Calcolo Combinatorio

Definizione

Oggetto del **calcolo combinatorio** è quello di *determinare il numero dei modi mediante i quali possono essere associati*, secondo prefissate regole, *gli elementi di uno stesso insieme o di più insiemi*

- ✓ In molte applicazioni sorge il problema di sapere *in quanti modi* possibili si può *presentare un certo fenomeno*.

- ✓ Il problema, all'apparenza, sembra banale: ciò è vero se il numero degli elementi presi in considerazione è piccolo, ma quando questo numero è *elevato* si presentano delle difficoltà nel *formare tutti i raggruppamenti possibili e senza considerare ripetizioni*.

Il calcolo combinatorio costituisce anche uno strumento aritmetico che è di supporto indispensabile nel ***Calcolo delle Probabilità*** poiché consente di determinare il numero di eventi possibili (ma anche quelli favorevoli e contrari) che si possono verificare in una prova.

Calcolo Combinatorio

Esempi

- ✓ La password di un computer è costituita da sette caratteri. Ciascun carattere deve essere una lettera dell’alfabeto o una cifra. Quante sono tutte le possibili password?

- ✓ Occorre contare i risultati corretti di alcuni esperimenti e tutti i possibili risultati degli stesso esperimenti per determinare la probabilità di successo

- ✓ Per studiare la complessità di un algoritmo è necessario è necessario contare il numero di operazioni elementari eseguite dall’algoritmo per determinati input.

Calcolo Combinatorio

Principi base

- ✓ **Regola del prodotto**

  Se un evento può accadere in *n1 modi* (e non importa come esso accade) e un secondo evento può accadere (indipendentemente dal primo) in *n2 modi*, allora entrambi gli eventi possono accadere in *n1 * n2 modi diversi.*

- ✓ **Regola della somma**

  Se un evento può accadere in *n1 modi* e un secondo evento in *n2 modi* (*diversi dal precedente*), vi sono *n1 + n2 modi* in cui uno dei due eventi può accadere.

Calcolo Combinatorio

Regola del prodotto, esempi

- ✓ Le sedie di un auditorium devono essere etichettate con una lettera e un intero positivo minore di 100. Qual è il più grande numero di sedie che possono essere etichettate differentemente?

  La procedura di etichettamento è costituita da due task, il primo assegna una delle 26 lettere e il secondo assegna uno dei primi 100 numeri interi ad ogni sedia. La ***regola del prodotto*** *ci dice dunque che esistono $26 \cdot 100 = 2600$ modi diversi di etichettare una sedia. Quindi il massimo numero di sedie etichettabili in modo diverso è 2600.*

- ✓ Quante differenti stringhe di bit di lunghezza 7 esistono?

  Ciascuno dei 7 bit può essere scelto in due modi diversi (0,1). La ***regola del prodotto*** *ci dice che esistono $2^7 = 128$ differenti stringhe di bit di lunghezza 7.*

Calcolo Combinatorio

Cardinalità dell'insieme potenza

Quanti sono tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme finito S?

Se S è un insieme finito i suoi elementi possono essere elencati in un ordine arbitrario. Inoltre un sottoinsieme di S può essere indicato con una stringa di $|S|$ bit il cui valore è 1 se il corrispondente elemento di S è nel sottoinsieme considerato 0 altrimenti.

Il numero di possibili sottoinsiemi di S coincide con il numero di possibili stringhe di bit di lunghezza $|S|$.

Di conseguenza l'insieme potenza ha cardinalità $2^{|S|}$

Calcolo Combinatorio

Regola della somma, esempio

- ✓ Uno studente può scegliere un progetto di informatica da una di tre liste. Le tre liste contengono rispettivamente 23, 15 e 19 possibili progetti rispettivamente. Nessun progetto è presente in più di una lista. Quanti sono i possibili progetti tra cui lo studente può scegliere?

Lo studente può scegliere un progetto dalla prima lista, dalla seconda o dalla terza. Poiché nessun progetto è contenuto in più di una lista, per la ***regola della somma*** *ci sono 23 + 15 + 19 modi diversi di scegliere il progetto.*

Calcolo Combinatorio

Problema

Ciascun utente di un sistema di calcolo ha una password, che può essere di 6, 7 o 8 caratteri, dove ogni carattere è una lettera maiuscola o una cifra. Ciascuna password deve contenere almeno una cifra. Quante possibili password esistono?

In dichamo con:

- ***P*** *il numero di tutte le password,*
- ***P_i*** *il numero di password di lunghezza i (6 ≤ i ≤ 8)*

Per la regola della somma: $\boldsymbol{P = P_6 + P_7 + P_8}$

Per la regola del prodotto:

- *il numero di tutte la stringhe di 6 caratteri comprese quelle senza cifre è 36^6*
- *il numero di stringhe di 6 caratteri non contenenti cifre è 26^6.*

$$\mathbf{P_6} = 36^6 - 26^6 = 1867866560$$

$$\mathbf{P}_7 = 36^7 - 26^7 = 70332353920$$

$$\mathbf{P}_8 = 36^8 - 26^8 = 2612282842880$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P_6} + \mathbf{P}_7 + \mathbf{P}_8 = 2684483063360$$

Calcolo Combinatorio

Principio di inclusione-esclusione

Supponiamo di avere un task che può essere realizzato in *n_1 o n_2 modi* ma che alcuni modi del primo insieme di cardinalità n_1 siano presenti anche nel secondo insieme di cardinalità n_2. In questa situazione la **regola della somma non può essere applicata**.

Per stabilire il numero complessivo di modi in cui può essere eseguito il task dobbiamo sottrarre alla somma di n_1 ed n_2 il numero di modi presenti contemporaneamente nei due insiemi.

Esempio

Quante sono le stringhe di bit di lunghezza 8 che o cominciano con il bit 1 oppure finiscono con la coppia di bit 00 ?

$\mathbf{P}^1 = 2^7 = 128$ → *Numero di stringhe di 8 bit che cominciano con 1*

$\mathbf{P}_{00} = 2^6 = 64$ → *Numero di stringhe di 8 bit che terminano con 00*

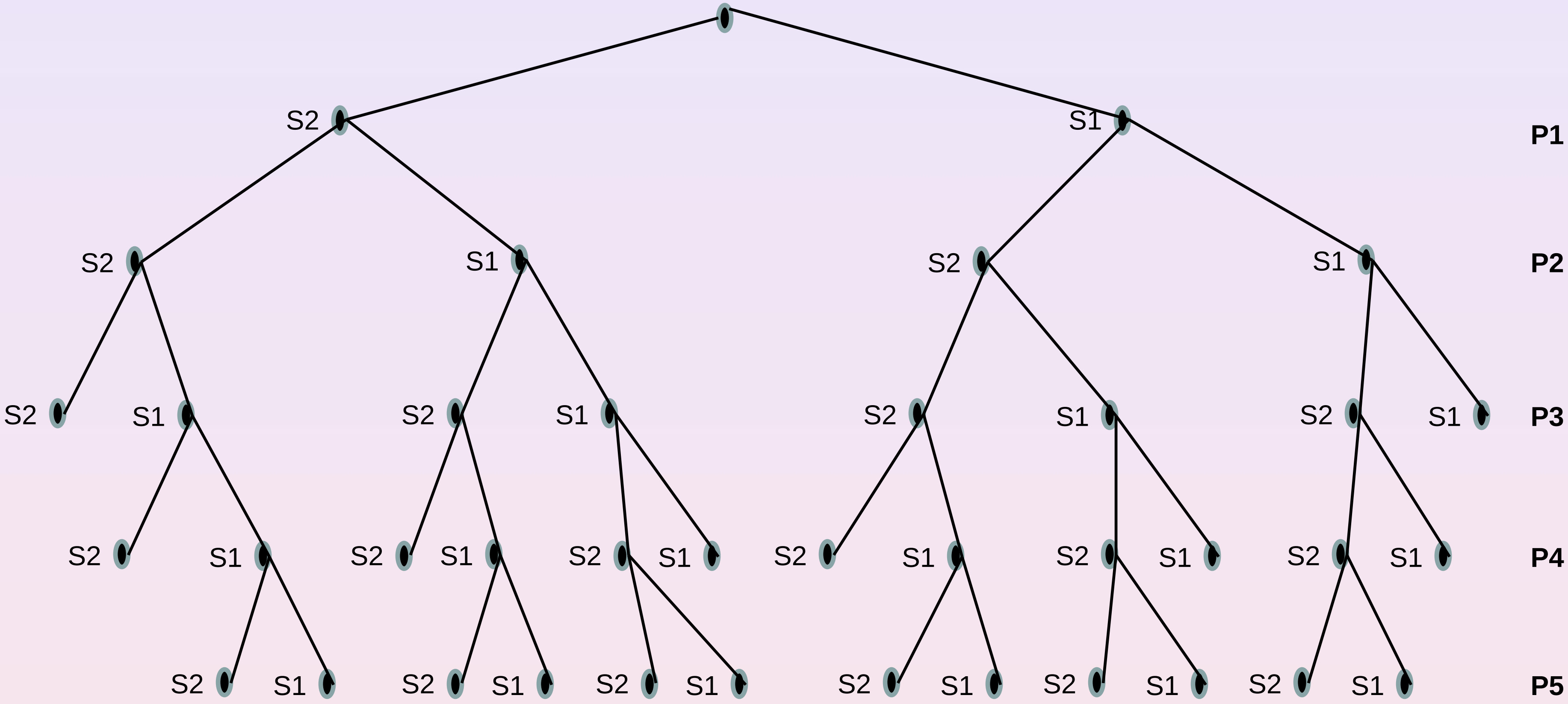
$\mathbf{P}_{00}^1 = 2^5 = 32$ → *Numero di stringhe di 8 bit che iniziano con 1 e terminano con 00*

$$\mathbf{P} = \mathbf{P^1} + \mathbf{P_{00}} - \mathbf{P}_{00}^1 = 128 + 64 - 32 = 160$$

Calcolo Combinatorio

Alberi di enumerazione

I palyoff tra due squadre sono costituiti da al massimo 5 gare. La squadra che vince tre gare vince i playoff. In quanti modi diversi possono presentarsi i playoff?



Calcolo Combinatorio

Il principio della piccionaia

Se k è un numero intero positivo e $k + 1$ o più oggetti devono essere riposti in k scatole, allora ci sarà almeno una scatola che conterrà 2 o più oggetti.

Il principio della piccionaia generalizzato

Se N oggetti devono essere inseriti in k scatole, allora ci sarà almeno una scatola che contiene almeno $\lceil N/k \rceil$ oggetti

Esempio

Qual deve essere il numero minimo di studenti del corso di Matematica per essere sicuri che almeno 4 studenti riceveranno lo stesso voto (supponendo che tutti supereranno l'esame).

Occorre calcolare il numero minimo N tale che:

$$\lceil N/13 \rceil = 4 \longrightarrow N = 40$$

Calcolo Combinatorio

Permutazioni

Una **permutazione** di un insieme di n oggetti è una lista ordinata di questi oggetti. Una lista ordinata di r elementi di un insieme è chiamata **permutazione di classe r**.

Esempio

Sia S = {a,b,c}, le permutazioni di classe 2 di S sono:

(a,b) (b,a) (a,c) (c,a) (b,c) (c,b)

$P(3,2) = 3 \cdot 2 = 6$

Le permutazioni di S sono:

(a,b,c) (a,c,b) (b,a,c) (b,c,a) (c,a,b) (c,b,a)

$P(3,3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Calcolo Combinatorio

Numero di permutazioni

Se *n* è un numero intero positivo ed *r* è un numero intero con *1 ≤ r ≤ n*, si ha:

P(n,r) = n (n – 1) (n – 2) … (n – r + 1)

dove *P(n,r)* è il numero di *permutazioni di classe r* di un insieme *di n elementi*.

Corollario

Se *n* ed *r* sono interi con *0 ≤ r ≤ n*, allora:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Esempio

Quanti modi esistono per selezionare il primo, il secondo e il terzo vincitore di un premio tra 100 partecipanti?

$$P(100,3) = \frac{100!}{(100-3)!} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970200$$

Calcolo Combinatorio

Permutazioni, esercizi

- ✓ Un *commesso viaggiatore* deve visitare *8 differenti città*. Deve iniziare il suo viaggio in una *città specificata*, ma può visitare tutte le altre città in qualsiasi ordine preferisca. In quanti possibili modi il commesso viaggiatore può visitare queste città?

  Il numero di percorsi possibili è uguale al numero di permutazioni di 7 elementi perché il primo elemento (la prima città) è fissato, ma i rimanenti 7 posso essere ordinati arbitrariamente. Dunque ci sono 7! = 5040 possibili tour per il commesso viaggiatore.

- ✓ Quante permutazioni delle lettere ABCDEFGH contengono la stringa ABC?

  Le lettere ABC devono comparire in blocco dunque possono essere considerate come un unico elemento. Dobbiamo dunque calcolare il numero di permutazioni di 6 oggetti. 6! = 720

Calcolo Combinatorio

Combinazioni

Una **combinazione di classe r** di un insieme di n oggetti è una selezione di r elementi dell'insieme. In altri termini, una combinazione di classe r è un sottoinsieme di cardinalità r dell'insieme di partenza.

Esempi

Sia S = {1,2,3,4}, le combinazioni di classe 3 si S sono:

{1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {2,3,4}

C(4,3) = 4

Sia S = {a,b,c,d}, le combinazioni di classe 2 si S sono:

{a,b} {a,c} {a,d} {b,c} {b,d} {c,d}

C(4,2) = 6

Calcolo Combinatorio

Numero di combinazioni

Il numero di combinazioni di *classe r* di un insieme di *n* elementi, dove *n* è un numero intero positivo ed *r* è un numero intero con *1 ≤ r ≤ n*, è pari a:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

Dim.

Le permutazioni di classe r di un insieme di n elementi possono essere ottenute generando *C(n,r)* combinazioni di classe r ed effettuandone tutte le possibili permutazioni

$$P(n,r) = C(n,r) \cdot P(r,r)$$

ovvero:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{1}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Calcolo Combinatorio

Numero di combinazioni, esempi

- ✓ Un gruppo di 30 astronauti sono stati addestrati per la prima missione su marte. In quanti modi è possibile selezionare un equipaggio di 6 persone per la missione?

$$C(30,6)=\frac{30!}{6!\cdot 24!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=593775$$

- ✓ Quante stringhe di lunghezza *n* contengono esattamente *r* bit 1?

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

Calcolo Combinatorio

Numero di combinazioni, esempi

- ✓ Quante *mani di poker* possono essere generate da un mazzo di 52 carte? quanti modi ci sono per selezionare 47 carte da un mazzo di 52?

$$C(52,5)=\frac{52!}{5!\cdot 47!}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=2598960$$

$$C(52,47)=\frac{52!}{47!\cdot 5!}=2598960$$

In generale, dati due numeri interi non negativi $r \leq n$, si ha:

$$C(n,r)=C(n,n-r)$$

Calcolo Combinatorio

Coefficiente binomiale

Il *numero di combinazioni di n elementi in classe r* viene anche detto **coefficiente binomiale**

$$C(n,r)=\binom{n}{r}$$

Teorema

Date due variabili *x* e *y* ed un numero intero *n* non negativo, si ha:

$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$$

DIM.

$$(x+y)^n=(x+y)\cdot(x+y)\dots(x+y)$$

Espandendo questo prodotto si ottengono tutti termini del tipo: $x^{n-j}y^j \quad j=1..n$

per ottenere questo termine è necessario scegliere *n-j* volte *x* dalle *n* somme

quindi il coefficiente di $x^{n-j}y^j$ è $\binom{n}{n-j}=\binom{n}{j}$

Calcolo Combinatorio

Coefficiente binomiale

Il *numero di combinazioni di n elementi in classe r* viene anche detto **coefficiente binomiale**

$$C(n,r)=\binom{n}{r}$$

Teorema

Date due variabili *x* e *y* ed un numero intero *n* non negativo, si ha:

$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$$

Esempio

$$(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)=(xx+xy+xy+yy)(x+y)=$$

$$=xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy=$$

$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

Calcolo Combinatorio

Coefficiente binomiale, esempi

- ✓ Qual è l'espressione di $(x+y)^4$?

$$(x+y)^4 = \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} x^{4-j} y^j = \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 + \binom{4}{4} y^4 =$$

$$= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4$$

- ✓ Qual è il coefficiente di $x^{12}y^{13}$ nell'espressione di $(2x-3y)^{25}$?

$$\left(2x + (-3y)\right)^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j} (-3y)^j$$

il coefficiente di $x^{12}y^{13}$ si ottiene per $j = 13$:

$$\binom{25}{13} 2^{12} (-3)^{13} = -\frac{25!}{13! \cdot 12!} 2^{12} 3^{13}$$

Calcolo Combinatorio

Triangolo di Pascal-Tartaglia

I coefficienti binomiali possono essere organizzati in un triangolo in cui l'ennesima riga è data da:

$$\binom{n}{k}, \quad k = 0,1,\ldots,n$$

In tale triangolo la somma di due termini adiacenti di una riga è pari al valore del termine della riga successiva compreso tra i due.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

....

Elementi di teoria della probabilità

Esperimento

Un **esperimento** è un'attività che *produce risultati diversi* nelle successive prove in cui viene ripetuta (*lanciare una moneta, estrarre un soggetto a caso da un elenco*).

Lo **spazio degli eventi** è l'insieme di tutti i possibili risultati.

Un **evento** è un sottoinsieme dello spazio degli eventi.

Definizione di probabilità

Sia **S** lo spazio degli eventi di un esperimento, ed **E** un evento cioè un sottoinsieme di **S**. Se **S** è **finito** e tutti gli elementi di **S** sono equamente probabili, la **probabilità di E** è data da:

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

Elementi di teoria della probabilità

Esempi

- ✓ Un'urna contiene 4 palline blu e 5 palline rosse. Qual è la probabilità che una pallina estratta a caso dall'urna sia blu?

  E' possibile estrarre una di 9 palline, quindi $|\boldsymbol{S}| = 9$.

  Di questi 9 eventi 4 restituiscono una pallina blu, quindi $|\boldsymbol{E}| = 4$

  La probabilità che sia scelta una pallina blu è pari a 4/9

- ✓ Qual è la probabilità che lanciando due dadi, la loro somma sia pari a 7?

  Lo spazio degli eventi ha cardinalità $|\boldsymbol{S}| = 36$ *(basta usare la regola del prodotto).*

  L'evento (somma = 7) è costituito da 6 possibili uscite:

  (1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)

  La probabilità che la somma dei due dadi sia 7 è pari a 6/36 = 1/6

Elementi di teoria della probabilità

Esempi

✓ Qual è la probabilità di indovinare i sei numeri del superenalotto?

Il numero totale di scelte è pari al numero di combinazioni di classe 6 di un insieme di 90 oggetti

$$C(90,6)=\frac{90!}{6!(90-6)!}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$$

La probabilità di vincere giocando un'unica sestina è:

$$P(vittoria)=\frac{1}{C(90,6)}\cong 0$$

Elementi di teoria della probabilità

Probabilità di combinazioni di eventi

Siano E_1 ed E_2 eventi di uno stesso spazio **S**, allora:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Dim.

$$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|$$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{|E_1 \cup E_2|}{|S|} =$$

$$= \frac{|E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|}{|S|} =$$

$$= \frac{|E_1|}{|S|} + \frac{|E_2|}{|S|} - \frac{|E_1 \cap E_2|}{|S|} =$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Elementi di teoria della probabilità

Probabilità di combinazioni di eventi, esempio

Qual è la probabilità che un intero positivo selezionato casualmente tra un insieme di interi positivi non superiori a 100 sia divisibile per 2 o per 5?

$|E_1| = 50 \longrightarrow$ Interi positivi pari non superiori di 100

$|E_2| = 20 \longrightarrow$ Interi positivi divisibili per 5 e non superiori di 100

$|E_1 \cap E_2| = 10 \longrightarrow$ Interi positivi divisibili per 5 e per 2 e non superiori di 100

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{50}{100} + \frac{20}{100} - \frac{10}{100} = \frac{3}{5}$$

Insiemi Numerici

Insiemi numerici **N**, **Z**, **Q**, **R**

- ✓ Insieme dei **numeri naturali**:

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

- ✓ Insieme dei **numeri interi**:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$$

- ✓ Insieme dei **numeri interi positivi**:

$$\mathbf{Z}^{+} = \{1,2,3,\ldots\}$$

- ✓ Insieme dei **numeri razionali**:

$$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{Z},\ q \neq 0\}$$

- ✓ Insieme dei **numeri reali**
  - si può dare una definizione assiomatica dei numeri reali cioè elencando un insieme di proprietà (***R*** *è un campo ordinato e completo*)

Insiemi Numerici

L’insieme **N** dei numeri naturali

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,3,...\}$$

In **N** sono definite le due operazioni di somma (**+**) e prodotto (**·**) che godono delle seguenti proprietà:

- ***Associativa***:

$$(m+n)+p = m+(n+p) \qquad (m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$$

- ***Commutativa***:

$$m+n = n+m \qquad m \cdot n = n \cdot m$$

- ***Esistenza dell’elemento neutro per la somma***:

$$\forall n \quad n+0 = n$$

- ***Esistenza dell’elemento neutro per la moltiplicazione***:

$$\forall n \quad n \cdot 1 = n$$

- ***Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma***:

$$m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p$$

Insiemi Numerici

L'insieme **N** dei numeri naturali

Su **N** è possibile introdurre una ***relazione d'ordine*** (**≤**) definita nel seguente modo:

- *Se m ed n appartengono ad **N**, **m ≤ n** significa che:*

$$\exists p \in \mathbf{N} \mid n = m + p$$

Tale *relazione d'ordine* è una ***relazione d'ordine totale*** cioè:

$$\forall m, n \in N \mid \quad m \leq n \ \vee \ n \leq m$$

Inoltre essa è *compatibile* con l'operazione di *addizione* e di *moltiplicazione*

$$m \leq n \Rightarrow (m + p) \leq (n + p) \qquad \forall m, n, p \in \mathbf{N}$$

$$m \leq n \Rightarrow (m \cdot p) \leq (n \cdot p) \qquad \forall m, n, p \in \mathbf{N}$$

Insiemi Numerici

L’insieme **Z** dei numeri interi

$$\mathbf{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

Nell’insieme ***Z*** dei numeri *interi relativi* sono verificate tutte le proprietà algebriche di **N** (proprietà *associativa*, *commutativa*, esistenza *dell’elemento neutro per l’addizione e la moltiplicazione*, proprietà *distributiva della moltiplicazione rispetto all’addizione*)

In **Z** è verificata inoltre una proprietà non valida in ***N***:

$$\forall p \in \mathbf{Z} \quad \exists p' \in \mathbf{Z} \ \mid \quad p + p' = 0 \ (= p' + p)$$

(*esistenze dell’elemento inverso per l’addizione*)

$\forall p \in \mathbf{Z}$ l’elemento ***opposto*** $p' \in \mathbf{Z}$ si denota con $-p$

$$p + (-q) \equiv p - q$$

Insiemi Numerici

L'insieme **Z** dei numeri interi

Su **Z** si definisce una ***relazione d'ordine*** (**≤**) tale che:

se $p, q \in \mathbf{Z}$ *allora* $p \le q$ *significa che* $(q - p) \in \mathbf{N}$

La notazione $p \ge q$ *è da intendersi come* $q \le p$

Gli elementi $p \in \mathbf{Z} \mid p \ge 0$ sono tutti e soli gli elementi di $\mathbf{N}$

La relazione d'ordine è *compatibile* con l'*addizione* e la *moltiplicazione*

$$m \le n \Rightarrow (m + p) \le (n + p) \qquad \forall m, n, p \in \mathbf{Z}$$

$$m \le n \Rightarrow (m \cdot p) \le (n \cdot p) \qquad \forall m, n, p \in \mathbf{Z}, \ \ p \ge 0$$

$$m \le n \Rightarrow (n \cdot p) \le (m \cdot p) \qquad \forall m, n, p \in \mathbf{N}, \ \ p \le 0$$

Insiemi Numerici

Le frazioni

Accanto alla necessità di ***contare*** si presenta anche il problema di ***misurare*** alcune grandezze (*lunghezze, aree, pesi, tempo, ecc.*). Si può cercare di *ridurre questo* problema al *problema di contare*, introducendo *un'unità di misura* alla quale *si attribuisce misura 1*. In tal modo la misura della quantità che ci interessa sarà espressa dal *numero di unità di misura contenute nella quantità da misurare*.

Non sempre però questo *numero è intero*. Da qui il problema di introdurre le ***frazioni***, in cui *numeratore* e *denominatore* sono interi, con *denominatore diverso da 0*.

$$q / p \quad p, q \in \mathbf{Z} \quad q \neq 0$$

Insiemi Numerici

L'insieme **Q** dei numeri razionali

Un numero ***r*** si dice *razionale* se è del tipo:

$$r = q / p \qquad p, q \in \mathbf{Z} \quad q \neq 0$$

- *ogni numero frazionale* $r = {}^{m}\!/_{n} \qquad m, n \in \mathbf{Z}$

  può essere rappresentato in infiniti modi distinti

$$p, q \in \mathbf{Z},\ q \neq 0, \quad mq = nq \Rightarrow {}^{m}\!/_{n} = {}^{p}\!/_{q}$$

Insiemi Numerici

L'insieme **Q** dei numeri razionali

Le proprietà algebriche valide in ***Z*** continuano a valere anche in ***Q***, inoltre:

$$\forall r \in \mathbf{Q} \quad r \neq 0 \quad \exists r' \in \mathbf{Q} \quad | \quad r \cdot r' = 1$$

(*esistenze dell'elemento inverso per la moltiplicazione*)

- *r' è unico e si dice inverso o reciproco di r*

$$r' = r^{-1} = \frac{1}{r}$$

- *Se* $r = \frac{m}{n} \quad m \in \mathbf{Z},\ m \neq 0, \quad n \in \mathbf{N},\ n \neq 0$

allora $r^{-1} = \frac{n}{m}$

- *Se* $r, s \in \mathbf{Q}, \quad s \neq 0$ *allora* $\frac{r}{s} = r \cdot \frac{1}{s}$

Insiemi Numerici

L’insieme **Q** dei numeri razionali

La *relazione d’ordine* ≤ (<) definita in ***Z*** si estende a ***Q***:

$$\forall r, s \in \mathbf{Q}; \quad r = \frac{m}{n}; \quad s = \frac{p}{q}; \quad m, p \in \mathbf{Z}; \quad n, q \in \mathbf{N}; \quad n \neq 0; \quad q \neq 0$$

Si dice che $r \leq s$ se $(p \cdot n - m \cdot q) \in \mathbf{N}$

$r < s$ se $(p \cdot n - m \cdot q) \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$

In virtù delle *proprietà algebriche* e delle *proprietà della struttura d’ordine*, ***Q*** è detto ***campo totalmente ordinato***

Insiemi Numerici

L'insieme **Q** dei numeri razionali

La risoluzione dell'*equazione*

$$m \cdot x + n = 0$$

che in generale non era possibile in ***Z*** è sempre possibile in **Q**

In **Q** *non è possibile* risolvere l'*equazione*

$$x^2 = 2$$

Insiemi Numerici

L'insieme **Q** dei numeri razionali

Teorema

$$\nexists x \in \mathbf{Q} \ \mid \ x^2 = 2$$

Dim.

Supponiamo *per assurdo* che esista un numero razionale *r* che risolve l'equazione

Devono quindi esistere anche due *interi p* e *q primi fra loro* tali che:

$$r = \frac{p}{q} \quad \text{e} \quad \frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{p}^2 = 2 \cdot q^2$$

quindi *p* è pari (*il quadrato di un numero dispari è sempre dispari) e ne segue che*:

$$\exists n \in Z \ \mid \ 2 \cdot n = p \quad e\ quindi \quad 4 \cdot n^2 = 2 \cdot q^2 \quad ovvero \quad 2 \cdot n^2 = q^2$$

Di conseguenza anche *q* è pari ma ciò è ***assurdo*** perché *p* e *q* sono primi tra loro.

Insiemi Numerici

L’insieme **R** dei numeri reali

Si pone quindi il problema di ***completare Q***, cioè di *costruire un campo totalmente ordinato che contenga Q*, in cui sussistano *ulteriori proprietà* non valide in Q.

Ciò conduce alla costruzione dell’***insieme R dei numeri reali*** (*il cui studio approfondito sarà oggetto dei corsi di matematica*)

In generale l’insieme ***R*** si può ***identificare con i punti di una retta*** *orientata* si cui si è fissato un *riferimento*

- si può dire che se $x, y \in \mathbf{R}$ e $x < y$

  allora il punto della retta che si identifica con *x* precede il punto della retta che si identifica con *y*, nel verso positivo fissato.

Insiemi Numerici

L'insieme **R** dei numeri reali

In ***R*** valgono le seguenti proprietà non valide in ***Q***:

- ✓ *Completezza per la relazione d'ordine*

  Dati due sottoinsiemi ***A, B*** di ***R*** tali che $\forall a \in A \;\; e \; \forall b \in B, \;\; a \leq b$

  allora $\exists x \in \mathbf{R} \;\; | \;\; a \leq x \leq b$

- ✓ *Densità di **Q** in **R***

  $\forall a, b \in \mathbf{R}$ se $a < b$

  allora $\exists r \in \mathbf{Q} \;\; | \;\; a < r < b$

Insiemi Numerici

Intervalli in *R*

Tra i sottoinsiemi di ***R*** rivestono particolare importanza gli ***intervalli***

Siano *a* e *b* due elementi di ***R*** con $a \leq b$. Tutti gi intervalli di *primo elemento a* e *secondo elemento b* sono:

$$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$$ *Int. chiuso*

$$[a,b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$$ *Int. semiaperto a destra*

$$]a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$$ *Int. semiaperto a sinistra*

$$]a,b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$$ *Int. aperto*

se $a < b$ *tutti i precedenti intervalli* sono *non vuoti*

Insiemi Numerici

Intervalli in ***R***

Sia *a* un elemento di ***R***. Tutti gli intervalli illimitati di estremo *a* sono:

$$]a,+\infty[\,=\{x\in\mathbf{R}\ \mid\ a<x\}$$ *Int. aperto illimitato superiormente*

$$[a,+\infty[\,=\{x\in\mathbf{R}\ \mid\ a\le x\}$$ *Int. chiuso illimitato superiormente*

$$]-\infty,a[\,=\{x\in\mathbf{R}\ \mid\ x<a\}$$ *Int. aperto illimitato inferiormente*

$$]-\infty,a]=\{x\in\mathbf{R}\ \mid\ a\le x\}$$ *Int. chiuso illimitato inferiormente*

gli intervalli illimitati sono sempre *non vuoti*

$$]-\infty,+\infty[\,\equiv\mathbf{R}$$

Insiemi Numerici

Rappresentazione decimale di ***Q***

Sia $r \in \mathbf{Q}$ è possibile scrivere $r = [r] + r_d$ dove:

$[r]$ *parte intera di r*

$0 \leq r_d < 1$ *parte decimale di r*

Rappresentazione della parte decimale

$$r_d = \frac{m}{n} \qquad m, n \in \mathbf{N} \qquad m < n \qquad n \neq 0$$

$10 \cdot m = n \cdot q_1 + r_1$ q_1 *prima cifra decimale*

$10 \cdot r_1 = n \cdot q_2 + r_2$ q_2 *seconda cifra decimale*

....

Insiemi Numerici

Rappresentazione decimale di ***Q***

$$x = \frac{m}{n} \qquad m, n \in \mathbf{N} \qquad m < n \qquad n \neq 0$$

$$10 \cdot m = n \cdot q_1 + r_1$$ *q_1 prima cifra decimale*

$$10 \cdot r_1 = n \cdot q_2 + r_2$$ *q_2 seconda cifra decimale*

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Dopo un certo numero di passi il resto è *0*

oppure si ottiene (*al massimo dopo n passi*) un *resto già ottenuto in precedenza*.

- nel primo caso $x = {}^{m}/_{n}$ ha una rappresentazione decimale *finita*

  $$x = 0, q_1 q_2 \dots q_k$$

- nel secondo caso *x* ha una rappresentazione decimale con un *numero infinito di cifre decimali* diverse da 0 ma con *un gruppo finito di cifre che si ripetono all'infinito*

  $$x = 0, q_1 q_2 \dots q_h \overline{q_{h+1} \dots q_{h+l}}$$

Insiemi Numerici

Rappresentazione decimale di *Q*

Determinazione della frazione generatrice di un allineamento decimale periodico

$$x = 0, q_1 q_2 \ldots q_h \overline{q_{h+1} \ldots q_{h+l}}$$

$$x = \frac{q_1}{10} + \ldots + \frac{q_h}{10^h} + \frac{1}{10^h} \cdot \frac{q_{h+1} q_{h+2} \ldots q_{h+l}}{\underbrace{99\ldots9}_{l \text{ volte}}}$$

Se l'allineamento decimale è negativo, una frazione generatrice si determina applicando il procedimento descritto sopra al numero cambiato di segno e cambiando di nuovo il segno alla frazione ottenuta.

Insiemi Numerici

Rappresentazione decimale di *Q*

Esercizi:

Scrivere in forma decimale i seguenti numeri razionali:

$$\frac{1}{3} \qquad \frac{4}{3} \qquad \frac{11}{13} \qquad \frac{54}{25}$$

Determinare le frazioni generatrici dei seguenti allineamenti:

$$2,4 \qquad 1,\overline{62} \qquad 0,31\overline{34}$$