CAMPO MAGNETICO

Formule utili per la magnetostatica:

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \wedge \vec{B} \qquad \vec{F} = q\, \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint i \frac{d\vec{l} \wedge \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

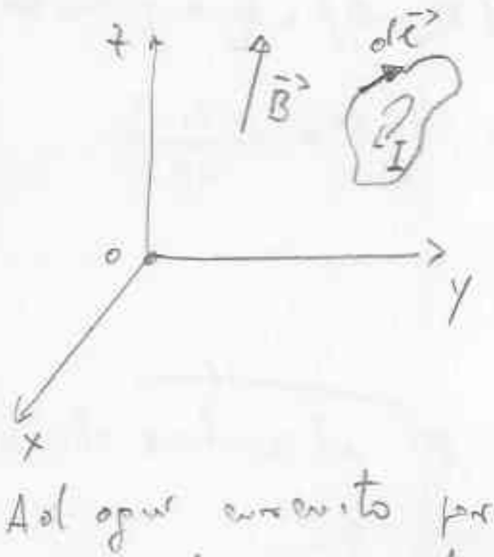
Forze reciproche fra due circuiti percorsi da corrente:

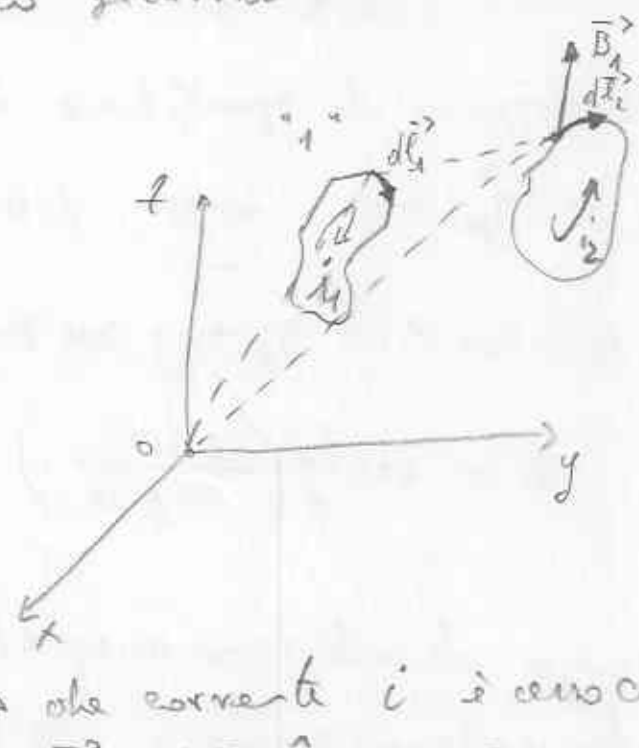
$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_2} i_2\, d\vec{l}_2 \wedge \oint_{c_1} i_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}_{1,2}}{|\vec{r}_{1,2}|^3}$$

$$\vec{F}_{2,1} = \dots = -\vec{F}_{1,2}$$

$\vec{F}_{1,2}$: forza subita dal circuito "2" per la presenza del campo magnetico generato dal circuito "1"

$\vec{F}_{2,1}$: il contrario.



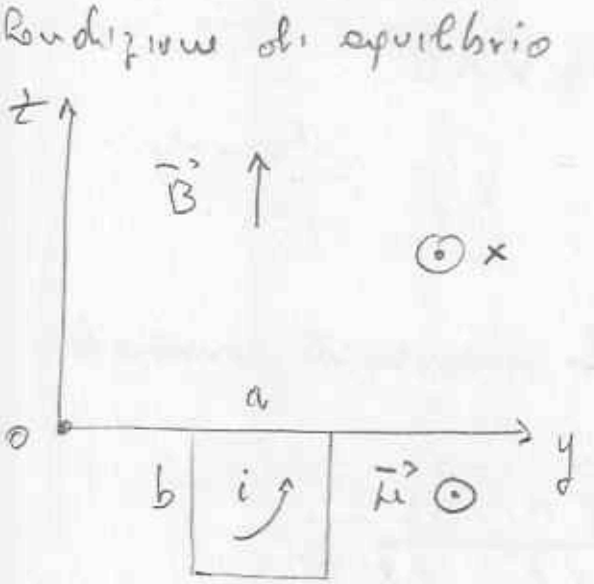


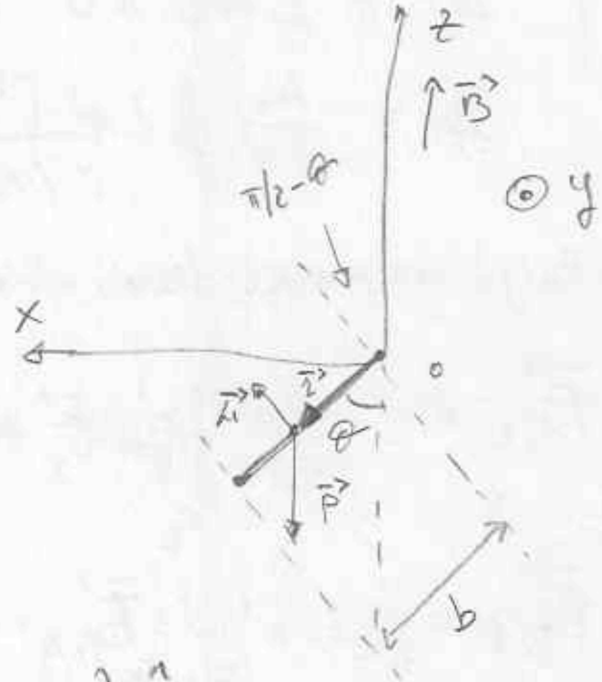
Ad ogni circuito percorso da corrente i è associato un momento magnetico: $\vec{\mu} = i\, \Sigma\, \hat{u}_n$ Σ: superficie del circuito; $\hat{u}_n \rightarrow$ versore ortogonale al piano contenente il circuito. Il verso è tale da vedere la corrente che fluisce in senso antiorario.

Una spira è soggetta ad un momento meccanico pari a

$$\vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

Condizione di equilibrio per una spira.





$$\vec{\mu} = i a b \, \hat{x}$$

$$\vec{M}_\mu = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = -\mu B \sin(\pi/2 - \theta)\, \hat{y}$$

$$\vec{M}_p = \vec{l} \wedge \vec{P} = \frac{b}{2} m g \sin\theta \, \hat{y}$$

Quindi la condizione di equilibrio è data da:

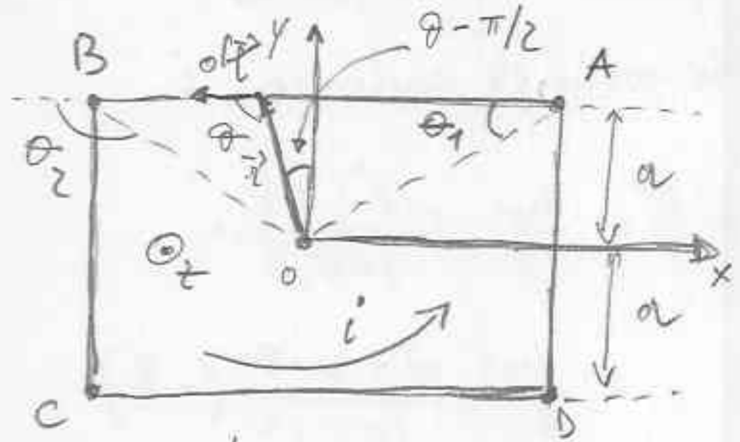
$$\vec{M}_\mu + \vec{M}_p = 0 \Rightarrow \mu B \sin(\pi/2 - \theta) = \frac{b}{2} m g \sin\theta$$

$$\Rightarrow \mu B \cos\theta = b/2 \, m g \sin\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\mu B}{m g b}$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{2\mu B}{m g b}\right) -$$

Calcolo campo di induzione magnetica $\vec{B}$ al centro di una spira rettangolare percorsa da corrente i.

②



In forma differenziale

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin\theta}{|\vec{r}|^2} \hat{z}$$

Geometricamente sappiamo che:

$$a = |\vec{r}| \cos(\theta - \pi/2) = |\vec{r}| \sin\theta \Rightarrow |\vec{r}| = \frac{a}{\sin\theta}$$

$$l = a \, tg(\theta - \pi/2) \Rightarrow dl = \frac{a \, d\theta}{\sin^2\theta}$$

Quindi:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{a \, d\theta}{\sin^2\theta} \sin\theta \frac{\sin^2\theta}{a^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \sin\theta \, d\theta$$

$$\vec{B}\Big|_{AB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \hat{z} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \hat{z} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

Considerato che:

$$\cos\theta_1 = -\cos\theta_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

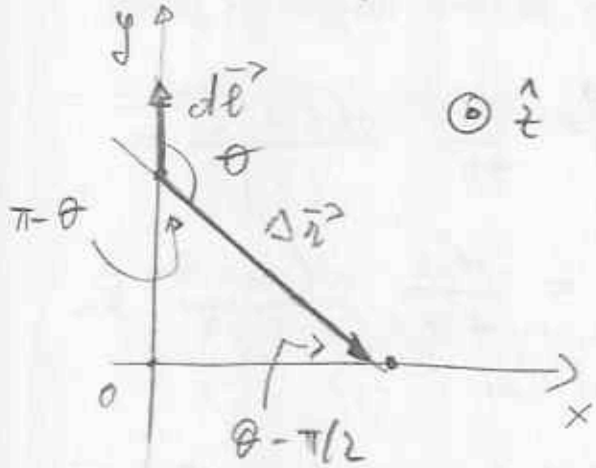
$$\vec{B}\Big|_{AB} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \hat{z}$$

In maniera analoga troviamo: $\vec{B}\Big|_{BC} = \frac{\mu_0 i}{2\pi b} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \hat{z}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{\pi a} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \hat{z} + \frac{\mu_0 i}{\pi b} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \hat{z} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{\pi a b} \sqrt{a^2+b^2} \, \hat{z} \, ;$$

Filo indefinito percorso da corrente continua i



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\wedge\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dy\sin\theta}{|\Delta\vec{r}|^2}(-\hat{z})$$

$$= -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\sin\theta\, dy}{|\Delta\vec{r}|^2}\hat{z}$$

$$|\Delta\vec{r}|^2 = x^2+y^2 \ ; \quad y = \sin(\theta-\pi/2)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta-\pi/2) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \dots = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ;$$

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{x^2+y^2}dy = \frac{\mu_0 i}{4\pi}x\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

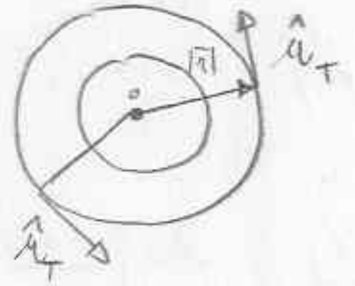
$$|\vec{B}| = \int|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\times\frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{1}{x}\hat{x}}$$

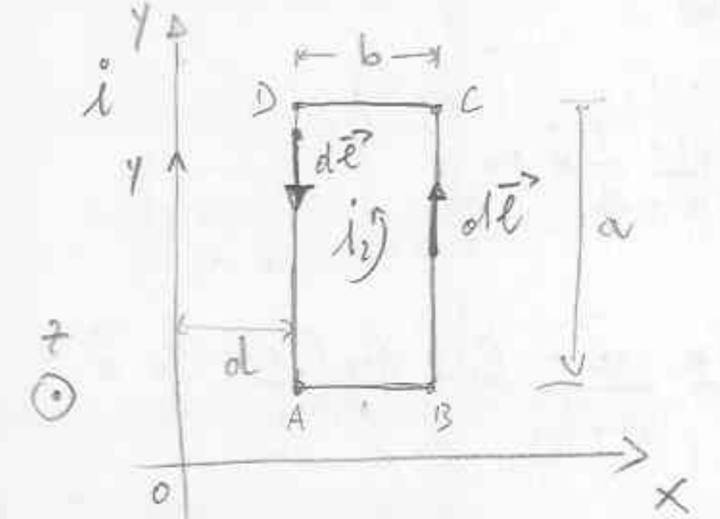
Data la generica posizione dell'asse x quale asse ortogonale al filo percorso da corrente, otteniamo:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{|\vec{r}|}\hat{u}_T$$

dove $\hat{u}_T$ il versore tangente alla circonferenza di raggio $|\vec{r}|$.



Forze risultanti sul circuito rettangolare percorso da corrente in prossimità di un filo indefinito percorso anch'esso da corrente.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x}\hat{u}_T$$

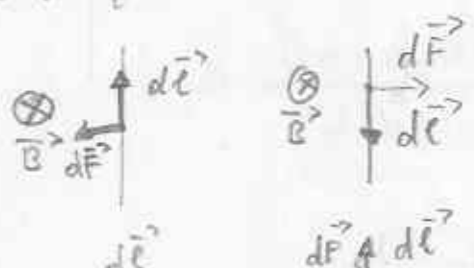
Volendo calcolare il flusso Φ concatenato al circuito abbiamo:

$$\Phi = \int_{S'} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_{S'} \frac{1}{x}\hat{u}_T\cdot d\vec{S} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_{d}^{d+b}\frac{dx}{x}\int_0^a dy =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi}\, a \ln\left(\frac{d+b}{d}\right);$$

La forza agente sulla spira è diretta sui quattro rami come segue:



$$\begin{cases} d\vec{F}_{\overline{AB}} = i_2\, d\vec{l}\wedge\vec{B} = i_2\, dx\, B(x)\,\hat{y} \\ d\vec{F}_{\overline{BC}} = i_2\, d\vec{l}\wedge\vec{B} = -i_2\, dy\, B(d+b)\,\hat{x} \\ d\vec{F}_{\overline{CD}} = \text{----} = -i_2\, dx\, B(x)\,\hat{y} \\ d\vec{F}_{\overline{DA}} = \text{----} = i_2\, dy\, B(d)\,\hat{x} \end{cases}$$

Integrando su ogni lato abbiamo:

$$\vec{F}_{\overline{AB}} = i_2\,\hat{y}\int_d^{d+b} B(x)\,dx = \frac{i_2 i_1 \mu_0}{2\pi}\hat{y}\int_d^{d+b}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\hat{y}\ln\left(\frac{d+b}{d}\right)$$

$$\vec{F}_{\overline{BC}} = -i_2 B(d+b)\,\hat{x}\int_0^a dy = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\frac{\hat{x}}{d+b}a$$

$$\vec{F}_{\overline{CD}} = -i_2\hat{y}\int_d^{d+b} B(x)\,dx = -\vec{F}_{\overline{AB}};$$

$$\vec{F}_{\overline{DA}} = i_2 B(d)\hat{x}\int_0^a dy = i_2\frac{\mu_0 i_1}{2\pi}\frac{1}{d}\hat{x}\,a;$$

Quindi la forza totale è:

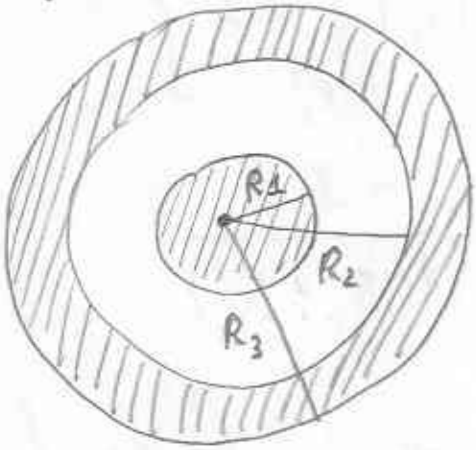
$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{\overline{BC}} + \vec{F}_{\overline{DA}} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\frac{a}{d+b}\hat{x} + \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\frac{a}{d}\hat{x} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}i_1 i_2\left[\frac{a}{d} - \frac{a}{d+b}\right]\hat{x} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}i_1 i_2\frac{\cancel{ad}+ab-\cancel{ad}}{d(d+b)}\hat{x};$$

$$\boxed{\vec{F}_{TOT} = \frac{\mu_0}{2\pi}i_1 i_2\frac{ab}{d(d+b)}\hat{x}}$$

Filo conduttore coassiale percorso da correnti uguali ma in verso opposto. Calcolare il campo di induzione magnetica $\vec{B}$. (4)



Suddividiamo lo spazio in quattro zone:

① $0 \leq r \leq R_1$

② $R_1 \leq r \leq R_2$

③ $R_2 \leq r \leq R_3$

④ $r \geq R_3$

Nella regione ① applichiamo il teorema della circuitazione di Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Per la simmetria cilindrica abbiamo una forma molto semplificata:

$$\int_0^{2\pi} |\vec{B}(r)|\, r\, d\theta = \mu_0 |\vec{J}| \int_0^{\pi r^2} dS$$

$$|\vec{B}(\vec{r})|\, 2\pi r = \mu_0 |\vec{J}|\, \pi r^2$$

$$\boxed{|\vec{B}(\vec{r})| = \frac{\mu_0}{2} |\vec{J}|\, r = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{\pi R_1^2}\, r}$$

poichè $|\vec{J}| = I/\pi R_1^2$

Nella regione ② abbiamo:

$$\int_0^{2\pi} |\vec{B}(\vec{r})|\, r\, d\theta = \mu_0 |\vec{J}| \int_0^{\pi R_1^2} dS$$

$$\boxed{|\vec{B}(\vec{r})| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}}$$

nella regione ③ abbiamo anche il contributo della corrente che scorre in verso opposto. Quindi:

$$\int_0^{2\pi} |\vec{B}(\vec{r})|\, r\, d\theta = \mu_0 \left\{ |\bar{J}_1| \int_0^{\pi R_1^2} dS + |\bar{J}_2| \int_{\pi R_2^2}^{\pi r^2} dS \right\} =$$

dove $|\bar{J}_1| = \frac{I}{\pi R_1^2}$ e $|\bar{J}_2| = \frac{-I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}$

quindi

$$|\vec{B}(\vec{r})|\, 2\pi r = \mu_0 \left\{ \frac{I}{\pi R_1^2} \int_0^{\pi R_1^2} dS - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \int_{\pi R_2^2}^{\pi r^2} dS \right\}$$

$$= \mu_0 I \left\{ 1 - \frac{\pi(r^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \right\}$$

$$= \mu_0 I \, \frac{R_3^2 \cancel{- R_2^2} - r^2 \cancel{+ R_2^2}}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$\boxed{|\vec{B}(\vec{r})| = \frac{\mu_0}{2\pi} I \, \frac{1}{r} \, \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}}$$

Nella regione ④ abbiamo:

$$\int_0^{2\pi} |\vec{B}(\vec{r})|\, r\, d\theta = \mu_0 \left\{ |\bar{J}_1| \int_0^{\pi R_1^2} dS + |\bar{J}_2| \int_{\pi R_2^2}^{\pi R_3^2} dS \right\} =$$

$$= \mu_0 \left\{ |\bar{J}_1| \, \pi R_1^2 + |\bar{J}_2| \, \pi (R_3^2 - R_2^2) \right\} =$$

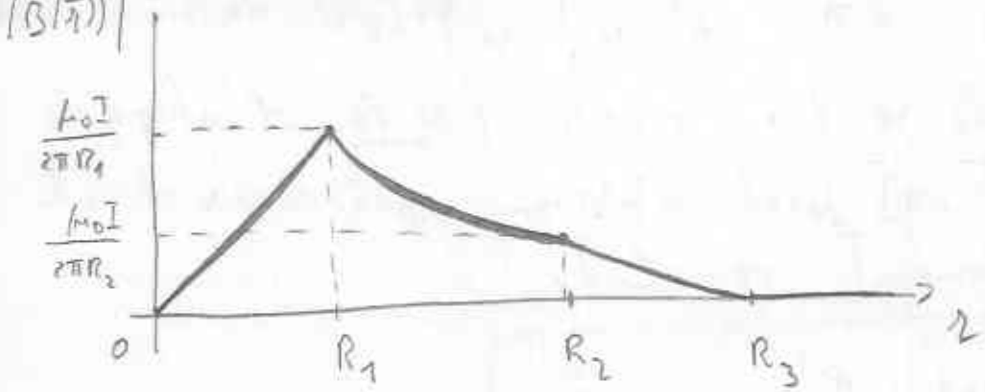
$$= \mu_0 \cdot 0 \; ;$$

$$\boxed{\left|\vec{B}(\vec{r})\right| = 0}$$ (5)

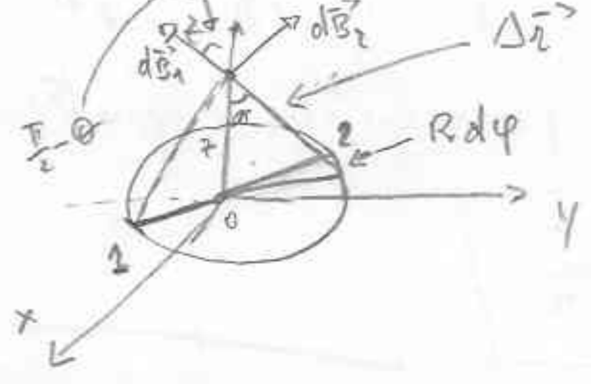
Ricapitolando abbiamo che il modulo del campo di induzione magnetica è:

$$\left|\vec{B}(\vec{r})\right| = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi} I/_{R_1^2}\ r & 0 \le r \le R_1 \\ \frac{\mu_0}{2\pi} I/r & R_1 \le r \le R_2 \\ \frac{\mu_0}{2\pi} I/_r \ \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} & R_2 \le r \le R_3 \\ 0 & r \ge R_3 \end{cases}$$

Graficando il profilo radiale:



Filo circolare percorso da corrente i. Calcolare $\vec{B}$ lungo l'asse di simmetria ortogonale alla spira.



$$|d\vec{\ell}| = R\,d\varphi$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, i\, \frac{d\vec{l} \wedge \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

generico contributo del tratto $d\vec{l}$ di spira percorso da corrente i.

Per simmetria un contributo simile si ottiene considerando il tratto diametralmente opposto. Quindi sopravvive soltanto la componente lungo l'asse z.

$$d\vec{B}\Big| = 2\cos(\pi/2 - \theta)\, \frac{\mu_0 i}{4\pi}\, \frac{dl}{|\Delta\vec{r}|^2}\, \hat{z}$$

$$= \sin\theta\, \frac{\mu_0 i}{2\pi}\, \frac{R\, d\varphi}{z^2 + R^2}\, \hat{z}$$

Considerando il triangolo 

$\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}$

Per cui

$$d\vec{B}\Big| = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\, \frac{R\, d\varphi}{z^2 + R^2}\, \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}\, \hat{z}$$

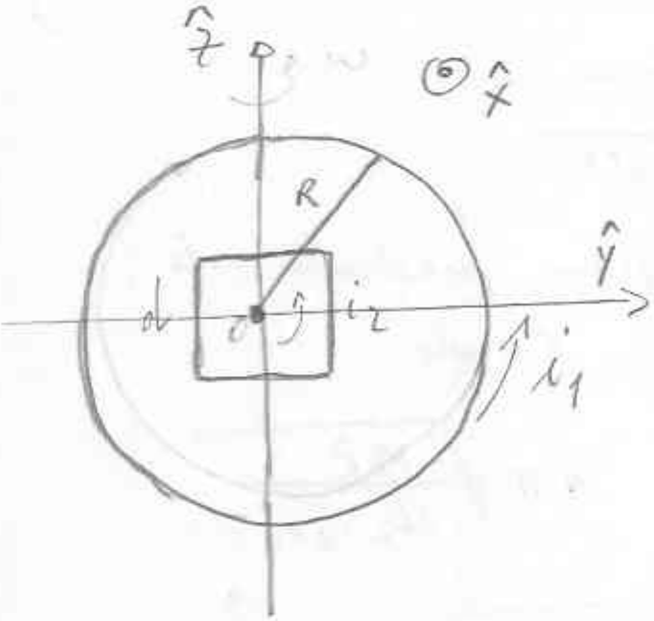
integrando sull'angolo φ tra 0 e π. (N.B. l'integrale non va esteso su $[0, 2\pi]$ poiché abbiamo già considerato l'elemento diametralmente opposto).

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2}\, \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\, \hat{z}}$$

notiamo che $\lim_{z\to\infty} \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2}\, \frac{R^2}{z^3}\, \hat{z} = \frac{\mu_0}{2\pi}\, \frac{i\pi R^2}{z^3}\, \hat{z}$

se definiamo $\vec{m} = i\pi R^2 \hat{z}$ (momento magnetico della spira)

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\, \frac{\vec{m}}{z^3}}$$

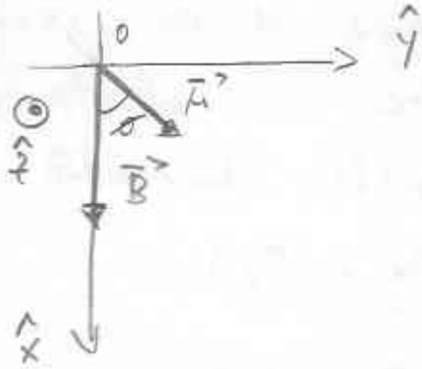


La spira quadrata può ruotare intorno all'asse z mentre la spira circolare è fissa. Calcolare il periodo d'oscillazione della spira quadrata se inizialmente non sono complanari.

Il campo $\vec{B}$ generato dalla spira circolare nel punto O è:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2} \frac{\hat{x}}{R}$$

il momento magnetico della spira quadrata vale in modulo $d^2 i_2$. Graficamente abbiamo:



Il momento meccanico sulla spira quadrata è $\vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{M} = -\mu B \sin\theta\, \hat{z} = -d^2 i_2 \frac{\mu_0 i_1}{2} \frac{1}{R} \sin\theta\, \hat{z}$$

$$\vec{M} = -\frac{\mu_0}{2} i_1 i_2\, d^2/R \, \sin\theta\, \hat{z}$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\mu_0}{2} i_1 i_2\, d^2/R \, \sin\theta$$

se $\sin\theta \simeq \theta$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + \frac{\mu_0 i_1 i_2 d^2}{2IR}\theta = 0$$

È un oscillatore armonico di pulsazione $\omega^2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2 d^2}{2IR}$

quindi il periodo T è:

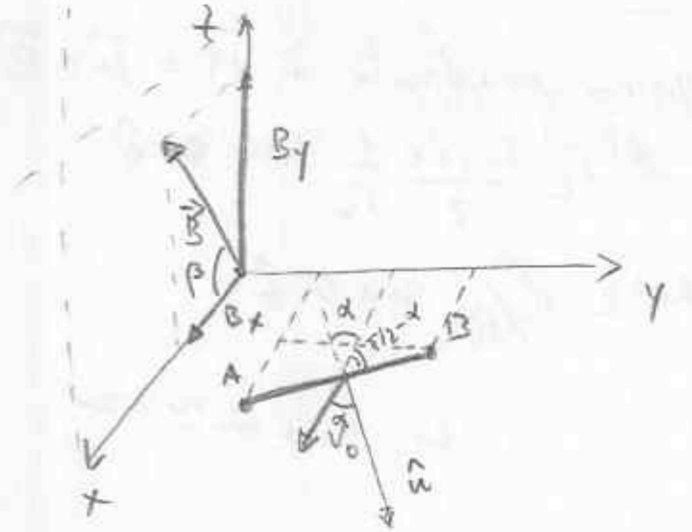
$$T = 2\pi/\omega = 2\pi \sqrt{\frac{2IR}{\mu_0 i_1 i_2 d^2}}$$

Il momento d'inerzia della spira quadrata vale $I = 2/3\, M d^2$ se M è la massa. Quindi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2\; 2/3\, M d^2 R}{\mu_0 i_1 i_2 d^2}} = 4\pi \sqrt{\frac{MR}{3\mu_0 i_1 i_2}}$$

$$\boxed{T = 4\pi \sqrt{\frac{MR}{3\mu_0 i_1 i_2}}}$$

Una sbarretta si muove in un piano xy immersa in un campo magnetico $\vec{B}$. Calcolare la differenza di potenziale ai capi della sbarretta. Supponiamo $\vec{v} = v_0 \hat{x}$ e $\vec{B} = (B_x, 0, B_z)$



Calcoliamo il campo elettrico indotto $\vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B}$

$$\det \begin{pmatrix} E_x & E_y & E_z \\ v_0 & 0 & 0 \\ B_x & 0 & B_z \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow \quad E_x = 0 \;;\; E_y = -v_0 B_z \;;\; E_z = 0$$

$$\vec{E} = (0, -v_0 B_z, 0) = (0, -v_0 B \sin\beta, 0)$$

la differenza di potenziale è:

$$\Delta V = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = -\int_A^B v_0 B \sin\beta \, dy =$$

$$= -\int_0^{\ell \sin(90-\alpha)} v_0 B \sin\beta \, dy = -v_0 B \sin\beta \, \ell \sin(90-\alpha)$$

dove ℓ è la lunghezza della sbarretta.

$$\Delta V = -v_0 B \ell \sin\beta \cos\alpha$$

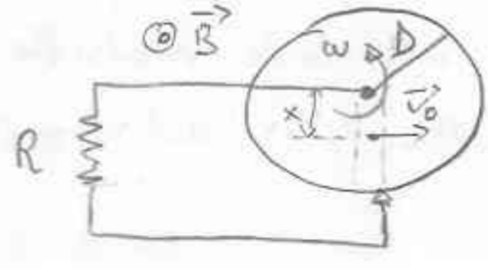
Circuito con lato mobile immerso in campo uniforme $\vec{B}$.

Considerando il risultato del precedente abbiamo

$$\Delta V = v_0 B d$$

La corrente che circola è $\Delta V / R \Rightarrow i = \frac{v_0 B d}{R}$

Disco conduttore di raggio D posto in rotazione con velocità angolare ω. Considerato il circuito in figura descrivere fenomeni fisici presenti.



Calcoliamo la differenza di potenziale tra il centro e la periferia del disco.

$$dV = (\vec{v}_0 \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \omega x B \, dx$$

$$V = \int_0^D dV = \int_0^D \omega x B \, dx = \frac{\omega B}{2} D^2$$

la corrente i indotta nel circuito è $i = V/R = \frac{\omega B D^2}{2R}$

Vi è una forza che si oppone al moto. Infatti sull'elemento $d\vec{\ell}$ di circuito vi è una forza di Lorentz:

$$d\vec{F} = I \, d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \Rightarrow |d\vec{F}| = i B \, dx =$$

$$= \frac{\omega B^2 D^2}{2R} \, dx$$

A questa forza c'è un momento frenante che tende a fermare il disco:

$$d\vec{M} = \vec{r} \wedge d\vec{F} \Rightarrow |d\vec{M}| = \frac{\omega B^2 D^2}{2R} x \, dx$$

integrato su tutto il tratto in questione:

$$|\vec{M}| = \int_0^D |d\vec{M}| = \frac{\omega B^2 D^2}{2R} \int_0^D x \, dx = \frac{\omega B^2 D^4}{4R}.$$

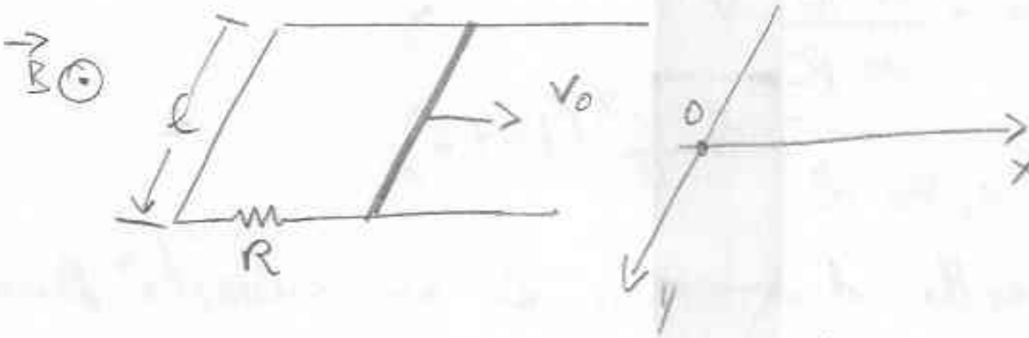
Quindi

$$\boxed{\vec{M} = -\frac{D^4 B^2}{4R} \vec{\omega}}$$

La potenza dissipata è:

$$W = \vec{M} \cdot \vec{\omega} = -\frac{D^4 B^2}{4R} \omega^2;$$

Un circuito rettangolare presenta un lato mobile. È presente un campo $\vec{B}$ ortogonale alla spira ed omogeneo. Calcolare la potenza dissipata:



$\vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ $\qquad \vec{E} \equiv (0,\ v_0 B,\ 0)$

$$\Delta V = \int_0^{\ell} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_0^{\ell} v_0 B\, dy = v_0 B \ell$$

la corrente i è pari a $v_0 B \ell / R$

La forza di Lorentz sul lato mobile è:

$$d\vec{F} = i\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \Rightarrow \quad \vec{F} = i\, \vec{\ell} \wedge \vec{B} = \dots = -\frac{\ell^2 B^2}{R}\vec{v}_0$$

La potenza dissipata è:

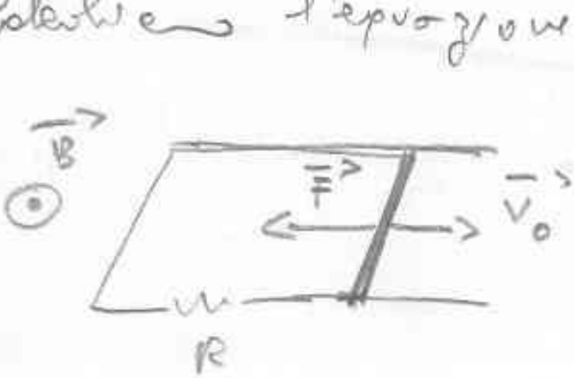
$$W = \vec{F}\cdot\vec{v}_0 = -\frac{\ell^2 B^2}{R}\vec{v}_0\cdot\vec{v}_0 = -\frac{\ell^2 B^2}{R} v_0^2 ;$$

notiamo che $\Delta V = iR$ quindi:

$$W = -\frac{\ell^2 B^2}{R} v_0^2 = -\cancel{\ell^2}\frac{\Delta V^2}{\cancel{v_0^2 \ell^2}}\frac{1}{R}\cancel{v_0^2} =$$

$$= -\Delta V^2 / R = -i^2 R \quad \left(\begin{array}{c}\text{EFFETTO}\\ \text{JOULE}\end{array}\right)$$

Calcoliamo l'equazione differenziale che governa il moto:



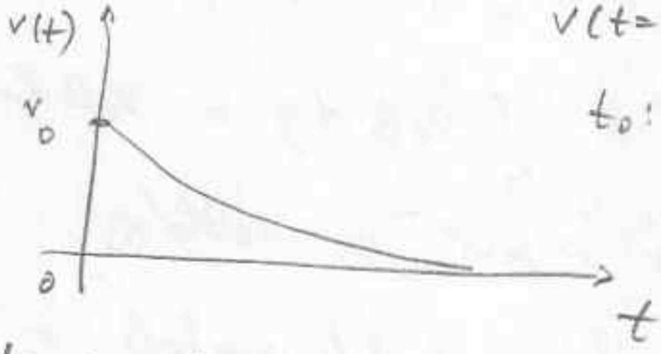
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\ell^2 B^2}{R}\vec{v}$$

m: massa della sbarretta.

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{l^2B^2}{mR}v$$

$$\Rightarrow \quad v = v(t) = v_0\, e^{-\frac{l^2B^2}{mR}(t-t_0)}$$

quindi la sbarretta diminuisce la sua velocità fino a fermarsi.



$v(t=t_0) = v_0$

t_0: istante iniziale.

Anche la corrente tende a diminuire nel circuito. Infatti:

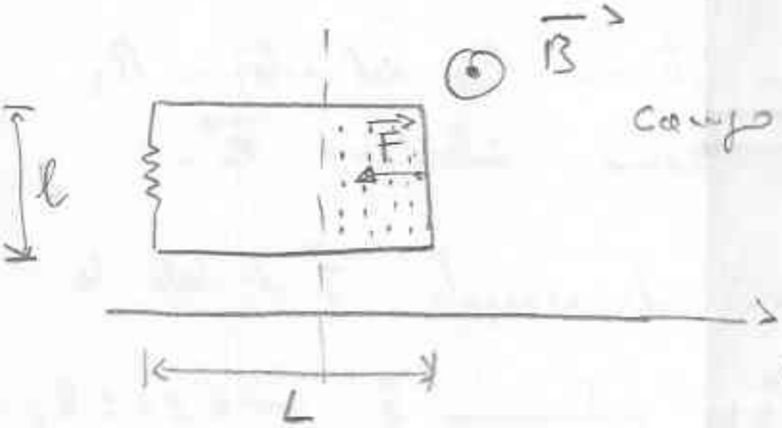
$$i(t) = \frac{v(t)Bl}{R} = \frac{Bl}{R}v_0\, e^{-\frac{l^2B^2}{mR}(t-t_0)}$$

Calcoliamo l'energia totale dissipata:

$$\int_0^\infty R\, i(t)^2\, dt = \cancel{R}\frac{B^2l^2v_0^2}{R^{\cancel{2}}}\int_0^\infty e^{-\frac{2l^2B^2}{mR}(t-t_0)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 .$$

L'energia dissipata è proprio l'energia cinetica iniziale con cui si muoveva la sbarretta.



Campo $\neq 0$ -

$\vec{F} = -\frac{B^2 l^2}{R}\vec{v}$ quindi per la legge del moto abbiamo:

$$dv = -\frac{B^2 l^2}{mR} v\,dt = -K\,dx$$

dove $K = \frac{B^2 l^2}{mR}$

$dv = -K\,dx \Rightarrow \int dv = -K\int dx \Rightarrow v - v_0 = -K(x - x_0)$

$v(x) = v_0 - Kx$ avendo posto $x_0 = 0$

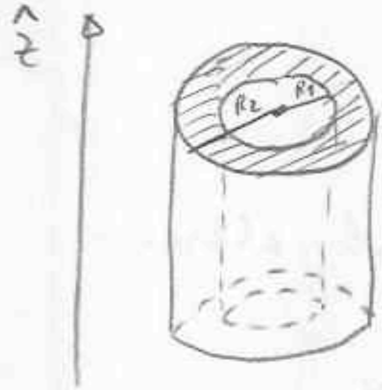
quando entra tutta la forza si annulla e si muove di velocità costante. $v(L) = v_0 - KL$

$$\Rightarrow v(L) = v_0 - \frac{B^2 l^2}{mR} L$$

Il moto avrà legge oraria pari a

$$x(t) = L + \left(v_0 - \frac{B^2 l^2}{mR} L\right) t$$

Un cilindro cavo di raggio interno R_1 ed esterno R_2 è percorso da corrente I uniforme. Calcolare $\vec{B}$.



La densità di corrente $\vec{J}$ è data da

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\,\hat{z} \quad \text{per } R_1 \le r \le R_2$$

Legge di Ampere: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$

$0 \le r \le R_1$

$$\oint B(r)\,d\ell = \mu_0 \int_{r<R_1} \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B(r) = 0}$$

$R_1 \le r \le R_2$

$$\oint B(r)\,d\ell = \mu_0 \int \frac{I}{\pi(R_2^2-R_1^2)}\,\hat{z}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_0^{2\pi} B(r)\,r\,d\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi(R_2^2-R_1^2)} \int_{S'} \hat{z}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_S \hat{z}\cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi(r^2-R_1^2)} dS = \pi(r^2 - R_1^2)$$

$$2\pi r\,B(r) = \frac{\mu_0 I}{\cancel{\pi}(R_2^2-R_1^2)}\,\cancel{\pi}(r^2 - R_1^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I}{r}\,\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}}$$

$r \geq R_2$

$$\int_0^{2\pi} B(r)\, r\, d\varphi = \mu_0 \int_{S'} \frac{I \quad \hat{z} \cdot d\vec{S}}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}$$

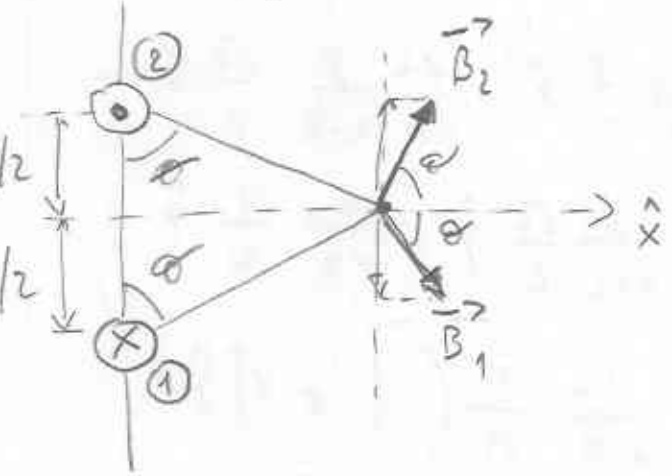
In questo caso

$$\int_{S'} \hat{z} \cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi(R_2^2 - R_1^2)} dS = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

Quindi

$$2\pi r\, B(r) = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \boxed{B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\, I/r}$$

Due fili posti a distanza d sono percorsi da correnti uguali di intensità I, dirette in verso opposto. Calcolare il campo d'induzione magnetica $\vec{B}$ sull'asse relativo al segmento congiungente i due fili.



$$\vec{B}_{TOT} = \left(|\vec{B}_2| \cos\theta + |\vec{B}_1| \cos\theta\right)\hat{x} =$$

$$= \left(|\vec{B}_1| + |\vec{B}_2|\right)\cos\theta\ \hat{x}$$

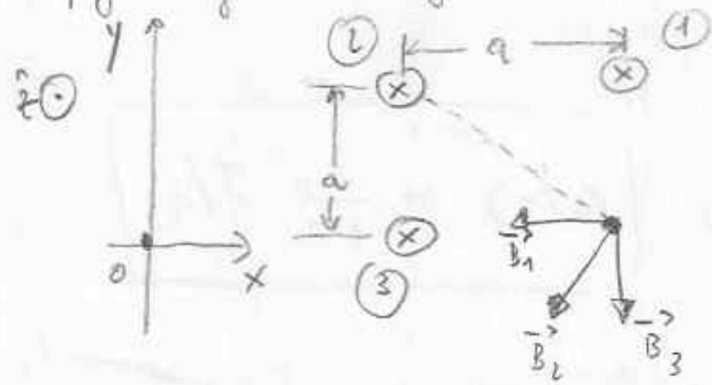
$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{x^2 + d^2/4}} \quad e \quad |\vec{B}_2| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{x^2 + d^2/4}}$$

$$\cos\theta = \frac{d/2}{\sqrt{d^2/4 + x^2}}; \quad \vec{B}_{TOT} = \cancel{2}\cdot\frac{\mu_0}{\cancel{2}\pi}\frac{I}{\sqrt{x^2+d^2/4}}\,\frac{d/2}{\sqrt{x^2+d^2/4}}\ \hat{x}$$

quindi.

$$\boxed{\vec{B}_{TOT} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\,d}{(x^2+d^2/4)}\,\hat{x}}$$

Tre fili indefiniti sono percorsi da corrente I in egual verso. Calcolare il campo $\vec{B}$ nel punto P in base alla configurazione seguente:



$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\,\hat{x}\ ; \qquad \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a\sqrt{2}}\cos 45°\,\hat{x} + \\ -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a\sqrt{2}}\sin 45°\,\hat{y}\ ;$$

$$\vec{B}_3 = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\,\hat{y}\ ;$$

$\cos 45° = \sin 45° = \sqrt{2}/2$

$$\vec{B}_{TOT} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\hat{x} - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \\ -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\hat{y}\ ;$$

$$\vec{B}_{TOT} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\left(1+\frac{1}{2}\right)\hat{x} - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hat{y} = \\ = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\frac{3}{2}\hat{x} - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\frac{3}{2}\hat{y} = -\frac{3\mu_0}{4\pi a}I(\hat{x}+\hat{y})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_{TOT} = -\frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{I}{a}(\hat{x}+\hat{y})}$$

Una particella di carica q e velocità $\vec{v} = v_{0y}\,\hat{y} + v_{0z}\,\hat{z}$ risente di un campo $\vec{B} = B_0\,\hat{z}$. Quanto vale la forza da applicare affinché la particella si muova di moto rettilineo ed uniforme. (11)

Affinché la particella si muova di moto rettilineo ed uniforme:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F} + \vec{F}_L = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{F}_L$$

$$\vec{F} = -\vec{F}_L = -q\,\vec{v} \wedge \vec{B} = -q \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & v_{0y} & v_{0z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} =$$

$$= -q\, v_{0y} B_0\, \hat{x}\,;$$

Quindi bisogna applicare un campo elettrico $\vec{E} = \vec{F}/q$

$$\boxed{\vec{E} = -\,v_{0y} B_0\, \hat{x}}$$