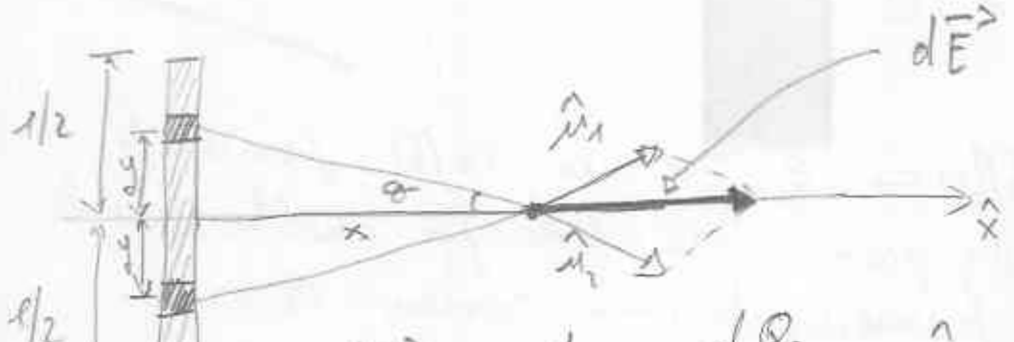
CAMPO ELETTRICO

• Calcolo campo elettrico $\vec{E}$ sull'asse di una sbarretta uniformemente carica con carica Q.

$$\left[\ \lambda = \frac{dQ}{dy} = \frac{Q}{l}\ \right]$$



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{x^2+y^2}\hat{u}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{x^2+y^2}\hat{u}_2 =$$

$$= \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2}\,2\cos\theta\,\hat{x} = \frac{\lambda\,dy}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\hat{x}$$

poiché $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; dunque:

$$d\vec{E} = \frac{\lambda\vec{x}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda\vec{x}}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{l/2}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}}$$

$$\int_0^{l/2}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y}{x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_0^{l/2} = \frac{l}{2x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+l^2/4}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda\vec{x}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{l}{2x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+l^2/4}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{x}\frac{1}{\sqrt{x^2+l^2/4}}\hat{x}$$

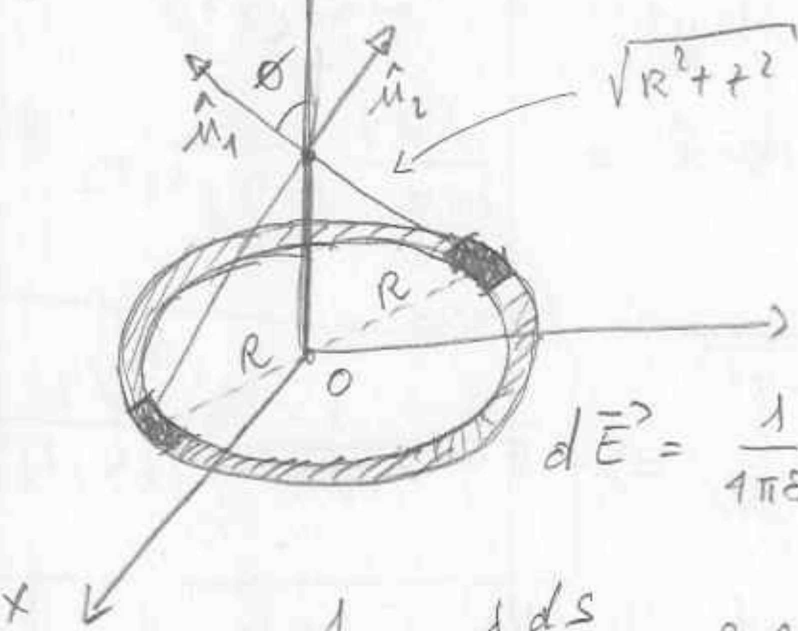
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{l^2}{x^4+l^2x^2/4}}\ \hat{x}}$$

se $l \to \infty$ (cioè $l >> x$) abbiamo il campo elettrico generato da un filo indefinito:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{x}\cdot \lim_{l\to\infty} \sqrt{\frac{l^2}{x^4+x^2 l^2/4}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{x}\cdot\frac{2}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{x}\,\hat{x}$$

- Calcolo campo elettrico $\vec{E}$ su una retta passante per il centro di una circonferenza sulla quale è distribuita uniformemente una carica Q.



$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}};$$

$$\lambda = \frac{dQ}{ds} = \frac{Q}{2\pi R};$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dQ}{R^2+z^2}\,\hat{u}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dQ}{R^2+z^2}\,\hat{u}_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda\, ds}{R^2+z^2}\,2\cos\theta\,\hat{z} = \frac{\lambda \vec{z}}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,ds;$$

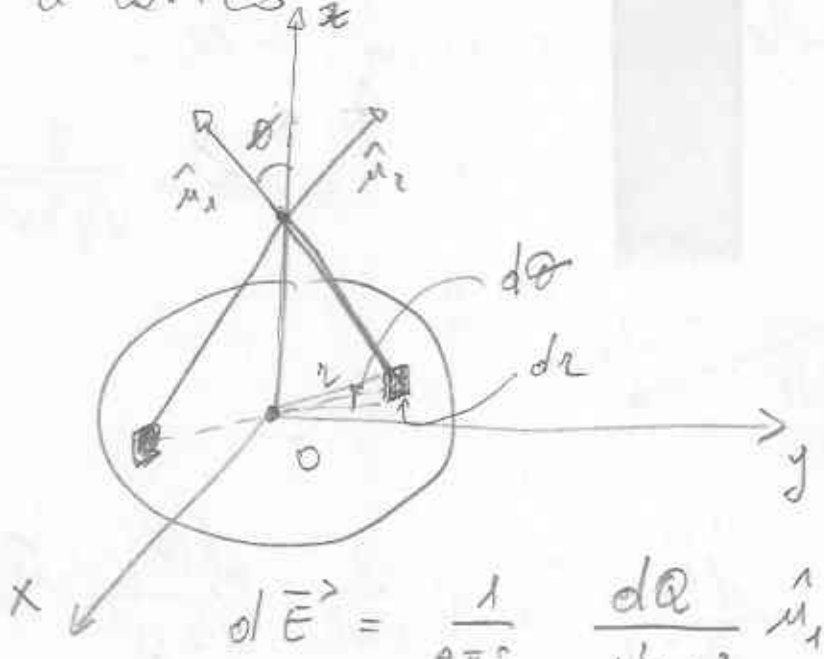
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda \vec{z}}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{\pi R} ds = \frac{\lambda \vec{z}}{2\varepsilon_0}\,\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}};$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{z}}$$

Se $R \to 0$ $\quad \vec{E} \simeq \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\,\frac{\vec{z}}{z^3} = \frac{Q}{2\pi \cancel{R}}\,\frac{\cancel{R}}{2\varepsilon_0}\,\frac{\hat{z}}{z^2} =$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{z^2}\,\hat{z}$$ (campo elettrico carica puntiforme)

• Campo elettrico generato da disco uniformemente carico



$$\sigma = \frac{dQ}{dS'} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2+z^2}\hat{u}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2+z^2}\hat{u}_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2+z^2}2\cos\theta\,\hat{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS'\,\vec{z}}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma\vec{z}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d\theta\, r\, dr}{(r^2+z^2)^{3/2}};$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma\vec{z}}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma\vec{z}}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}};$$

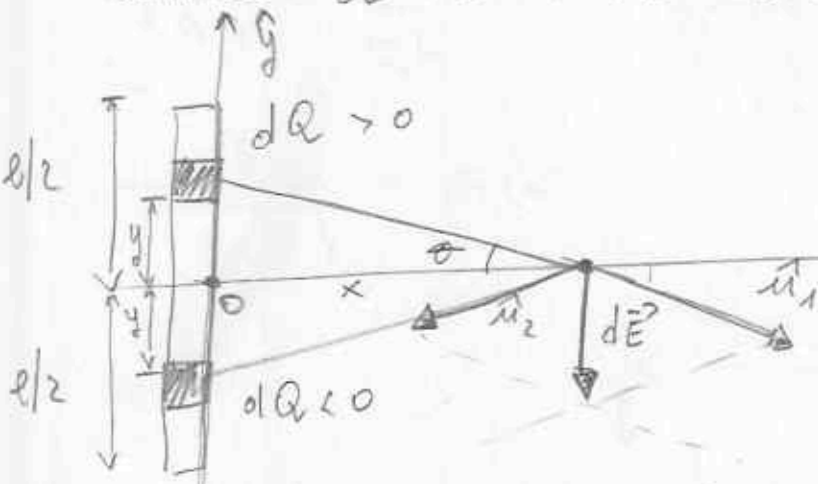
$$\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\Bigg|_0^R = \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}};$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma\hat{z}}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)}$$

Se $R\to\infty$ (oppure $R \gg z$) $\Rightarrow$ $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$

cioè il campo generato da un piano uniformemente carico.

- Calcolo campo elettrico $\vec{E}$ sull'asse di una sbarretta carica uniformemente per metà con carica Q e metà con carica $-Q$.



$$\left[\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}\ \right]$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{x^2+y^2}\hat{u}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{x^2+y^2}\hat{u}_2 =$$

$$= \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2}\,2\cos(\pi/2-\theta)\,(-\hat{y}) =$$

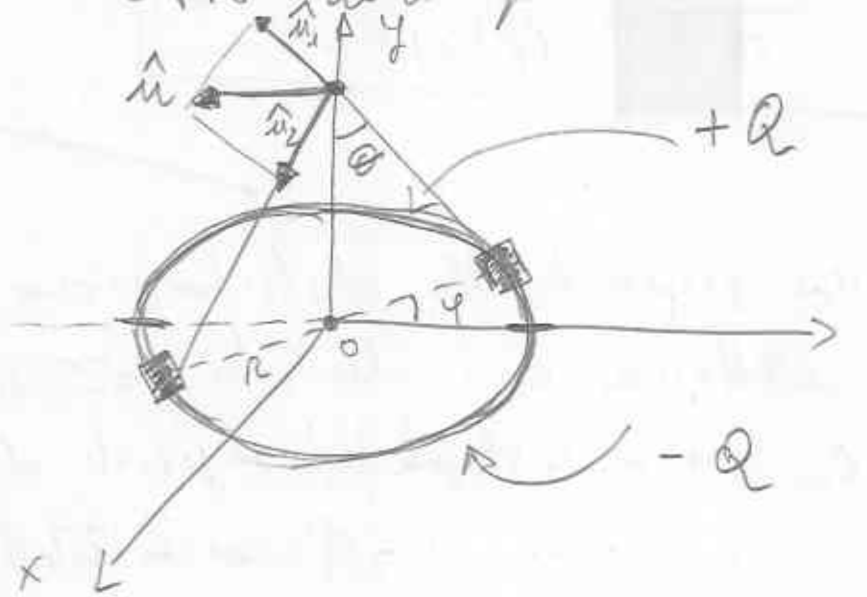
$$= -\frac{\lambda\,dy}{2\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\lambda\hat{y}}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{l/2}\frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}}$$

Noto che $\displaystyle\int_0^{l/2}\frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_0^{l/2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{l^2}{4}}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\lambda\hat{y}}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+l^2/4}}\right)}$$

• Calcolo campo elettrico $\vec{E}$, generato da una spira carica per metà con Q e l'altra metà con $-Q$, sull'asse passante per il centro della spira.



$$\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

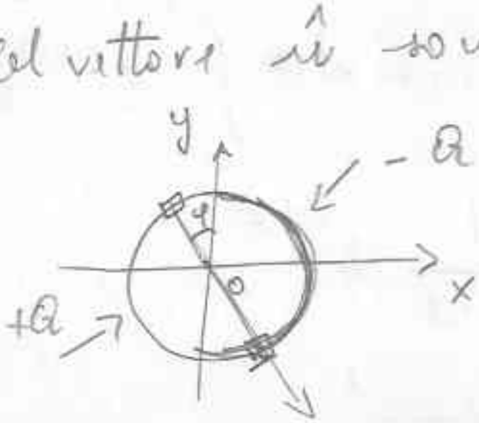
$$\lambda = \frac{dQ}{ds} = \frac{|Q|}{\pi R}$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{R^2+z^2}\hat{u}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{R^2+z^2}\hat{u}_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|dQ|}{R^2+z^2}\left(\hat{u}_1+\hat{u}_2\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|dQ|}{R^2+z^2}\,2\cos(\pi/2-\theta)\,\hat{u}$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,d\varphi\;R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{u}$$

Le componenti del vettore $\hat{u}$ sono $(\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)$.
Infatti



Quindi:

$$d\vec{E} = \frac{\lambda R^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left(\sin\varphi, -\cos\varphi, 0\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda R^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{\pi}(\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)\,d\varphi =$$

$$= \frac{\lambda R^2}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}} (2, 0, 0) .$$

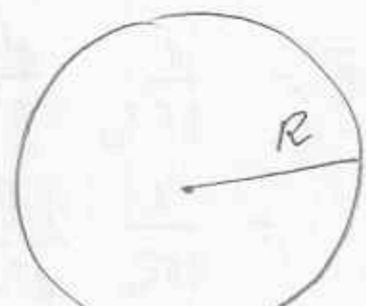
Quindi:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda R^2}{\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{x}}$$

- Calcolo campo elettrico generato da distribuzione sferica di carica elettrica con densità $\rho = C_n r^n$ dove $n \in \mathbb{N}$ ed C_n è una costante che dipende dall'esponente.

Q: carica totale

Per $r < R$ abbiamo.



$$\Phi_{S'}(\vec{E}) = Q(S')/\varepsilon_0$$

$$Q(S') = \int_{V_{S'}} \rho \, dV = \int_{V_{S'}} C_n r^n r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr =$$

$$= C_n \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{r} r^{2+n} dr =$$

$$= C_n \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{n+3} r^{n+3};$$

$$\Phi_{S'}(\vec{E}) = |\vec{E}| \, 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| \cancel{4}\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} C_n \cancel{4}\pi \frac{r^{n+3}}{n+3} \Rightarrow \boxed{|\vec{E}| = \frac{C_n}{(n+3)\varepsilon_0} r^{n+1}}$$

C_n è fissata tale che:

$$Q = \int_V \rho \, dV = C_n 4\pi \int_0^R r^{2+n} dr = 4\pi C_n \frac{R^{n+3}}{n+3}$$

$$\Rightarrow \quad C_n = \frac{(n+3)\,Q}{4\pi \, R^{n+3}}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{E}| = \frac{\cancel{(n+3)}\,Q}{4\pi \, R^{n+3}} \frac{1}{\cancel{(n+3)}\,\varepsilon_0} r^{n+1} =$$

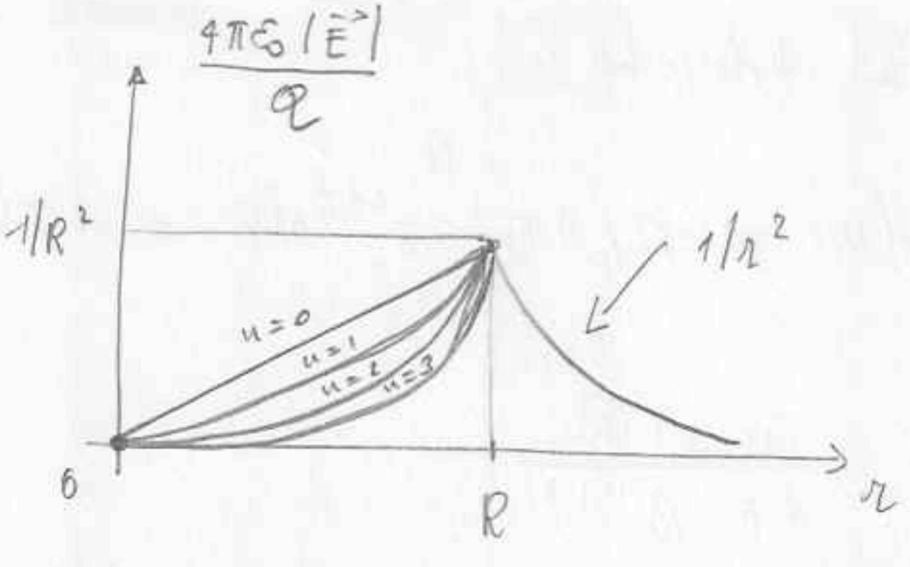
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r^{n+1}}{R^{n+3}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r^{n+1}}{R^{n+3}} \hat{r}} \quad \text{per } r < R.$$

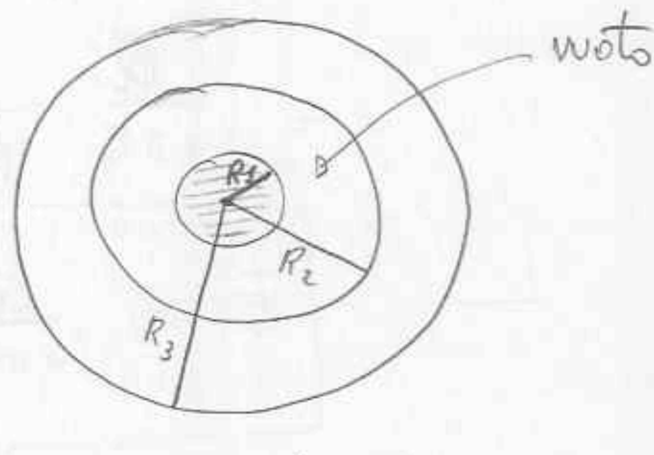
Per $r > R$ il campo è lo stesso di quello generato da una carica puntiforme Q (poiché è valido il teorema di Gauss). Infatti il flusso del campo elettrico è funzione solo della carica totale e non di come questa si distribuisce radialmente.
Per $r = R$ abbiamo:

$$\vec{E}\Big|_{r=R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2} \hat{r}$$

Quindi i due campi assumono lo stesso valore sulla superficie.



• Calcolo campo elettrico per la configurazione seguente:



$Q_1 > 0$ nella sfera di raggio R_1

$-Q_2 < 0$ nella corona sferica di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3.

La carica $-Q_2$ è distribuita con densità di carica $\rho = C_n r^n$.

È interessante il campo elettrico per $R_2 \le r \le R_3$.

Applicando il teorema di Gauss per obbiamo:

$$4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{1}{\varepsilon_0} \left\{ Q_1 + 4\pi \int_{R_2}^{r} r^2 C_n r^n \, dr \right\}$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \left\{ Q_1 + \frac{4\pi C_n}{n+3} \left(r^{n+3} - R_2^{n+3} \right) \right\}$$

C_n è tale che

$$-Q_2 = 4\pi C_n \int_{R_2}^{R_3} r^{2+n}\, dr$$

$$-Q_2 = \frac{4\pi C_n}{n+3}\left(R_3^{\,n+3} - R_2^{\,n+3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad C_n = -\frac{(n+3)\,Q_2}{4\pi}\,\frac{1}{R_3^{\,n+3} - R_2^{\,n+3}}$$

Quindi il campo elettrico (in modulo) vale:

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left\{Q_1 + \frac{\cancel{4\pi}}{\cancel{n+3}}\,\frac{(-Q_2)\cancel{(n+3)}}{\cancel{4\pi}}\,\frac{1}{R_3^{\,n+3} - R_2^{\,n+3}}\left(r^{n+3} - R_2^{\,n+3}\right)\right\}$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q_1}{r^2} - \frac{Q_2}{R_3^{\,n+3} - R_2^{\,n+3}}\left(r^{n+1} - \frac{R_2^{\,n+3}}{r^2}\right)\right\}$$

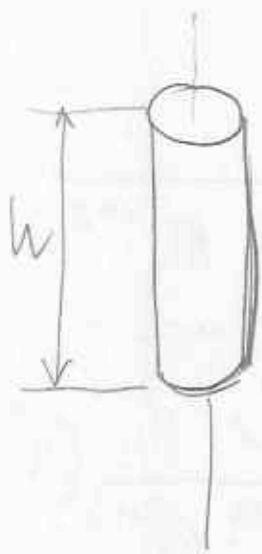
$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[Q_1 + \frac{Q_2 R_2^{\,n+3}}{R_3^{\,n+3} - R_2^{\,n+3}}\right]\frac{1}{r^2} - \frac{Q_2}{R_3^{\,n+3} - R_2^{\,n+3}}\, r^{n+1}\right\}}$$

sulla superficie esterna ($r = R_3$) il campo vale:

$$|\vec{E}|_{r=R_3} = \dots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_3^2} - \frac{Q_2}{R_3^2}\right) = \frac{Q_1 - Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R_3^2}\,;$$

se $Q_1 - Q_2 = 0$ (carica netta nulla) allora il campo è nullo (come deve essere!).

• Applicazione concettualmente simile, possono essere realizzate nel caso di distribuzione dinamica a simmetria cilindrica. Infatti:



$$\rho = \frac{dQ}{dV} = C_n r^n$$

$$|\vec{E}|\, 2\pi r h = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} C_n \int d\theta\, r dr\, r^n h$$

$$= \frac{C_n h}{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r^{n+1} dr$$

$$= \frac{2\pi C_n h}{\varepsilon_0}\,\frac{r^{n+2}}{n+2};$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\cancel{2\pi} C_n \cancel{h}\, r^{n+2}}{\cancel{2\pi} r \cancel{h}\, \varepsilon_0 (n+2)}$$

$$= \frac{C_n}{\varepsilon_0 (n+2)}\, r^{n+1};$$

C_n deve essere "bloccata" in modo che

$$Q = 2\pi h C_n \int_0^R r^{n+1} dr$$

$$= \frac{2\pi h C_n}{n+2} R^{n+2}$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{(n+2) Q}{2\pi h R^{n+2}}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\cancel{(n+2)} Q}{2\pi h R^{n+2}}\,\frac{1}{\varepsilon_0 \cancel{(n+2)}}\, r^{n+1}$$

$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{Q}{2\pi h \varepsilon_0} \frac{r^{n+1}}{R^{n+2}}}$$

se $\lambda = Q/h$ (densità lineare) ed inoltre $n=0$ (carica distribuita uniformemente) otteniamo:

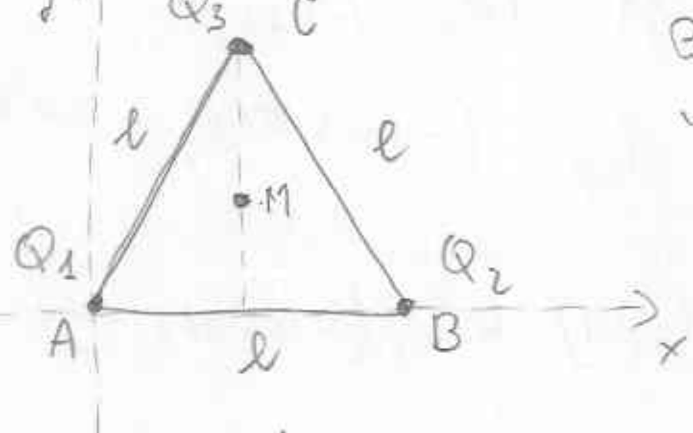
$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \frac{r}{R^2}$$

che nel caso in cui $r = R$ $\quad |\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}$
risultato compatibile con quanto ottenuto precedentemente nel caso di un filo uniformemente carico.

N.B. Nel caso $n=0$ C_0 rappresenta la densità di carica (uniforme). Infatti:

$$C_0 = \frac{2Q}{2\pi h R^2} = \frac{Q}{\pi R^2 h} = \frac{Q}{V} = \rho = \text{cost.}$$

- Data la configurazione seguente:



Calcolare il campo elettrico nel punto M e nel punto A

Il campo elettrico è:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\vec{r}_{AM}|^2}\hat{r}_{AM} + \frac{Q_2}{|\vec{r}_{BM}|^2}\hat{r}_{BM} + \frac{Q_3}{|\vec{r}_{CM}|^2}\hat{r}_{CM}\right)$$

per la simmetria del problema abbiamo:

$$|\vec{r}_{CH}| = |\vec{r}_{BH}| = |\vec{r}_{AH}| = \sqrt{3}/4\ \ell \,;$$

$$\hat{r}_{AH} = (\cos \pi/6,\ \sin \pi/6)$$

$$\hat{r}_{BM} = (-\cos \pi/6,\ \sin \pi/6)$$

$$\hat{r}_{CH} = (0\ ,\ -1)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{3\ell^2/\cancel{16}_{4}}\left\{ Q_1(\cos \pi/6, \sin\pi/6) + Q_2(-\cos\pi/6, \sin\pi/6) + Q_3(0,-1)\right\};$$

$$\vec{E} = \frac{4}{3\pi\varepsilon_0 \ell^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(Q_1 - Q_2)\ ,\ \frac{1}{2}(Q_1+Q_2) - Q_3\right)$$

cioè

$$E_x = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1 - Q_2}{\ell^2}\,; \quad E_y = \frac{2}{3\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1+Q_2-2Q_3}{\ell^2}\,;$$

Nel punto A, invece, abbiamo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_2}{|\vec{r}_{AB}|^2}\,\hat{r}_{BA} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_3}{|\vec{r}_{AC}|^2}\,\hat{r}_{CA}$$

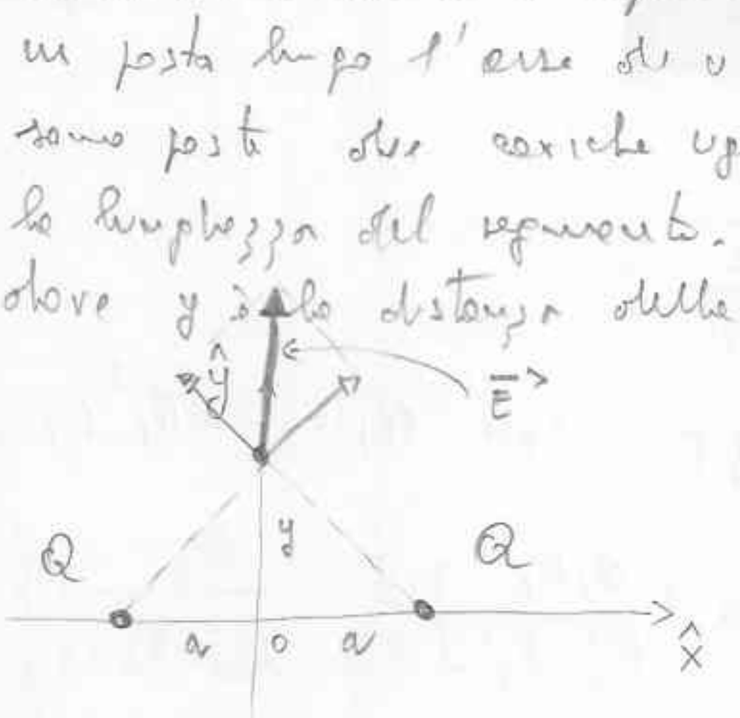
$$\hat{r}_{BA} = (0,-1)\,; \quad \hat{r}_{CA} = (-\cos\pi/3,\ -\sin\pi/3)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\ell^2}\left\{ Q_2(0,-1) + Q_3(-\cos\pi/3, -\sin\pi/3)\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\ell^2}\left(-Q_3\cos\pi/3\ ,\ -Q_2 - Q_3\sin\pi/3\right)$$

$$E_x = -\frac{Q_3}{8\pi\varepsilon_0 \ell^2}\ ; \quad E_y = -\frac{Q_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}Q_3}{4\pi\varepsilon_0 \ell^2}\ ;$$

• Descrivere moto di una particella di carica $-q$ e massa m posta lungo l'asse di un segmento ai cui capi sono posti due cariche uguali pari a Q. Sia $2a$ la lunghezza del segmento. Supporre che $a >> y$ dove y è la distanza della carica $-q$ dal segmento.



Il campo elettrico nel punto $(0,y)$ è dato da

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2+y^2}\, 2\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\,\hat{y}$$

$$\vec{E} = \frac{Q\,\vec{y}}{2\pi\varepsilon_0 (a^2+y^2)^{3/2}}\ ;$$

L'equazione del moto: $m\vec{a} = -q\vec{E}$;

ma $\vec{a} = \frac{d^2\vec{y}}{dt^2}$ quindi $\boxed{m\frac{d^2\vec{y}}{dt^2} = -\frac{Qq\,\vec{y}}{2\pi\varepsilon_0 (a^2+y^2)^{3/2}}}$

se $a >> y$ e considerato che il moto avviene solo lungo l'asse y:

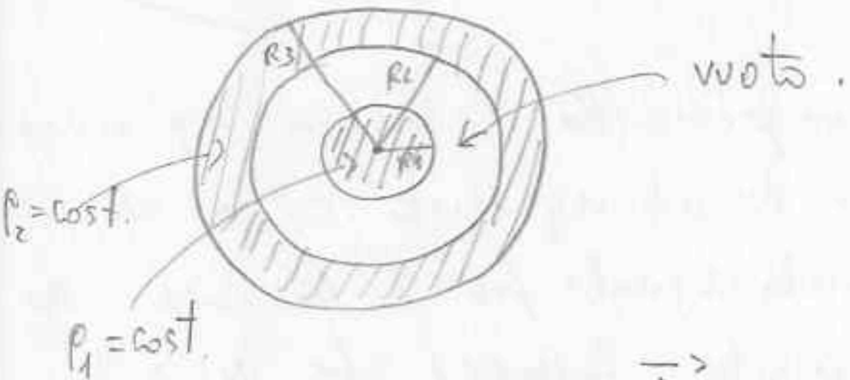
$$m\ddot{y} + \frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\,y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0}$$ (OSCILLATORE ARMONICO)

con $\omega_0^2 = \frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 m a^3}$;

La carica $-q$ descriverà un moto periodico lungo l'asse y.

- Calcolo differenza potenziale $V(0) - V(r)$ per la configurazione seguente:

[Q_1 : carica nella sfera; Q_2 : carica nel guscio sferico;]



$$0 \le r \le R_1 \Rightarrow \vec{E}_A = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{R_1^3};$$

$$R_1 \le r \le R_2 \Rightarrow \vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \hat{r} \quad \text{con} \quad Q_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1;$$

$$R_2 \le r \le R_3 \Rightarrow \vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \left[Q_1 + \frac{Q_2 R_2^3}{R_3^3 - R_2^3} \right] \frac{1}{r^2} - \frac{Q_2}{R_3^3 - R_2^3} r \right\} \hat{r};$$

$$r \ge R_3 \Rightarrow \vec{E}_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r^2} \hat{r} \quad \text{con} \quad Q_2 = \frac{4}{3}\pi (R_3^3 - R_2^3) \rho_2;$$

In generale abbiamo:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

[Infatti nel caso puntiforme abbiamo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q/r^2 \, \hat{r} \qquad V(r) - V(\infty) \doteq V(r) = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}\Big|_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r};$$

ma $\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \vec{E} = -\left[\frac{d}{dr} V(r)\right]\hat{r} = -\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}\right)\right]\hat{r} =$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}.$$]

se $\underline{\underline{0 \le r \le R_1}}$

$$V(0) - V(r) = \int_0^r \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{R_1^3} \cdot d\vec{l} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1^3} \int_0^r \vec{r} \cdot d\vec{l} =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1^3} \int_0^r r\,dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1^3} \frac{r^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(0) - V(r) = \frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{r^2}{R_1^3}}$$

se $R_1 \le r \le R_2$

$$V(0) - V(r) = \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{R_1} \vec{E}_A \cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^r \vec{E}_B \cdot d\vec{l} =$$

$$= \frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1} + \int_{R_1}^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} =$$

$$= \frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{R_1}^r =$$

$$= \frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1};$$

$$\Rightarrow \boxed{V(0) - V(r) = \frac{3Q_1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}}$$

se $R_2 \le r \le R_3$

$$V(0) - V(r) = \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{R_1} \vec{E}_A \cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_B \cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{r} \vec{E}_C \cdot d\vec{l} =$$

$$= \frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1} + \int_{R_2}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[Q_1 + \right.\right.$$

$$\left.+ \frac{Q_2 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3}\right]\frac{1}{r^2} - \frac{Q_2}{R_3^3 - R_2^3} r \int \hat{r} \cdot d\vec{l} =$$

$$= \frac{3Q_1}{8\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(Q_1 + \frac{Q_2 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3}\right)\int_{R_2}^{r} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{l} +$$

$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_3^3 - R_2^3}\int_{R_2}^{r} \vec{r} \cdot d\vec{l} =$$

$$= \frac{3Q_1}{8\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(Q_1 + \frac{Q_2 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3}\right)\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R_2}\right) +$$

$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_3^3 - R_2^3}\frac{1}{2}\left(r^2 - R_2^2\right) =$$

$$= \frac{3Q_1}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3}\frac{1}{R_2} + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 R_2^2}{R_3^3 - R_2^3} +$$

$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(Q_1 + \frac{Q_2 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3}\right)\frac{1}{r} - \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_3^3 - R_2^3} r^2 ;$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} V(0) - V(r) &= \frac{3Q_1}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 (R_3^3 - R_2^3)}\frac{2R_3^3 + R_2^3}{2R_2} + \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(Q_1 + \frac{Q_2 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3}\right)\frac{1}{r} - \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_3^3 - R_2^3} r^2 \end{aligned}}$$

Se $r \ge R_3$

$$V(0)-V(r) = \int_0^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^{R_1} \vec{E}_A\cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_B\cdot d\vec{l} +$$

$$+ \int_{R_2}^{R_3} \vec{E}_C\cdot d\vec{l} + \int_{R_3}^{r} \vec{E}_D\cdot d\vec{l} =$$

$= \dots$ I calcoli sono formalmente uguali ai precedenti.

• Calcolo energia del campo elettrico generato da una sfera di raggio R con una carica Q distribuita con densità proporzionale alla distanza radiale al quadrato.

$$\rho = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{costante}}}{C}\, r^2$$

per $0 \le r \le R \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^5}\hat{r}$

per $r \ge R \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$

La densità d'energia è definita come

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$$

Quindi l'energia è:

$$U = \int_{\text{volume}} dV\, u = \int_{\text{sfera}} dV\, u + \int_{\text{vuoto}} dV\, u =$$

$$= \int d\varphi \sin\theta\, d\theta\, r^2 dr\, \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^5}\right)^2 + \int d\varphi \sin\theta\, d\theta\, r^2 dr \cdot$$

$$\cdot \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right)^2 = \cancel{4\pi}\frac{\cancel{\varepsilon_0}}{2}\frac{Q^2}{\underset{4}{\cancel{16}}\cancel{\pi^2}\varepsilon_0^{\cancel{2}}}\frac{1}{R^{10}}\int_0^R r^8 dr +$$

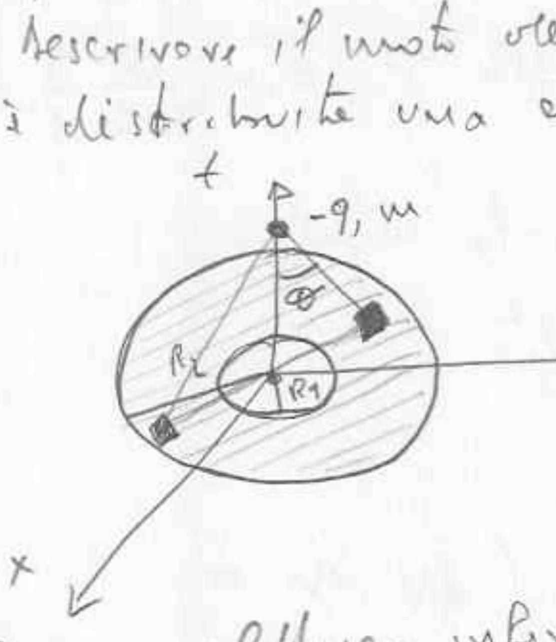
$$+ \cancel{4\pi}\, \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \int_R^\infty \frac{1}{r^2}\, dr =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^{10}} \left.\frac{r^9}{9}\right|_0^R + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_R^\infty =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^{10}}\frac{R^9}{9} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} = \frac{Q^2}{72\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} =$$

$$= \frac{5Q^2}{36\pi\varepsilon_0 R};$$

- Un disco omogeneo di raggio R_2 ha un foro circolare di raggio R_1 ($<R_2$) concentrico con il primo disco. Sull'asse perpendicolare al piano della corona e passante per il centro è posta una carica $-q$. Descrivere il moto della carica $-q$ (e massa m) se è distribuita una carica $Q>0$ sulla corona.



$$\sigma = \frac{Q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

Il campo elettrico infinitesimo vale $d\vec{E} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dS'\,\vec{z}}{(r^2+z^2)^{3/2}}$

Quindi

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\vec{z}\int_0^\pi d\theta \int_{R_1}^{R_2}\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma\vec{z}}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right);$$

Quindi l'equazione del moto (di Newton) è:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{z} = -q \vec{E}$$ che in modulo:

$$m \frac{d^2}{dt^2} z = -\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}} \right) z$$

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{q\sigma}{2m\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}} \right) z = 0}$$

se $z \ll R_1, R_2$ (Piccole oscillazioni intorno al piano xy) otteniamo:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}} \right) z \simeq \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) z + \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{q\sigma}{2m\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) z = 0}$$

è un moto periodico (oscillatore) con pulsazione ω_0 pari a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{q\sigma}{2m\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m} \frac{1}{R_1 R_2 (R_1+R_2)}} ;$$

Da notare che $[\omega_0] = [T]^{-1}$;