze dissipative. Questi aspetti sono responsabili della mancata conservazione dell'energia cinetica traslazionale totale del sistema. Si parla in questi casi di urti anelastici.

Ponendoci ancora una volta nel sistema $Cx'y'z'$ in cui $\vec{Q}'_0 = \vec{q}'_{01} + \vec{q}'_{02} = 0$



le particelle sono costrette anche in questo ad emergere in direzioni fra di loro uguali ed opposte con uguale quantità di moto $\vec{Q}' = \vec{q}'_1 + \vec{q}'_2 = 0$.

Tuttavia poiché in questo caso non si conserva l'energia traslazionale, non si ha più la conservazione del modulo delle varie quantità di moto.

Inoltre l'angolo γ_1 non è uguale a γ_{01}.

Le informazioni puramente geometriche non più sufficienti a risolvere la cinematica dell'urto, ed è necessario introdurre nel problema ulteriori informazioni fenomenologiche. Nel caso di urti anelastici è usuale il caso che il modulo della quantità di moto delle particelle emergenti dall'urto sia una frazione praticamente fissa, ε, del modulo della quantità di moto che le particelle avevano prima dell'urto. Ciò equivale a dire che l'energia cinetica finale K' è una frazione fissa ε^2 dell'energia cinetica K'_0 prima dell'urto nel sistema $Cx'y'z'$. Il coefficiente ε viene detto coefficiente di restituzione dell'urto anelastico.

Di norma $0 < \varepsilon < 1$.

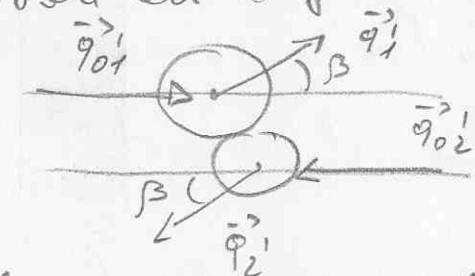
Quando è noto (empiricamente) il coefficiente ε, le equazioni per risolvere l'urto anelastico nel sistema $Cx'y'z'$ sono:

$$\vec{Q}' = \vec{Q}'_0 = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \vec{q}'_1 = -\vec{q}'_2 \qquad \left(\begin{array}{c}\text{CONSERV.}\\ \text{QUANTITÀ MOTO}\end{array}\right)$$

(Δ)

$$K' = \varepsilon^2 K'_0 \qquad \text{oppure} \qquad |\vec{q}'_1| = \varepsilon |\vec{q}'_{01}| \qquad \left(\begin{array}{c}\text{COEFF.}\\ \text{RESTITUZIONE}\end{array}\right)$$

Si tratta di quattro equazioni scalari a fronte delle sei incognite $\vec{q}'_1$ e $\vec{q}'_2$. Le equazioni (Δ) non sono dunque sufficienti per conoscere completamente la cinematica. Dovremmo conoscere il piano contenente le particelle emergenti e l'angolo β che $\vec{q}'_1$ forma con $\vec{q}'_{01}$ (uguale all'angolo che $\vec{q}'_2$ forma con $\vec{q}'_{02}$). Queste



informazioni erano ricavabili, nel caso di urto elastico, dalla conoscenza del parametro d'impatto b. Ricordiamo che in questo caso i corpi nell'intervallo in cui sono a contatto si deformano (e non ha senso neanche di parlare di sfere) e la geometria non è "rigida".

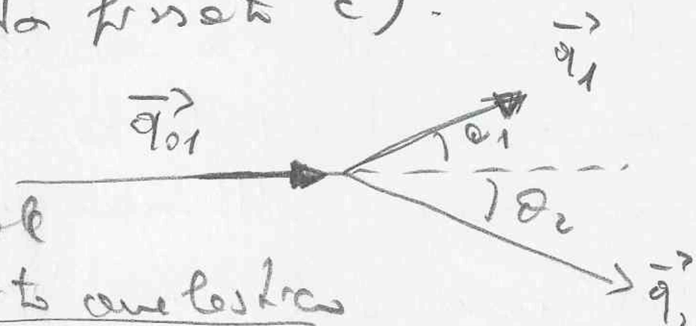
Il piano in cui l'urto avviene (che è lo stesso sia in $Oxyz$ che $Cx'y'z'$) è individuato misurando in $Oxyz$ il piano contenente $\vec{q}_{01}$ e $\vec{q}_1$; questo piano contiene necessariamente anche $\vec{q}_2$.

In tale piano, considerando β come un parametro, è immediato verificare che al posto di (◎) e (◎◎) nel sistema $Oxyz$ si ottiene per l'urto anelastico

$$\begin{cases} (\vec{V}_1)_x = \dfrac{\varepsilon m_2}{m_1+m_2}(v_{01}-v_{02})\cos\beta + \dfrac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1+m_2} \\[2ex] (\vec{V}_1)_y = \dfrac{\varepsilon m_2}{m_1+m_2}(v_{01}-v_{02})\sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\vec{V}_2)_x = \dfrac{\varepsilon m_1}{m_1+m_2}(v_{02}-v_{01})\cos\beta + \dfrac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1+m_2} \\[2ex] (\vec{V}_2)_y = \dfrac{\varepsilon m_1}{m_1+m_2}(v_{02}-v_{01})\sin\beta \end{cases}$$

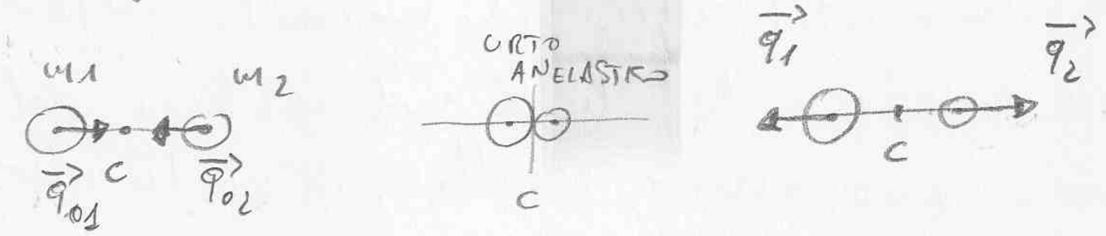
Risulta immediatamente che il rapporto $\dfrac{(\vec{V}_1)_y}{(\vec{V}_1)_x}$, così come il rapporto $\dfrac{(\vec{V}_2)_y}{(\vec{V}_2)_x}$, dipende dal parametro incognito β (una volta fissato ε).



Un caso particolare notevole si ha quando $\beta = \pi$ (urto anelastico frontale). In questo caso otteniamo

$$\begin{cases} (\vec{V}_1)_x = \dfrac{\varepsilon m_2 (v_{02} - v_{01})}{m_1+m_2} + \dfrac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1+m_2} \\[2ex] (\vec{V}_1)_y = 0 \end{cases}$$

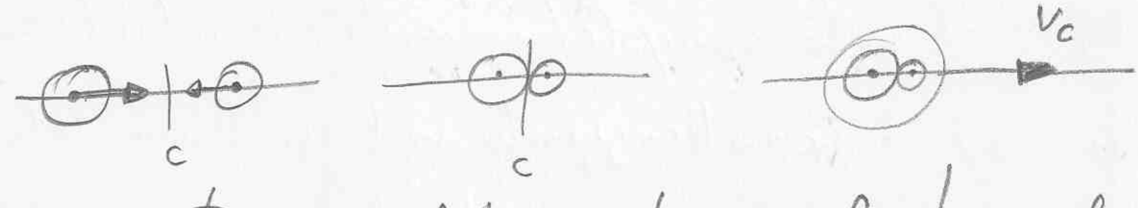
$$\begin{cases} (\vec{V}_2)_x = \dfrac{\varepsilon m_1 (v_{01} - v_{02})}{m_1 + m_2} + \dfrac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} \\ (\vec{V}_2)_y = 0 \end{cases}$$



Un altro caso notevole si ha quando $\varepsilon = 0$ (<u>urto completamente anelastico</u>). In questo caso otteniamo

$$\begin{cases} (\vec{V}_1)_x = \dfrac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} \\ (\vec{V}_1)_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\vec{V}_2)_x = \dfrac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} \\ (\vec{V}_2)_y = 0 \end{cases}$$

cioè i corpi restano uniti e si muovono con la velocità del centro di massa.



In un urto completamente anelastico, le particelle emergono dall'urto con velocità fra loro uguali e pari alla velocità $\vec{V}_{0C} = \vec{V}_C$ del centro di massa. Ciò è d'altra parte evidente, dato che $\varepsilon = 0$ implica che l'energia cinetica nel sistema del centro di massa è nulla; ciò è come dire che in un urto completamente anelastico le particelle dopo l'urto sono ferme nel sistema del centro di massa.

Va notato che non è in generale possibile che un urto (per quanto anelastico) lasci le particelle ferme nel laboratorio (a meno che questo non coincida con il sistema del centro di massa). Infatti l'energia cinetica totale K nel sistema del laboratorio può essere scritta, in virtù del teorema di Koenig

$$K_0 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)|\vec{V}_{0c}|^2 + K_0' \quad \text{(prima)}$$

$$K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)|\vec{V}_c|^2 + K' \quad \text{(dopo)}$$

Noto che $\vec{V}_{0c} = \vec{V}_c$ l'energia cinetica del centro di massa resta costante; la non conservazione (anelasticità) può riguardare dunque solo l'energia cinetica K' del moto intorno al centro di massa; $K' = \varepsilon^2 K_0'$. L'urto completamente anelastico ($\varepsilon = 0$, $K' = 0$) è caratterizzato nel sistema del laboratorio ($Oxyz$) dal fatto che le particelle dopo l'urto procedono insieme ($\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{V}_c$).