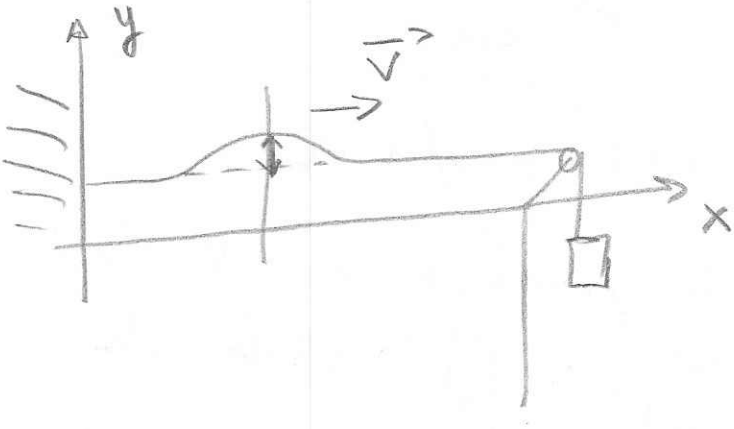
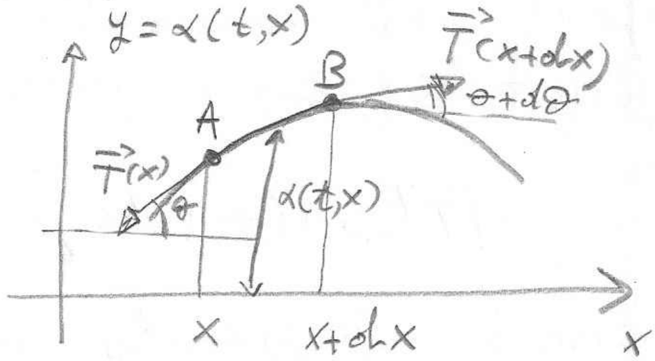
OSCILLAZIONI SU UNA CORDA

Le oscillazioni di una corda rientrano nella categoria delle cosiddette oscillazioni trasversali, ovvero l'oscillazione avviene lungo una direzione ortogonale alla direzione di propagazione. Osservando, appunto, le onde trasversali elastiche in una corda tesa, si riscontra che la loro velocità di propagazione aumenta all'aumentare della tensione del filo. Ciò è comprensibile se si pensa che proprio la tensione è responsabile delle forze elastiche che richiamano gli elementi della corda verso la posizione di equilibrio. Noto che avviene ortogonalmente alla direzione di propagazione





Scriviamo ora l'equazione dinamica di una corda tesa. Consideriamo una corda sottile e omogenea, e scegliamo l'asse x parallelo alla configurazione rettilinea che la corda assume a riposo in virtù della tensione $\vec{T}$ ad essa applicata (trascuriamo l'effetto della forza peso in quest'ambito). Sia

$\lambda = \frac{dm}{dl}$ la densità lineare della corda.

Prendiamo in esame la dinamica del tratto di corda compreso tra x e $x+dx$ la cui massa è $dm = \lambda dx$ e che all'istante t, è dislocato di una quantità $y = \alpha(t,x)$ perpendicolarmente all'asse x. Per definizione di tensione del filo, gli effetti dinamici esercitati sul tratto dx da parte del rimanente della corda possono essere schematizzati tramite le due forze $\vec{T}(x)$ e $\vec{T}(x+dx)$ applicate negli estremi A e B del tratto considerato.

A causa della curvatura del tratto AB le due tensioni, pur uguali in modulo, non avranno equilibrio poiché non sono allineate. La legge $\vec{F} = m\vec{a}$ proiettata lungo l'asse y diviene:

$$|\vec{T}| \sin(\theta + d\theta) - |\vec{T}| \sin\theta = dm\, a$$

essendo θ piccolo possiamo porre $\sin\theta \simeq \theta$ ed l'accelerazione (componente lungo y) è data da

$$\frac{d^2}{dt^2} y = \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t,x) = \frac{\partial^2 \alpha(t,x)}{\partial t^2}.$$

Quindi otteniamo

$$\cancel{|\vec{T}|\theta} + |\vec{T}|\, d\theta \cancel{- |\vec{T}|\theta} = \lambda\, dx\, \frac{\partial^2 \alpha(t,x)}{\partial t^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\lambda}{|\vec{T}|} \frac{\partial^2 \alpha(t,x)}{\partial t^2}$$

Da notare che

$$\theta \simeq tg\,\theta = \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$, differenziando membro a membro $$d\theta = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\, dx$$

Quindi l'equazione diviene:

$$\frac{1}{\cancel{dx}} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \cancel{dx} = \frac{\lambda}{|\vec{T}|} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \alpha(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{|\vec{T}|} \frac{\partial^2 \alpha(t,x)}{\partial t^2} = 0$$

Da notare che $\frac{\lambda}{|\vec{T}|}$ ha le dimensioni dell'inverso del prodotto delle velocità. Vedremo che $\sqrt{|\vec{T}|/\lambda}$ rappresenta la velocità di propagazione dell'onda.

Per il momento poniamo tale grandezza pari a v e otteniamo l'equazione delle corde vibranti o meglio l'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \alpha(t,x) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \alpha(t,x) = 0$$

È un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine lineare ed omogenea. Spesso la si scrive introducendo l'operatore differenziale d'Alembertiano $\square \doteq \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$:

$$\square\, \alpha(t,x) = 0 \iff \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \alpha(t,x) = 0$$

Tralasciando gli aspetti matematici (saranno trattati nel corso di matematica) analizziamo ora aspetti utili per le forze. Innanzitutto lo spostamento della corda è funzione sia del tempo t che della sua generica posizione. Quindi $\alpha = f(t,x)$. La classe di soluzioni di $\square f(t,x) = 0$ è molto ampia ma possiamo notare che una qualsiasi funzione f della grandezza $\xi = x \pm vt$ è soluzione dell'equazione. Infatti notiamo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x \pm vt) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\xi) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f(\xi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} (\pm v) = \pm v \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

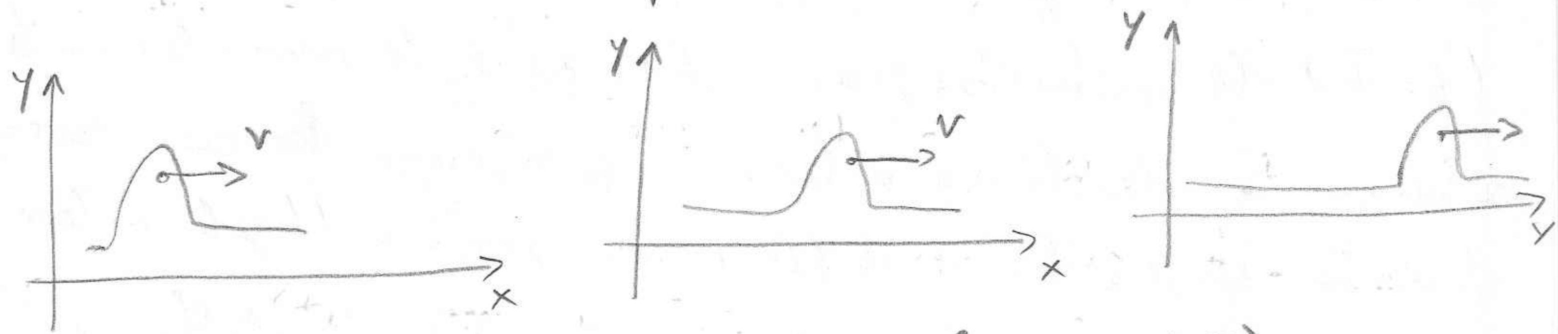
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x \pm vt) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\xi) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x \pm vt) = \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v^2} v^2 \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} = 0$$

È da notare che la scelta $x \pm vt$ è connessa semplicemente con il senso di propagazione dell'onda. Infatti se $\xi = x \pm vt \Rightarrow x = x(t) = \xi \mp vt$ che rappresenta un moto rettilineo ed uniforme ed in particolare la scelta $x - vt$ porta ad un moto per cui al passare del tempo $x(t)$ è positivo, mentre la scelta $x + vt$ porta ad un $x(t)$ negativo. Tale scelta dipende soltanto dalla scelta dell'asse di riferimento o meglio ancora se l'onda si propaga verso destra o verso sinistra.

Possiamo quindi interpretare la propagazione ondosa come il moto rettilineo ed uniforme. La corda resta sempre nella stessa posizione, mentre la sua perturbazione si propaga con velocità $\pm v$.
È possibile ora interpretare $\sqrt{|\vec{T}|/\lambda}$ come la velocità di propagazione dell'onda sulla corda vibrante.

$$v = \sqrt{|\vec{T}|/\lambda}$$ (VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE)



Quindi
(SOLUZIONE)

$$\Box f(t,x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(t,x) = f(x \pm vt)$$

Durante il corso di matematica tale conclusione sarà ottenuta rigorosamente.

È di particolare interesse il caso in cui la funzione $f(x \pm vt)$ sia di tipo sinusoidale oppure cosinusoidale. In particolare è soluzione anche la funzione:

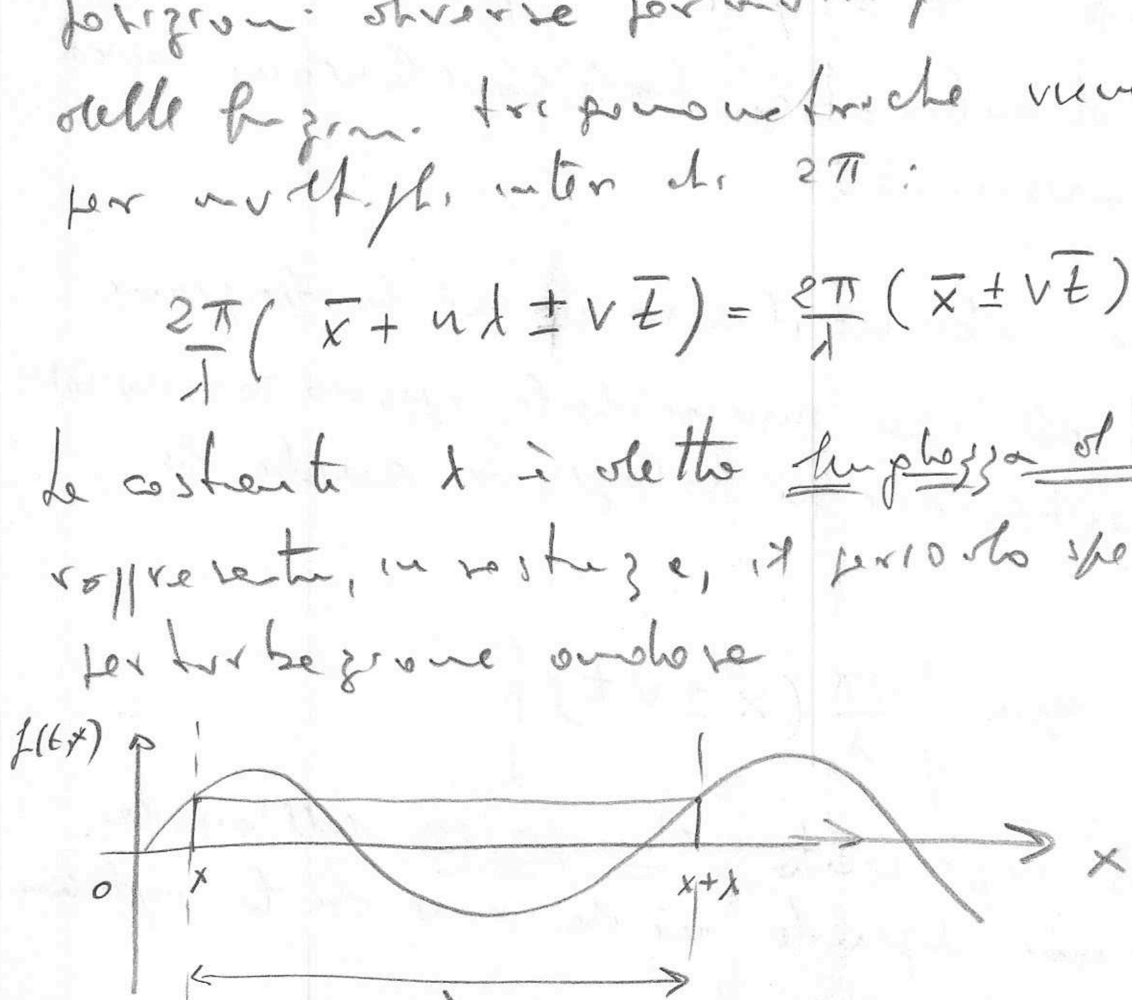
$$f(t,x) = A \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm vt)\right\}$$

La costante A rappresenta l'ampiezza dell'onda.
Il fatto che A non dipende né da x né da t implica

l'energia di dissipazione (l'onda non si attenua mentre si propaga). La presenza del fattore $x \pm vt$ nell'argomento ~~della sinusoide~~ garantisce che essa rappresenti un'onda che si propaga lungo l'asse x con velocità $\pm v$. Il fattore $\frac{2\pi}{\lambda}$, con λ avente le dimensioni di una lunghezza, rende adimensionale l'argomento del seno. Inoltre esso garantisce che per ogni assegnato valore del tempo ($t = \bar{t}$) la perturbazione $f(t,x)$ e le sue derivate assumono lo stesso valore in posizioni la cui coordinata spaziale x differisca per multipli interi di λ ($x = \bar{x}$, $x = \bar{x} + \lambda$, ... $x = \bar{x} + n\lambda$). Infatti in posizioni diverse per multipli di λ l'argomento delle funzioni trigonometriche viene modificato per multipli interi di 2π:

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\bar{x} + n\lambda \pm v\bar{t}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\bar{x} \pm v\bar{t}\right) + n\,2\pi$$

La costante λ è detta <u>lunghezza d'onda</u>. Essa rappresenta, in sostanza, il periodo spaziale della perturbazione ondosa



4

Un'onda sinusoidale ammette anche un periodo temporale $T = \lambda/v$. Si verifica facilmente che in ogni posizione $\bar{x}$, l'argomento delle funzioni trigonometriche differisce per multipli di 2π e istanti di tempo t diversi per multipli di $T = \lambda/v$;

Infatti

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left[\bar{x} \pm v(\bar{t} + nT)\right] = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\bar{x} \pm v\left(\bar{t} + \frac{n\lambda}{v}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\left[\bar{x} \pm v\bar{t}\right] + n\,2\pi$$

Dunque fra il periodo T e la lunghezza d'onda λ sussiste la relazione

$$\lambda = vT$$

Se ci si pone in una certa posizione $x = \bar{x}$ la soluzione può essere scritta come

$$f(t, \bar{x}) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

con $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$ e $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} + j\pi$

con $j = 0, 1$ a seconda se scegliamo $x - vt$ o $x + vt$.

In un punto fissato $\bar{x}$ la perturbazione è di tipo armonico con pulsazione $\omega = 2\pi/T$.

Un'onda sinusoidale $A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm vt)\right]$ può essere anche scritta in forme equivalenti:

$$f(t,x) = A \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

dove $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ è detto numero d'onda (o vettore d'onda)

$\omega = \dfrac{2\pi V}{\lambda}$ è detta pulsazione e φ è una fase arbitraria che dipende dalle condizioni iniziali.

È da osservare che un'onda sinusoidale, detta anche armonica, rappresenta una schematizzazione estrema: oltre ad essere forma rigorosamente sinusoidale, un'armonica dovrebbe svilupparsi per un tempo infinito e occupare tutto l'asse delle x.

Una porzione limitata di onda armonica è detta <u>treno di onde sinusoidali</u> o d'onda armonica, a parte la sua capacità di descrivere con buona approssimazione fenomeni sinusoidali caratterizzati da treni d'onda abbastanza lunghi (temporalmente e spazialmente) rispetto al periodo T ed alla lunghezza d'onda λ, riveste importanza notevole in virtù del <u>principio di sovrapposizione</u> e del teorema di Fourier.

Il <u>PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE</u> stabilisce quanto segue: se in un mezzo elastico si inviano simultaneamente una o più perturbazioni ondose $\alpha_1(t,x)$, $\alpha_2(t,x)$, $\alpha_3(t,x)$, ...

Il risultato è una propagazione ondosa descritta dalla funzione:

$$\alpha(t,x) = \alpha_1(t,x) + \alpha_2(t,x) + \alpha_3(t,x) + \dots$$

ciò vale a condizione che le singole perturbazioni siano sufficientemente piccole perché la perturbazione risultante non porti il mezzo a lavorare oltre il limite di elasticità.

Il principio di sovrapposizione discende dalla linearità dell'equazione delle onde, nella quale il coefficiente v rappresenta una caratteristica del mezzo ed è dunque indipendente dalla modalità di propagazione. Infatti essendo α_1 e α_2 due perturbazioni per cui $\Box\alpha_1 = 0$ e $\Box\alpha_2 = 0$ sommando membro a membro abbiamo:

$$\Box\alpha_1 + \Box\alpha_2 = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\alpha_1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\alpha_2 = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha_2 + \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\alpha_1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\alpha_2\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\alpha_1+\alpha_2) = 0$$

$$\Box(\alpha_1+\alpha_2) = 0$$

Per il teorema di Fourier si rimanda al corso di analisi.

Quando in un mezzo elastico inizialmente in quiete si produce un'onda il mezzo comincia a muoversi in un campo di forze acquistando così energia cinetica e potenziale. Vogliamo, ora, ottenere qualche informazione sul contenuto energetico di un'onda elastica, partendo dall'ipotesi che ogni elemento del mezzo possa oscillare come un oscillatore armonico vincolato ad oscillare intorno ad una posizione fissa. La legge del moto di ogni elemento è pertanto:

$$\alpha(t,x) = A \sin(kx - \omega t)$$

Ricordiamo che l'energia di un oscillatore armonico di massa m che oscilli con pulsazione ω ed ampiezza A si mantiene costante nel tempo e vale

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \quad (\bullet)$$

Consideriamo per fissare le idee, una sbarra molto lunga di materiale elastico. Se un estremo della sbarra viene sollecitato da una sorgente oscillante, nella sbarra si propaga un'onda. Via via che l'onda si propaga, una nuova porzione della sbarra precedentemente ferme, comincia a muoversi ed acquista energia. Questa energia viene fornita dalla sorgente e per arrivare fino al fronte del treno d'onde fluisce anche attraverso ogni regione della sbarra già interessata dall'onda.

In generale, data un'onda piana che si muove nella direzione dell'asse x, ci proponiamo di calcolare l'energia meccanica che fluisce nell'unità di tempo attraverso una regione di area unitaria disposta perpendicolarmente alla direzione di propagazione:

$$\frac{dE}{dS' dt} \doteq I \qquad \text{INTENSITÀ DELL'ONDA}$$

l'energia che fluisce nell'intervallo di tempo dt attraverso la regione di superficie dS' ortogonale alla velocità $\vec{v}$ è pari all'energia contenuta nel volume di base dS' e altezza $|\vec{v}|dt$:

$$dE = u\, dS' |\vec{v}|\, dt$$

dove u è la densità di energia per unità di volume. Quindi

$$I = \frac{dE}{dS' dt} = \frac{u\, dS' |\vec{v}|\, dt}{dS'\, dt} = u |\vec{v}|$$

la densità d'energia si può essere stimata alla luce di (*) per un elemento di massa dm:

$$dE = \frac{1}{2}\, dm\, \omega^2 A^2$$

$$u = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dV}\,\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 A^2$$

dove ρ è la densità volumetrica - Quindi l'intensità I dell'onda è data da

$$I = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 A^2 |\vec{v}|$$ INTENSITÀ DI UN'ONDA

FENOMENO DI INTERFERENZA

Consideriamo due onde "COERENTI" cioè con stesso k e stessa ω ma sfasate di δ - Vogliamo analizzare il moto risultante ed in particolare il moto ondoso

$$\alpha_1(t,x) = A \sin(kx - \omega t)$$
$$\alpha_2(t,x) = A \sin(kx - \omega t + \delta)$$

$$\alpha(t,x) = \alpha_1(t,x) + \alpha_2(t,x) =$$
$$= A\left[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \delta)\right]$$

$\alpha(t,x)$ sembra non essere un'onda perché non vi compare la dipendenza $(x \pm vt)$, ma utilizzando un'identità trigonometrica:

$$\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

otteniamo:

$$\alpha(t,x) = 2A\cos\frac{\delta}{2}\,\sin(kx-\omega t-\delta/2)$$

Tale forma ora presenta una dipendenza da $x\pm vt$ attraverso $kx\pm\omega t$. Quindi è un'onda con la stessa lunghezza d'onda e stesso periodo ma l'ampiezza dell'onda non è pari alla somma delle due ampiezze. Infatti l'ampiezza vale $2A|\cos\delta/2|$ che per opportuni valori di δ può anche essere nulla!! L'ampiezza di $\alpha(t,x)$ vale $2A$ (valore massimo) se $\cos\delta/2=\pm1$ ($\delta=0, 2\pi, 4\pi, \dots$) e può essere nulla $\cos\delta/2=0$ ($\delta=\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$). Anche l'intensità dell'onda risultante è pari a

$$I_R=\frac{1}{2}\rho\omega^2\,4A^2\cos^2\delta/2\,|\vec{v}| = 4\,I\cos^2\delta/2$$

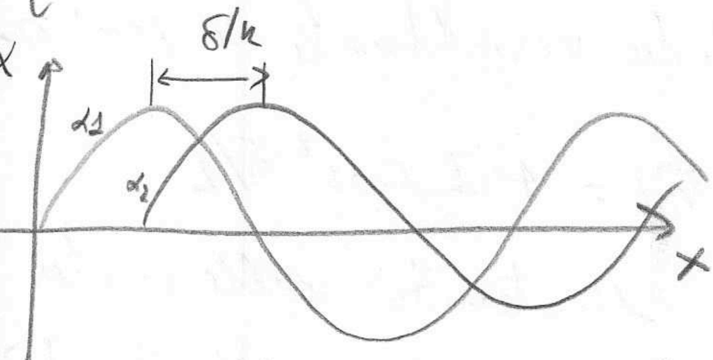
dove $I=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2|\vec{v}|$ è l'intensità delle onde componenti. Vediamo che nemmeno l'intensità è pari alla somma $2I$ delle due intensità componenti. In particolare abbiamo

$$I_R=\begin{cases}4I & \cos\delta/2=\pm1 \quad \text{INTERFERENZA COSTRUTTIVA}\\ 0 & \cos\delta/2=0 \quad \text{INTERFERENZA DISTRUTTIVA}\end{cases}$$

Poichè l'intensità dell'onda rappresenta l'energia che l'onda trasporta, quest'ultima conclusione può apparire in contraddizione con il principio di conservazione dell'energia; in particolare non appare comprensibile immediatamente la possibilità che sommando due onde con intensità I avere in alcuni casi un'intensità pari a 4I e in altri 0.

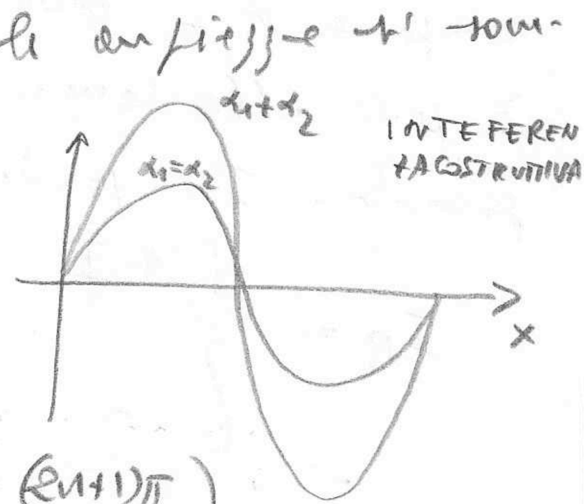
A tal riguardo consideriamo le due onde α_1 e α_2 all'istante $t=0$:

$$\begin{cases} \alpha_1(0,x) = A \sin kx \\ \alpha_2(0,x) = A \sin(kx-\delta) = A \sin\left[k\left(x-\delta/k\right)\right] \end{cases}$$

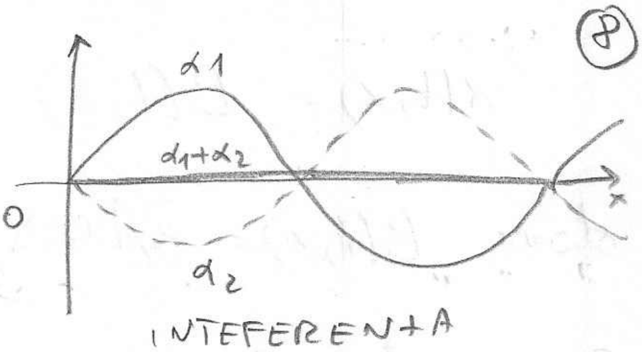


Si tratta di due sinusoidi aventi stessa ampiezza e stessa lunghezza d'onda ma traslate di δ/k.

Quando la traslazione relativa è nulla o pari a $n\lambda$ $\left(\frac{\delta}{k} = \frac{\delta\lambda}{2\pi} = n\lambda \Rightarrow \delta = n\cdot 2\pi\right)$ le ampiezze si sommano; quando la traslazione relativa è pari a un numero dispari di mezze lunghezze d'onda $\left(\frac{\delta}{k} = \frac{\delta\lambda}{2\pi} = (2n+1)\lambda \Rightarrow \delta = (2n+1)\pi\right)$



le ampiezze si sottraggono.



INTEFERENZA DISTRUTTIVA

Rientrano nella famiglia delle interferenze anche i cosiddetti **BATTIMENTI** che si verificano quando due sorgenti hanno numero d'onda (e pulsazione) non esattamente uguali fra di loro.

Sia
$$\alpha_1(t,x) = A \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$\alpha_2(t,x) = A \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

l'onda risultante può essere scritta usando ancora una volta la formula trigonometrica precedente:

$$\alpha(t,x) = \alpha_1(t,x) + \alpha_2(t,x) =$$
$$= A \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$
$$= 2A \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Nell'ipotesi dei battimenti:

$$\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega \qquad k_1 \simeq k_2 \simeq \frac{k_1 + k_2}{2} \simeq k$$

abbiamo:

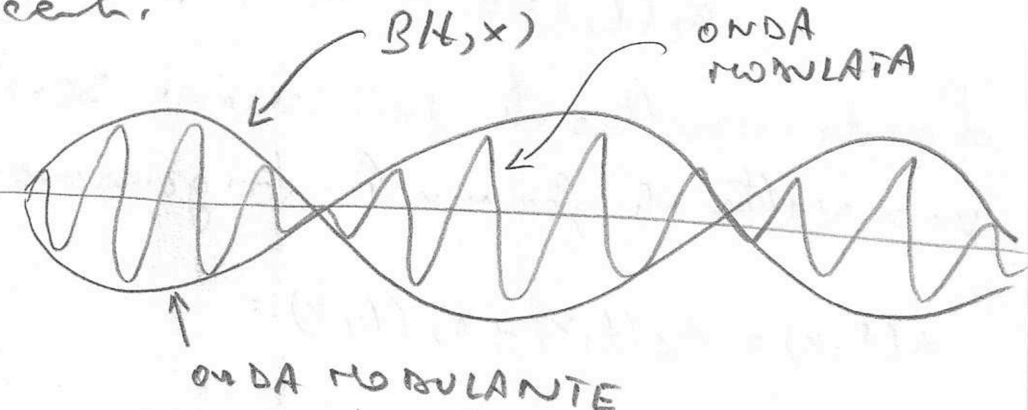
$$\alpha(t,x) = 2A \cos\left[\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right] \sin(k x - \omega t)$$

che può essere riscritta come

$$\alpha(t,x) = B(t,x) \sin(kx - \omega t)$$

dove $B(t,x) = 2A \cos\left[\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]$

Scrivendo $\alpha(t,x)$ in questo modo la interpretiamo come un'onda con numero d'onda k e pulsazione ω pari alla media di k_1, k_2 e di ω_1, ω_2, la cui ampiezza $B(t,x)$ dipende dal tempo e dalla posizione. Ma ancor di più che l'ampiezza stessa si propaga come un'onda anche se con numeri d'onda e pulsazioni più piccoli.



Va notato che l'ampiezza $B(t,x)$, che costituisce un inviluppo dell'onda di alta frequenza, è un'onda che si muove con velocità v_B coincidente con le velocità $v_1 = v_2 = v$ delle onde componenti. Si ha infatti:

$$v_B = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{k_1 v - k_2 v}{k_1 - k_2} = \frac{(k_1 - k_2) v}{k_1 - k_2} = v$$

essendo $\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = v$

ONDE STAZIONARIE

Il fenomeno delle onde stazionarie nasce dalla sovrapposizione di onde componenti aventi la stessa frequenza, la stessa ampiezza d'onda, la stessa

ampiezza ma che si propagano in versi opposti. –
Il modo usuale di produrre onde stazionarie consiste nel sovrapporre un'onda incidente con la sua riflessa contro qualche ostacolo ordinario.

$$\alpha_1(t,x) = A \sin(kx - \omega t)$$
$$\alpha_2(t,x) = A \sin(kx + \omega t)$$

La perturbazione risultante sarà

$$\alpha(t,x) = \alpha_1(t,x) + \alpha_2(t,x)$$
$$= 2A \cos(-\omega t) \sin kx = 2A \cos \omega t \sin kx$$

Tale perturbazione <u>non</u> rappresenta un'onda che si propaga, dal momento che la funzione non dipende dall'argomento $x \pm vt$. –
In fatti la dipendenza temporale e quella spaziale compaiono in due fattori separati di tipo sinusoidale. Ciò significa che il punto di coordinate x oscilla di moto armonico con pulsazione ω e con ampiezza $2A \sin kx$ costante rispetto al tempo e dipendente soltanto dalla posizione. –
Questo tipo di perturbazione prende il nome di onda stazionaria. –
Ci saranno sempre dei punti fermi (che non oscillano) quelli per cui $\sin kx = 0 \Rightarrow kx = n\pi$

$$x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{2\pi/\lambda} = n\frac{\lambda}{2} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$x_n = n\lambda/2$ sono detti nodi dell'onda. Invece ci sono punti che oscillano sempre con la massima ampiezza per cui $\sin kx = 1 \Rightarrow kx = (2n+1)\pi/2$

$$x = \frac{(2n+1)\pi/2}{k} = \frac{(2n+1)\pi/2}{2\pi/\lambda} = (2n+1)\frac{\lambda}{4} = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

$x_n = n\lambda/2 + \lambda/4$ sono detti ventri dell'onda