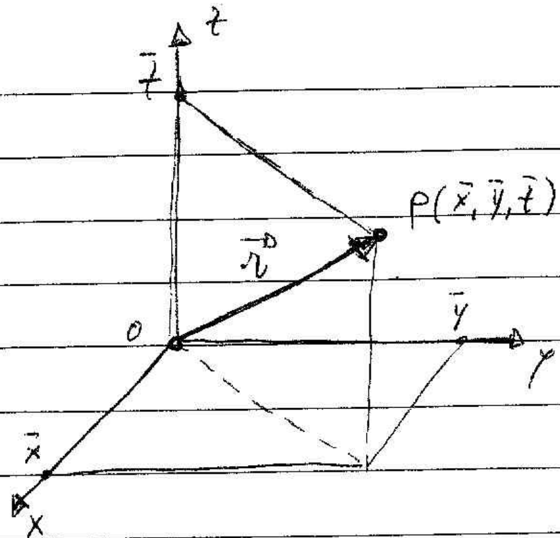
SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO

Il punto di partenza per uno studio ed un'analisi dei fenomeni fisici è individuare un sistema di riferimento rispetto al quale ha senso definire tutte le grandezze fisiche necessarie a tale studio (posizione, velocità, accelerazione, ecc.).
Dall'osservazione della Natura notiamo che noi e tutto ciò che ci circonda siamo immersi in uno spazio, per cui per individuare un suo punto è necessario identificare delle distanze da tre assi, non paralleli fra loro; solo quando sarà possibile individuare queste distanze, e quindi tre numeri, sarà possibile descrivere tutto lo spazio, identificando ogni suo punto con una terna di numeri.
Lasciando al lettore tutte le possibili implicazioni e soprattutto un'introduzione più rigorosa dal punto di vista matematico, introduciamo il concetto, quindi, di <u>sistema di riferimento</u>; e tra i vari possibili sistemi consideriamo quello <u>cartesiano monometrico</u>:
Ogni riferimento in seguito a sistemi sarà sempre a quello cartesiano, così definito:



Gli assi sono definiti in modo che vedendo ruotare l'asse x verso l'asse y in senso antiorario e con un angolo inferiore di π, l'asse z è uscente dalla parte di piano (contenente x e y) da cui si osserva tale rotazione.

Per individuare la posizione del punto P, come abbiamo detto, è necessario identificare i numeri $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ cioè le distanze dai vari assi. Per compattare e generalizzare tale operazione si introduce il concetto di <u>vettore</u>, cioè l'insieme di tre numeri o terna, che contiene tutte le informazioni suddette.

I vari numeri vengono definiti <u>componenti</u> del vettore, cioè la proiezione del vettore su ogni singolo asse.

Per ~~ogni~~ tutte le proprietà riguardanti i vettori si rimanda ad altra sede.

CINEMATICA CINEMATICA

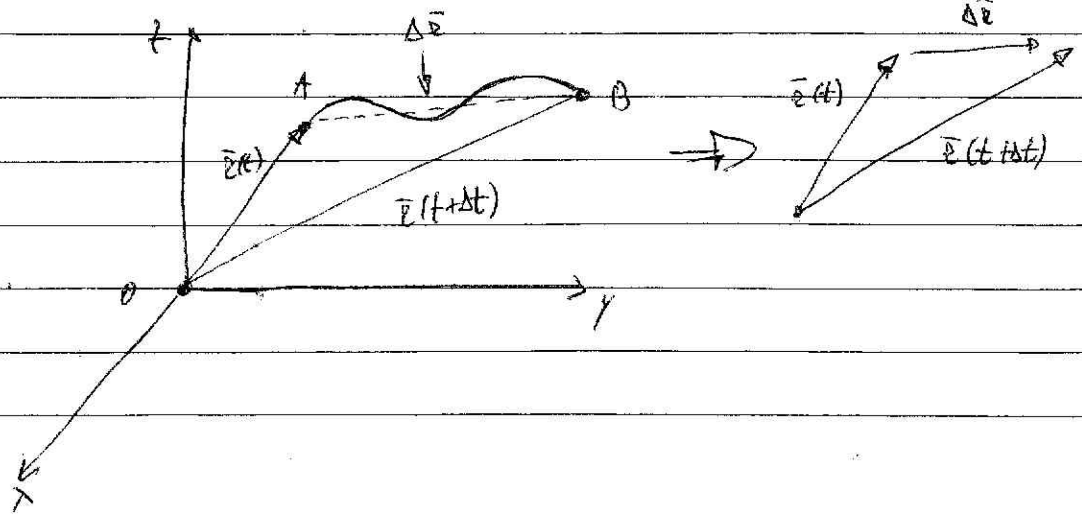
Il primo aspetto da curare, per poter poi studiare i fenomeni fisici, è relazionare fra loro le grandezze dello spazio e le loro variazioni nel tempo con il tempo stesso.
Avendo introdotto i sistemi di riferimento non si è ancora eseguita l'introduzione degli strumenti fondamentali. Infatti i sistemi di riferimento individuano delle posizioni ripetute, complete; manca ancora una grandezza fisica, un parametro responsabile delle variazioni di posizione.
A tal fine s'introduce, quindi, il tempo. Parametro scalare, cioè non vettoriale, tale che al suo fluire possiamo relazionare tra essi sia le posizioni sia le variazioni di posizione.
Il tempo, quindi, sarà inteso come una variabile indipendente e tutte le grandezze che introdurremo saranno funzioni di esso.
Quindi, il nostro vettore posizione in generale sarà individuato nel seguente modo:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t) \right)$$

La notazione vettoriale è comoda perché compatta in un solo simbolo tre grandezze scalari (nel caso della posizione, compatterà le rispettive posizioni lungo l'asse x, y e z). Ciò significa che ogni nostra relazione fisica sarà di natura vettoriale, implicando in realtà tre relazioni scalari.

Dopo aver individuato la posizione di un punto materiale attraverso il vettore posizione $\bar{r}$ all'istante di tempo t, consideriamo la posizione dello stesso punto ad un istante di tempo successivo t^*. Introduciamo l'intervallo di tempo $\Delta t = t^* - t$. In maniera simile, ma concettualmente analogo al processo di derivazione, consideriamo il rapporto incrementale:

$$\frac{\bar{r}(t^*) - \bar{r}(t)}{t^* - t} = \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



tale grandezza è denominata <u>velocità media</u> e rappresenta la variazione media della posizione nell'intervallo di tempo Δt nell'unità di tempo.
Bisogna notare che la velocità media è anch'essa un vettore, mentre $\Delta \bar{r}$ è la variazione tra l'istante t e $t+\Delta t$ della posizione del punto.
Siccome $\Delta \bar{r} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)$, volendo graficare questi vettori basta applicare la regola del parallelogramma.
Quanto ricavato non è la velocità posseduta dal punto ad ogni istante nell'intervallo ma è soltanto una media. Per ricavare una velocità, che definiremo <u>istantanea</u>, bisogna effettuare il processo di limite (come avviene per la derivata). Realizzato tale limite, otteniamo la velocità:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

<u>N.B.</u> Il simbolo $\frac{d\bar{r}}{dt}$ è un vettore e rappresenta:

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(v_x, v_y, v_z\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

In generale avremo che $\vec{v} = \vec{v}(t)$, quindi la velocità rappresenta anch'essa una funzione

del tempo.
Siccome la velocità è ancora una funzione del tempo, risulta interessante considerare, seguendo un processo analogo a quanto fatto per la posizione stessa, considerare la variazione della velocità nell'intervallo Δt.
Otteniamo, in questo caso, l'accelerazione, cioè la variazione della velocità. Anche per l'accelerazione si ottiene un'accelerazione media ed effettuando il processo di limite l'accelerazione istantanea.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

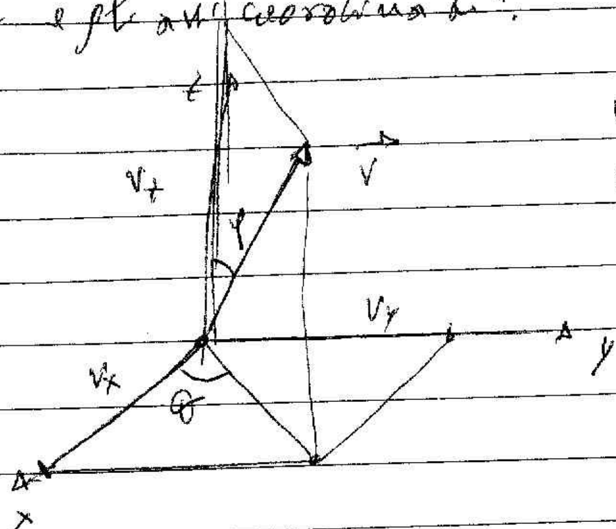
$$\vec{a} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

Volendo calcolare il modulo, cioè l'intensità totale della velocità o dell'accelerazione basta applicare il teorema di Pitagora in tre dimensioni:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \ldots = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \ldots = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Applicando le regole di trigonometria è possibile legare il modulo con le componenti del vettore considerando gli angoli tra i vettori in questione e gli assi coordinati:



$V_z = V \cos\varphi$
$V_x = V \sin\varphi \cos\theta$
$V_y = V \sin\varphi \sin\theta$

Abbiamo introdotto e legato fra loro le tre grandezze fondamentali della cinematica attraverso il parametro indipendente o variabile indipendente t cioè il tempo. L'operazione necessaria per passare dalla posizione all'accelerazione è la derivata da cui otteniamo che è possibile passare anche dall'accelerazione alla posizione utilizzando in questo caso il processo inverso della derivata cioè l'integrale. Otteniamo, quindi

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)dt \overset{\text{integrando}}{\Rightarrow} \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)dt \Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)dt$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)dt$$

Per risolvere l'integrale bisogna conoscere l'espressione analitica dell'accelerazione come funzione del tempo.

È di particolare importanza ~~che~~ il caso di <u>accelerazione costante</u>: $\vec{a}(t) = \text{costante} = \vec{a}_0$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \int_{t_0}^{t_1} dt = \bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{a}_0 (t_1 - t_0)$$

Da qui si ricava nel caso generale una dipendenza dal tempo nel seguente modo:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t \quad \left(\begin{array}{c}\text{MOTO UNIFORMEMENTE} \\ \text{ACCELERATO}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \left(v_x(t), v_y(t), v_z(t)\right) = \left(v_{0x} + a_x t, \dots, v_{0z} + a_z t\right)$$

Volendo ora legare lo spazio alla velocità otteniamo:

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)dt \xrightarrow{\text{integrando}} \int_{r_0}^{\bar{r}_1} d\bar{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)dt$$

$$\bar{r}_1 - \bar{r}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)dt \Rightarrow \vec{r}_1 = \bar{r}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)\,dt$$

Nel caso generale otteniamo:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\tau)\,d\tau$$

Sostituendo per l'espressione di $\vec{r}(t)$ quella ottenuta per il moto uniformemente accelerato, otteniamo:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0 + \vec{a}\tau)\, d\tau = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a} t^2$$ (MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO)

$$\vec{r}(t) = \left(x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2, \ldots, z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2\right)$$

N.B.

Consideriamo ora il caso in cui l'accelerazione sia nulla ($\vec{a} = 0$):

(MOTO RETTILINEO ED UNIFORME)

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}\int_{t_0}^{t_1} dt = \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0$$

Quindi la velocità non dipende dal tempo ed è costante.
Volendo ricavare, ora, anche lo spazio, abbiamo:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\tau)\, d\tau = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0\, d\tau =$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \int_{t_0}^{t} d\tau = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t-t_0)$$

In generale:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t \qquad \text{(MOTO RETTILINEO E UNIFORME)}$$

I due tipi di moto osservati sono in realtà i due più di interesse fisico, poichè, come vedremo successivamente, le accelerazioni sono il frutto dell'esistenza delle forze.
Vogliamo, ora, per concludere la trattazione della cinematica considerare il moto circolare uniforme.
Innanzitutto bisogna considerare che qualsiasi vettore può essere considerato come il prodotto di due grandezze: una vettoriale e l'altra scalare. La parte vettoriale tiene conto della direzione e del verso, con modulo unitario mentre la parte scalare rappresenta il modulo. Quindi, possiamo scrivere un qualsiasi vettore nella seguente forma:

$$\vec{A} = A\hat{a}$$

$\hat{a}$: vettore unitario (in modulo) detto <u>versore</u>.
A: modulo del vettore $\vec{A}$.
Abbiamo introdotto questa formulazione del vettore poichè quando si effettua una derivata

è possibile sviluppare quest'ultima in due pezzi: l'uno relativo solo alla variazione di direzione l'altro relativo solo all'intensità (o modulo). Infatti:

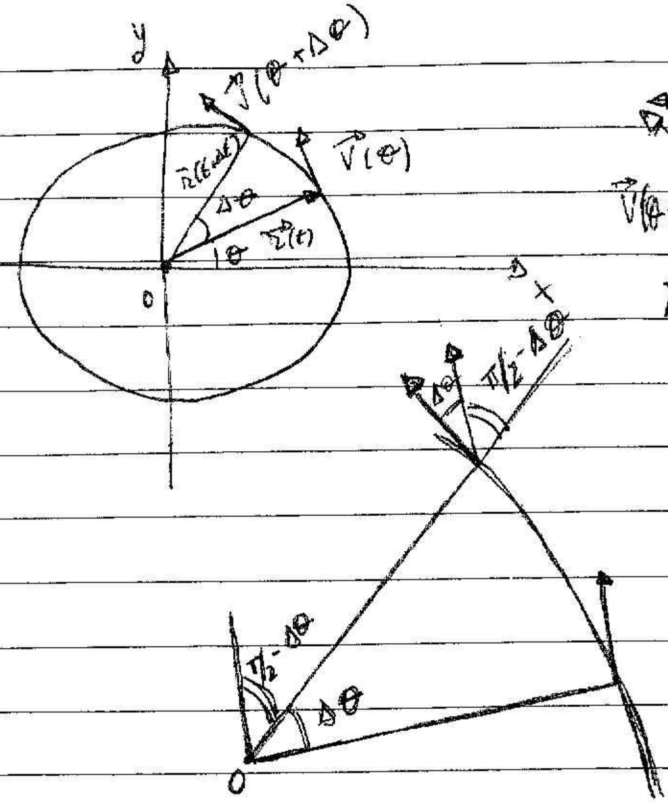
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(A\hat{a}) = \left(\frac{dA}{dt}\right)\hat{a} + A\frac{d\hat{a}}{dt}$$

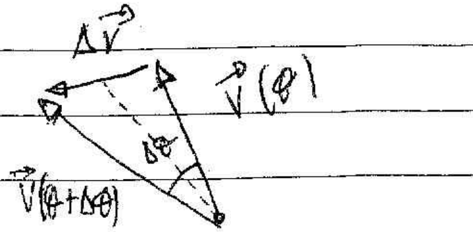
Per quanto concerne il primo termine, non ci sono difficoltà poiché siamo di fronte alla derivata di un termine scalare funzione del tempo. Nasce qualche problema per il secondo termine in cui abbiamo la derivata di un versore: quindi la derivata non va intesa applicata al modulo (che è costante) ma alla variazione della direzione.

Per poter ricavare l'espressione esplicita di tale derivata basta considerare uno dei moti più importanti in fisica: il <u>moto circolare uniforme</u>.

Consideriamo, quindi, una particella che ruota con velocità costante (in modulo) intorno ad un centro ad una distanza r.

Sia $\vec{r}$ il vettore posizione della particella rispetto al centro e $\vec{v}$ la sua velocità periferica.





TRIANGOLO DELLE VELOCITÀ

Consideriamo il triangolo delle velocità. Si nota innanzitutto che tale triangolo è isoscele, quindi $|\Delta\vec{v}|$ può essere espresso in termini della velocità costante in modulo:

$$\Delta v = 2v\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \Rightarrow a \simeq \frac{\Delta v}{\Delta t} = 2v\frac{1}{\Delta t}\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

effettuando il limite per $\Delta t \to 0$, possiamo approssimare $\sin\theta \approx \theta$:

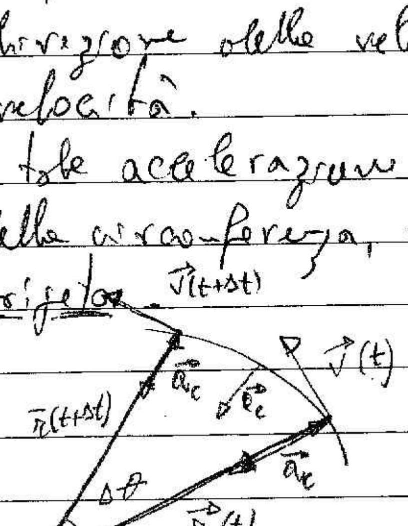
$$a \simeq 2v\frac{1}{\Delta t}\frac{\Delta\theta}{2} \simeq v\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow |\vec{a}| = v\frac{d\theta}{dt} =$$

$v\omega$;

Dove ω è definita velocità angolare. La velocità angolare è una grandezza vettoriale ($\vec{\omega}$) la cui direzione è perpendicolare al piano contenente il moto circolare uniforme ed il verso è tale da vedere il moto in senso antiorario. Quindi come nel nostro (moto antiorario) il vettore $\vec{\omega}$ è uscente dal foglio.

Il moto circolare uniforme presenta un'accelerazione costante diretta perpendicolarmente al vettore velocità, in modo che abbiamo una variazione della direzione della velocità ma non del modulo della velocità.

Per questo motivo tale accelerazione, che punta verso il centro della circonferenza, viene chiamata accelerazione centripeta.



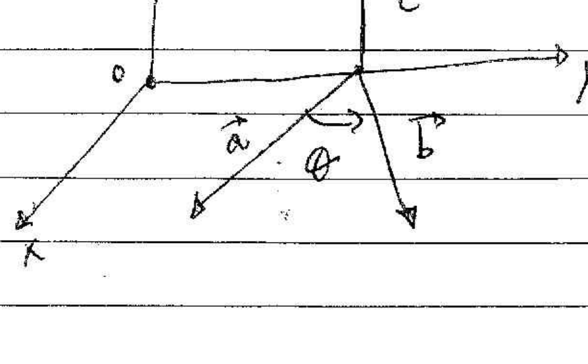
Abbiamo visto quanto vale il modulo dell'accelerazione centripeta ($|\vec{a}_c| = v\omega$), vogliamo, ora, ricavare la direzione ed il verso. Infatti, da consideraragioni geometriche, col introducendo il prodotto vettoriale, otteniamo:

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \wedge \vec{v}. \quad (*)$$

Tale espressione si legge "omega vettor v".

Il prodotto vettoriale è così definito:
dati due vettori $\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ e $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ tali che il vettore $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, abbiamo:

$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$, dove θ è l'angolo fra i due vettori.
Se $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{c} = 0$
Se $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |\vec{c}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
Per ciò che riguarda la direzione di $\vec{c}$, essa è perpendicolare al piano contenente $\bar{a}$ e $\bar{b}$, mentre il verso è tale da veder ruotare $\vec{a}$ verso $\vec{b}$ di un angolo minore di π.



con $\bar{a}$ e $\bar{b}$ contenuti nel piano xy.

Le componenti del vettore $\bar{c}$ sono ricavabili dalle componenti del vettore $\bar{b}$ e $\bar{c}$:

$$\vec{c} = \left(a_y b_z - a_z b_y ,\ a_z b_x - a_x b_z ,\ a_x b_y - a_y b_x \right)$$

Per ricordare più facilmente le componenti di $\vec{c}$ basta ricordarsi che quest'ultime sono legate ai minori della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

Lo stesso discorso può essere sviluppato anche per il doppio vettore (vettore di modulo costante ma rotante). Da cui otteniamo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (**)$$

Considerando la (*) e la (**), abbiamo:

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

N.B. Bisognerà prima calcolare $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$ poi effettuare il prodotto vettoriale a sinistra. Altrimenti

otteniamo $\bar{w} \wedge \bar{w} = 0$ (per la definizione di prodotto vettoriale).
Siccome $\bar{w}, \bar{v}, \bar{r}$ e $\bar{a}_c$ sono tutti ortogonali fra loro (escluso $\bar{r}$ e $\bar{a}_c$ che sono antiparalleli), possiamo facilmente ricavare le relazioni per i moduli:

$$v = \omega r \; ; \quad a = \omega v = \omega^2 r \; ; \quad a_c = v^2/r$$

Siccome l'arco di circonferenza è legato all'angolo θ dalla seguente relazione:

$$s = r\theta$$

differenziando rispetto al tempo, abbiamo:

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r\omega$$

coerentemente con quanto ottenuto in precedenza.
Ricapitolando e tenendo conto che in generale l'angolo θ è una funzione del tempo:

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}(t) \Rightarrow \vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\theta}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}(t) = \frac{d^2\vec{\theta}(t)}{dt^2}$$

dove $\vec{\alpha}(t)$ è l'accelerazione angolare. In maniera analoga a quanto fatto per le traslazioni, otteniamo anche per le rotazioni le leggi della cinematica con particolare attenzione al moto circolare ed uniforme $\vec{\omega}$ = costante.

$$\Rightarrow \quad \vec{\theta}(t) = \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}\, t$$

ed al moto circolare uniformemente accelerato

$$\Rightarrow \quad \vec{\theta}(t) = \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}_0 t + \tfrac{1}{2} \vec{\alpha}\, t$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}\, t.$$

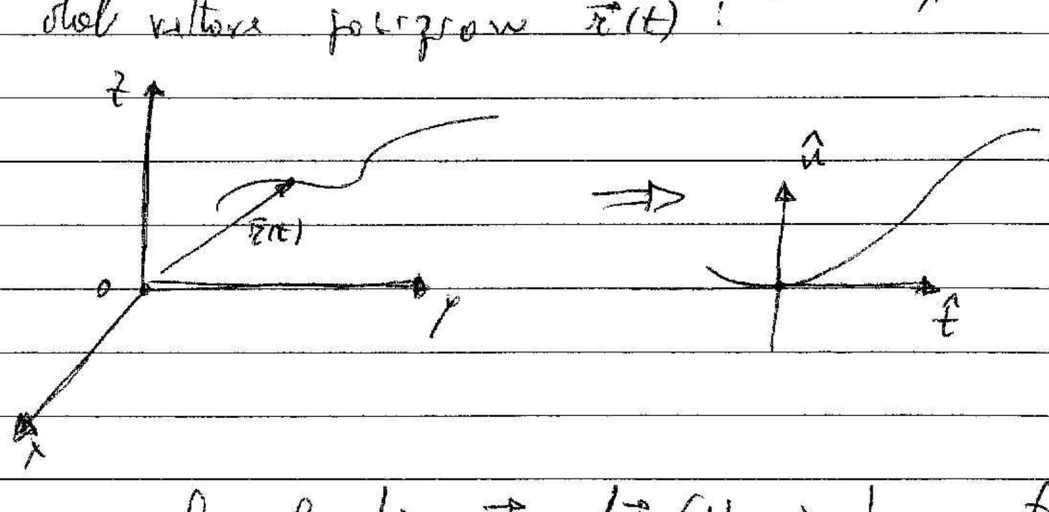
Avendo studiato il comportamento delle variazioni di posizione sia per traslazione che per rotazione possiamo quindi analizzare un qualunque moto, poiché sarà sempre possibile dividere tale moto in una pura traslazione, quindi moduli che variano ma direzioni costanti, ed in una pura rotazione dove saranno le direzioni a variare mentre i moduli saranno costanti.
Ogni qualvolta saremo di fronte ad una rotazione di vettore di modulo costante la sua derivata

sarà:

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}}$$ (FORMULA DI POISSON)

dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare legata alla rotazione.

Consideriamo una traiettoria qualunque, rappresentata dal vettore posizione $\vec{r}(t)$:



Siccome la velocità $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ è tangente alla traiettoria possiamo scrivere:

$$\vec{v}(t) = v(t)\,\hat{t}$$

Quindi, l'accelerazione $\vec{a}$ è data da:

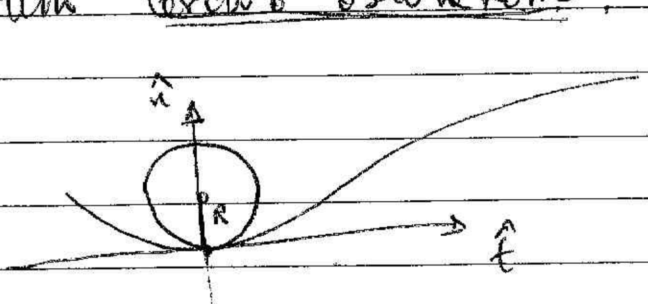
$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(v(t)\,\hat{t}\right) = \left(\frac{dv(t)}{dt}\right)\hat{t} + v(t)\frac{d\hat{t}}{dt}$$

$$= \vec{a}_t + \vec{a}_n ;$$

dove $\vec{a}_t$ è l'accelerazione tangenziale, mentre $\vec{a}_n$ è l'accelerazione centripeta diretta lungo la direzione $\hat{n}$ perpendicolare alla direzione $\hat{t}$. Introducendo la velocità angolare $\vec{w}$ con cui ruota il versore $\hat{t}$, abbiamo:

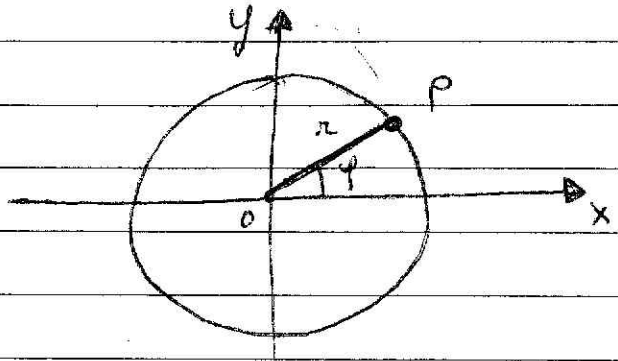
$$|\vec{a}_n| = v^2/R$$

dove R è il raggio della circonferenza su cui ruota per un intervallo infinitesimo il corpo.
Ciò implica per l'intervallo di tempo considerato possiamo approssimare la traiettoria del corpo con un arco di circonferenza.
R è detto <u>raggio di curvatura</u> ed assume valori compresi fra 0 ed ∞.
Il cerchio associato alla circonferenza di raggio R è detto <u>cerchio osculatore</u>:



Nel caso di moto rettilineo R vale infinito quindi la velocità angolare, associata alla variazione della direzione, è zero.

Come applicazione della cinematica consideriamo il moto armonico. Come esempio di tale moto consideriamo il moto di un punto su una circonferenza di raggio r. Ponendo il centro della circonferenza nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano, abbiamo:



Esprimiamo le coordinate cartesiane (x,y) in termini dell'angolo φ e del raggio r:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Sia ω la velocità angolare con cui ruota il punto, quindi l'angolo φ lo esprimiamo come:

$$\varphi = \omega t$$

Supponendo che all'istante $t=0$ il punto non occupi una posizione particolare, aggiungiamo all'angolo φ una cosiddetta fase iniziale φ_0; quindi:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

da cui abbiamo:

$$\begin{cases} x = r\cos(\omega t + \varphi_0) \\ y = r\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

Si dimostra facilmente come il raggio vettore $\vec{r} = (r\cos(\omega t+\varphi_0), r\sin(\omega t+\varphi_0))$ dipendente dal tempo, presenta tuttavia un modulo costante.

$$|\vec{r}| = \sqrt{r^2\cos^2(\omega t+\varphi_0) + r^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)} = r;$$

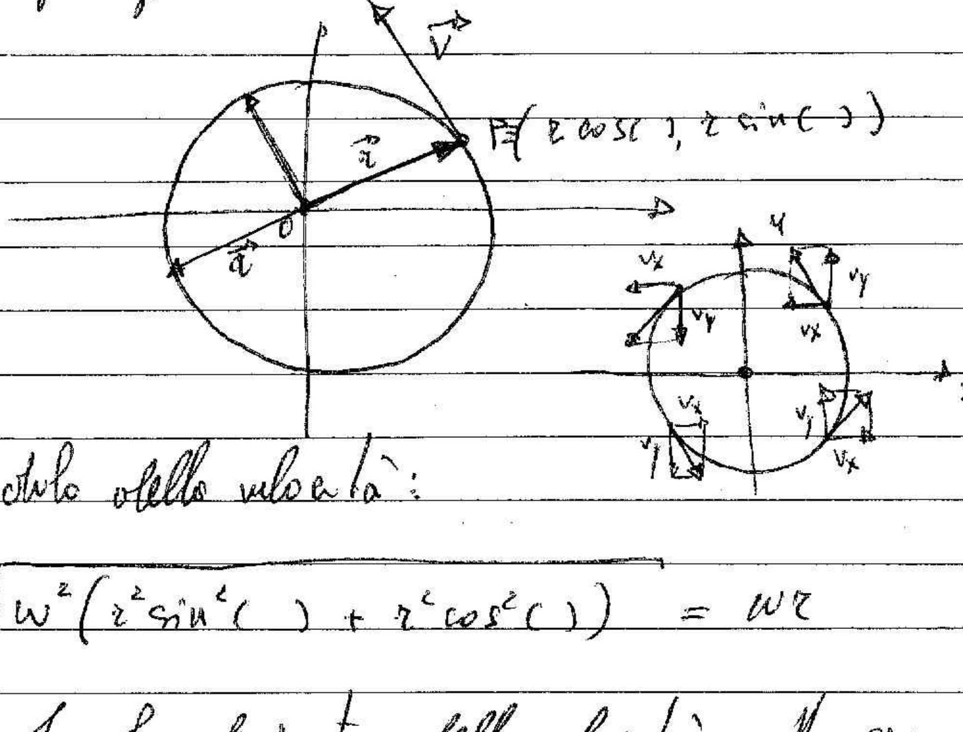
La velocità, dunque, è:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\cos(\omega t+\varphi_0), r\sin(\omega t+\varphi_0)\right) =$$

$$= \left(-r\omega\sin(\omega t+\varphi_0), r\omega\cos(\omega t+\varphi_0)\right) =$$

$$= \omega\left(-r\sin(\omega t+\varphi_0), r\cos(\omega t+\varphi_0)\right)$$

Notiamo immediatamente come il vettore $\vec{v}$ risulta sfasato di $\pi/2$ rispetto al vettore posizione $\vec{r}$. Questo detto è coerente con la legge di Poisson sulle derivate di vettori di modulo costante. Infatti, nel caso di Poisson si sviluppava un prodotto vettoriale con il conseguente vettore perpendicolare ai due originali. In questo caso la velocità $\vec{v}$ è ortogonale al vettore posizione $\vec{r}$.



Il modulo della velocità:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\omega^2 (r^2 \sin^2( ) + r^2 \cos^2( ))} = \omega r$$

Eseguendo la derivata della velocità otteniamo la relazione per l'accelerazione centripeta:

$$|\vec{a}| = \omega^2 r = v^2/r$$

Per quanto riguarda la direzione dell'accelerazione otteniamo:

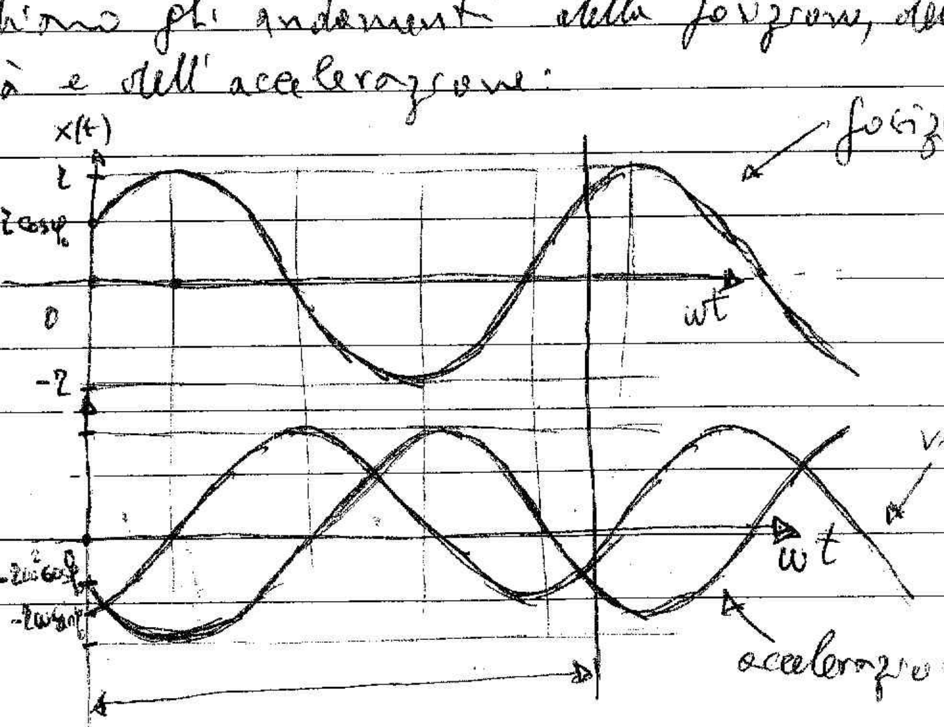
$$\vec{a} = \omega^2 \left(-r\cos(\omega t+\varphi_0), -r\sin(\omega t+\varphi_0)\right) = -\omega^2 \vec{r}$$

Soffermiamo l'attenzione su una componente del moto:

$$x(t) = r\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Questa legge oraria rappresenta il moto della proiezione del punto P sull'asse x. Il moto è compreso fra due margini ($-r$ ed r).

Graficheremo gli andamenti della posizione, della velocità e dell'accelerazione:



Notiamo, quindi, che la posizione e l'accelerazione sono in opposizione di fase, cioè quando è crescente la posizione decresce l'accelerazione e viceversa; al contrario la posizione e la velocità sono sfasate di $\pi/2$.
Essendo funzioni periodiche è possibile legare il periodo T (cioè l'intervallo di tempo necessario affinchè il moto del punto P si ripeta) con la velocità angolare ω.
Infatti, la posizione (il discorso è analogo anche per la velocità e l'accelerazione) per poter assumere gli stessi valori c'è bisogno che l'argomento della funzione trigonometrica differisca di 2π tra l'istante t e l'istante $t+T$:

$$[\omega(t+T)+\varphi_0]-(\omega t+\varphi_0)=2\pi$$

$$\Rightarrow \cancel{\omega t}+\omega T+\cancel{\varphi_0}-\cancel{\omega t}-\cancel{\varphi_0}=2\pi$$

$$\Rightarrow \omega T=2\pi \Rightarrow T=2\pi/\omega$$

La velocità angolare ω viene definita nel caso dei moti periodici, come per esempio il pendolo, pulsazione.

Per descrivere il moto circolare uniforme abbiamo parametrizzato le componenti (x, y) con il tempo t utilizzando la funzione coseno per la x ed il seno per la y, ma siccome il seno ed il coseno differiscano per una fase dell'angolo (in questo caso è $\pi/2$), possiamo introdurre la stessa funzione trigonometrica per le due componenti ma inserendo fasi diverse:

$$\begin{cases} x(t) = r\cos(\omega t + \varphi_x) \\ y(t) = r\cos(\omega t + \varphi_y) \end{cases}$$

Nel caso in cui $\varphi_x - \varphi_y = \pi/2$, sono le equazioni viste in precedenza.
A questo punto possiamo generalizzare inserendo delle ampiezze diverse:

$$\begin{cases} x(t) = A_x\cos(\omega t + \varphi_x) \\ y(t) = A_y\cos(\omega t + \varphi_y) \end{cases}$$

Quanto scritto è la massima generalizzazione per un moto periodico. Bisogna, a questo punto, al fine di ricavare la traiettoria del punto, valutare alcuni casi particolari.
Considerando le formule di addizione trigonome-

trica, abbiamo:

$$(*) \begin{cases} x = A_x \cos\varphi_x \cos\omega t - A_x \sin\varphi_x \sin\omega t \\ y = A_y \cos\varphi_y \cos\omega t - A_y \sin\varphi_y \sin\omega t \end{cases}$$

Affinchè sia possibile ricavare la traiettoria $y=y(x)$, bisogna studiare il delta del sistema:

$$\Delta = A_x A_y (\sin\varphi_x \cos\varphi_y - \cos\varphi_x \sin\varphi_y) = -A_x A_y \sin(\varphi_y - \varphi_x) =$$

$$= -A_x A_y \sin(\Delta\varphi) \neq 0 \Rightarrow \sin(\Delta\varphi) \neq 0$$

Bisogna quindi valutare il caso $\Delta\varphi = 0$ e $\Delta\varphi \neq 0$.

1) $\Delta = 0 \Rightarrow \sin(\Delta\varphi) = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = n\pi$ con $n = 0, 1, 2, \dots$

Nel caso in cui n è pari, quindi $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$, i moti armonici risultano essere inalterati, mentre se n è dispari, quindi $\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$, i moti risultano essere in opposizione di fase.

Da ciò otteniamo che:

$$y(t) = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) = \pm A_y \cos(\omega t + \varphi_x)$$

dove il segno + vale per $\Delta\varphi = 2\pi, 4\pi, \dots$ ed il segno

- per $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

Effettuando il rapporto fra $x(t)$ e $y(t)$, abbiamo:

$$x/y = \pm A_x/A_y$$

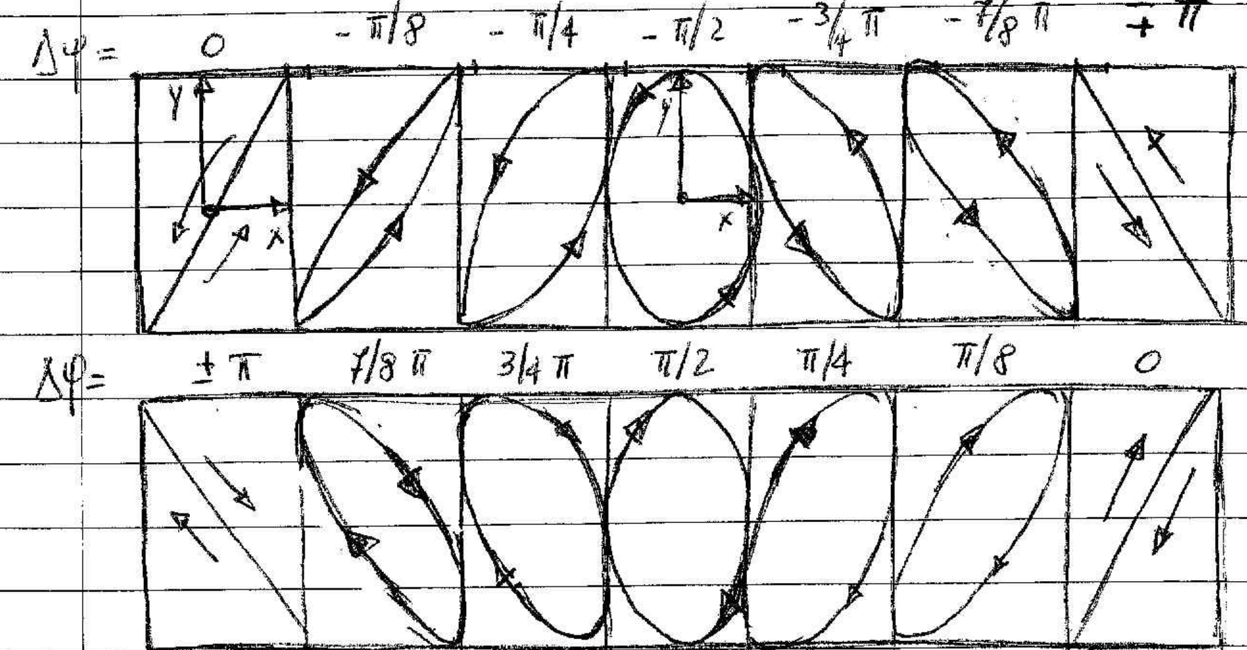
La traiettoria è una retta.
Nel caso in cui $\Delta \neq 0$, il sistema (*) è risolvibile ed otteniamo, quadrando e sommando le due relazioni:

$$A_y^2 x^2 + A_x^2 y^2 - 2A_x A_y xy \cos(\varphi_y - \varphi_x) = A_x^2 A_y^2 \sin^2(\varphi_y - \varphi_x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y}\cos(\Delta\varphi) = \sin^2(\Delta\varphi)}$$

L'espressione ottenuta è una conica con centro nell'origine. Si dimostra essere un'ellisse, osservando che le coordinate (x,y) dei suoi punti non possono mai superare rispettivamente le ampiezze A_x ed A_y dei moti componenti.
Abbiamo raffigurato nella pagina successiva varie traiettorie del moto per vari valori di $\Delta\varphi$ compreso tra 0 e 2π. Si osservi come la curva resta sempre nel rettangolo limitato dalle rette: $x = \pm A_x$

e $y = \pm \Delta y$. Il verso di percorrenza è anche esso determinato da $\Delta\varphi$.



È interessante il caso in cui la differenza di fase (a meno di multipli di 2π) è pari a $\Delta\varphi = \pm\pi/2$. I moti componenti si dicono allora in quadratura e la traiettoria è un'ellisse i cui assi principali sono gli assi x e y ed i cui semiassi sono quindi A_x e A_y; il senso di percorrenza è orario per $\Delta\varphi = \pi/2$, antiorario nel caso contrario.

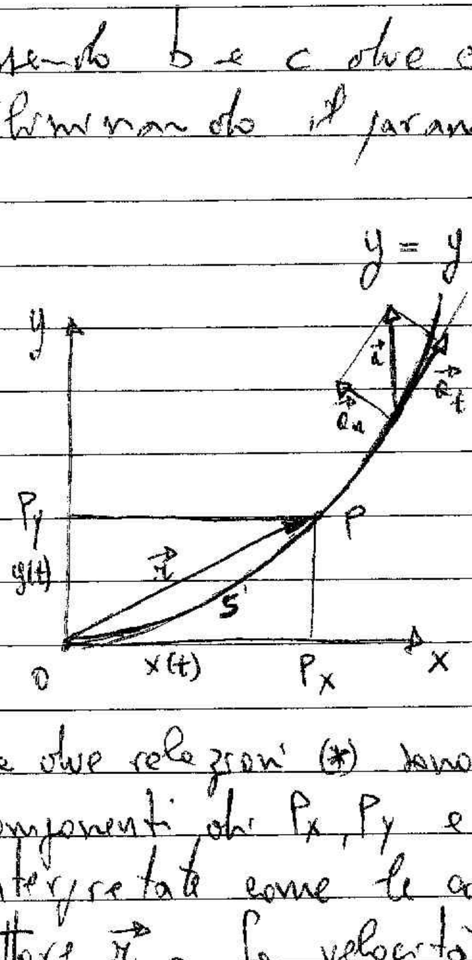
Nel caso in cui i moti componenti oltre ad essere in quadratura hanno anche ampiezze uguali ($A_x = A_y$) la traiettoria diviene circolare ed il suo moto risultante è un moto circolare uniforme.

Per concludere la trattazione della cinematica consideriamo il seguente moto piano definito dalle equazioni:

$$(*) \begin{cases} x(t) = bt \\ y(t) = ct^2 \end{cases}$$

essendo b e c due costanti positive.
Eliminando il parametro tempo, otteniamo:

$$y = y(x) = \frac{c}{b^2} x^2 \quad \text{(parabola)}$$



Le due relazioni (*) sono le equazioni orarie dei moti componenti di P_x, P_y e come si è detto possono essere interpretate come le componenti secondo x e y del vettore $\vec{r}$. La velocità $\vec{v}$ può essere calcolata mediante le velocità scalari di P_x e P_y:

$$\frac{dx}{dt} = b \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2ct;$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(t) = (b,\ 2tc)$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{b^2+4c^2t^2}$$

Per calcolare la velocità scalare possiamo anche considerare la cosiddetta <u>ascissa curvilinea</u> s così definita:

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dt^2\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}\right)} = \sqrt{b^2+4c^2t^2}\,d$$

$$\Rightarrow v_s = \frac{ds}{dt} = \sqrt{b^2+4c^2t^2}$$

Calcoliamo le accelerazioni:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2c \;;$$

La componente tangenziale di $\vec{a}$ <u>risulta essere</u>

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{2}\,\frac{8c^2t}{\sqrt{4c^2t^2+b^2}}$$

mentre la componente normale a_n è:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4c^2t^2+b^2}{R} \quad \text{con } R \text{ raggio di curvatura}$$

Il raggio di curvatura R è dato da:

$$R = \frac{(4c^2t^2+b^2)^{3/2}}{2cb}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2cb}{\sqrt{4c^2t^2+b^2}};$$

Per concludere calcoliamo il modulo dell'accelerazione:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2+a_t^2} = \sqrt{\frac{4c^2b^2+16c^4t^2}{4c^2t^2+b^2}} = \sqrt{4c^2} = 2c$$