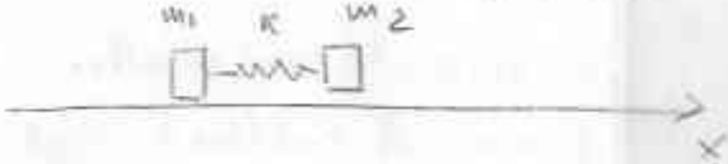
PROBLEMI SISTEMI PUNTI MATERIALI
E CORPI RIGIDI

1



$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_0 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2) v_0^2 + E\ell/2 \end{cases}$$

dove $E\ell = k\ell^2$ $\quad$ ℓ = contrazione della molla

$$v_1 = \frac{m_1+m_2}{m_1} v_0 - \frac{m_2}{m_1} v_2$$

$$m_1 \left[\frac{m_1+m_2}{m_1} v_0 - \frac{m_2}{m_1} v_2 \right]^2 + m_2 v_2^2 = (m_1+m_2) v_0^2 + E\ell$$

$$\frac{(m_1+m_2)^2}{m_1} v_0^2 - \frac{2 m_2}{m_1}(m_1+m_2) v_0 v_2 + \frac{m_2^2}{m_1} v_2^2 + m_2 v_2^2 = $$
$$= (m_1+m_2) v_0^2 + E\ell$$

$$\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) v_2^2 - \left[\frac{2 m_2}{m_1}(m_1+m_2)\right] v_0 v_2 + (m_1+m_2) v_0^2 \left[\frac{m_1+m_2}{m_1} - 1\right] - E\ell = 0$$

$$\frac{m_2^2 + m_1 m_2}{m_1} v_2^2 - 2\,\frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1} v_0 v_2 + (m_1+m_2) v_0^2 \frac{m_2}{m_1} - E\ell = 0$$

$$v_2^2 - 2 v_0 v_2 + v_0^2 - \frac{m_1 E\ell}{m_2(m_1+m_2)} = 0$$

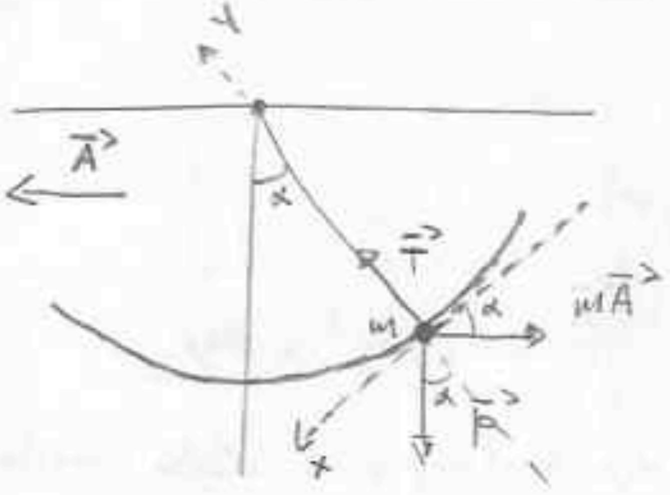
$$(v_2 - v_0)^2 - \frac{m_1}{m_2} \frac{E\ell}{m_1+m_2} = 0 \Rightarrow \boxed{v_2 = v_0 \pm \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{E\ell}{m_1+m_2}}}$$

$$v_1 = \frac{m_1+m_2}{m_1} v_0 - \frac{m_2}{m_1}\left(v_0 \pm \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{E\ell}{m_1+m_2}} \right) =$$

$$= \frac{m_1+m_2}{m_1} v_0 - \frac{m_2}{m_1} v_0 \mp \frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{E\ell}{m_1+m_2}} =$$

$$\boxed{v_1 = v_0 \mp \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{E\ell}{m_1+m_2}}} \; ; \quad v_1 - v_2 = \mp \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{E\ell}{m_1+m_2}} \mp \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{E\ell}{m_1+m_2}}$$

$$= \mp \sqrt{\frac{E\ell}{m_1+m_2}} \left(\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right);$$



è presente un'accelerazione $\vec{A}$ costante. Vogliamo studiare il problema in un sistema di riferimento non inerziale.

$$\vec{T} + \vec{P} + m\vec{A} = m\vec{a}$$

N.B. $\vec{a}$: accelerazione nel sistema non inerziale.

$$\begin{cases} m\,l\,\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\sin\alpha + mA\cos\alpha \\ T - mg\cos\alpha - mA\sin\alpha - m\,v^2/l = 0 \end{cases}$$

$$T = m\left(g\cos\alpha + A\sin\alpha + \frac{v(t)^2}{l}\right)$$

$v(t)$: velocità ad un dato istante di tempo. La tensione è funzione della velocità della particella.

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + g/l\,\sin\alpha = A/l\,\cos\alpha$$

se $\alpha = \kappa$ (costante) $\qquad g/l\,\sin\kappa = A/l\,\cos\kappa$

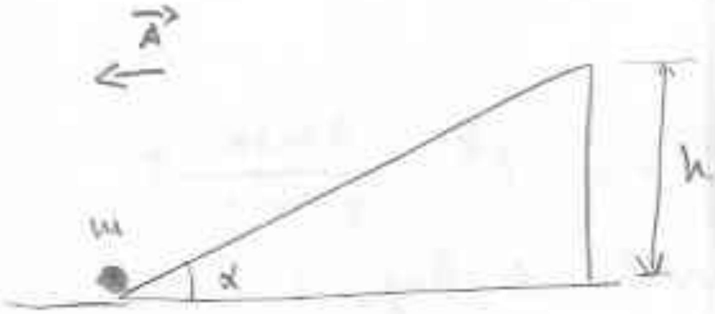
$\Rightarrow \operatorname{tg}\kappa = A/g \Rightarrow \kappa = \operatorname{arctg}(A/g)$.

se $\alpha = \alpha(t) \ll 1 \qquad \sin\alpha \simeq \alpha$ e $\cos\alpha \simeq 1$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + g/l\,\alpha = A/l \qquad \text{se } \alpha = \theta + A/g$$

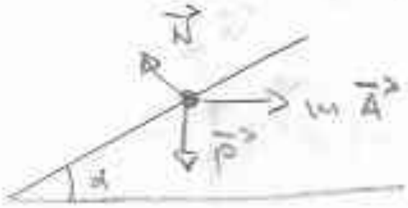
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + g/l\,\theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha(t) = \theta_0\sin(\omega t + \varphi) + A/g}$$



per un intervallo di tempo τ il carrello accelera con accelerazione costante pari a $\vec{A}$ e per $t > \tau$ si muove a velocità costante.

Per $t < \tau$ la configurazione è la seguente:



$$\begin{cases} N - mg\cos\alpha = 0 \\ mA\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma \end{cases}$$

$\Rightarrow a = A\cos\alpha - g\sin\alpha$;

$v(t) = (A\cos\alpha - g\sin\alpha)\,t$ e $x(t) = \frac{1}{2}(A\cos\alpha - g\sin\alpha)\,t^2$; $\odot$

$v(\tau) = (A\cos\alpha - g\sin\alpha)\,\tau$;

per $t > \tau$ $a = -g\sin\alpha$ (il corpo tende a scendere)

$$v(t>\tau) = (A\cos\alpha - g\sin\alpha)\,\tau - g\sin\alpha\,(t-\tau) =$$
$$= A\cos\alpha\,\tau - g\sin\alpha\,t;$$

$$x(t>\tau) = (A\cos\alpha - g\sin\alpha)\,\tau\,(t-\tau) - \frac{1}{2}g\sin\alpha\,(t-\tau)^2 + \frac{1}{2}(A\cos\alpha - g\sin\alpha)\,\tau^2 =$$
$$= \ldots = A\cos\alpha\,\tau\,t - \frac{1}{2}A\cos\alpha\,\tau^2 - \frac{1}{2}g\sin\alpha\,t^2;$$

$x(t=\tau) = \ldots$ otteniamo la $\odot$

Il corpo invertirà il suo moto (dopo che il carrello non accelera più) in un tempo t^*. Tale tempo soddisfa:

$$V(t=t^*,\tau)=0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = A\cos\alpha\,\tau - g\sin\alpha\,t^* \Rightarrow t^* = \frac{A\cos\alpha}{g\sin\alpha}\tau$$

Lo spazio percorso in tale intervallo di tempo è:

$$x(t=t^*) = A\cos\alpha\,\tau\,\frac{A\cos\alpha}{g\sin\alpha}\tau - \frac{1}{2}A\cos\alpha\,\tau^2 +$$

$$-\frac{1}{2}g\sin\alpha\,\frac{A^2\cos^2\alpha}{g^2\sin^2\alpha}\tau^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{A^2\cos^2\alpha}{g\sin\alpha}\tau^2 - \frac{1}{2}A\cos\alpha\,\tau^2$$

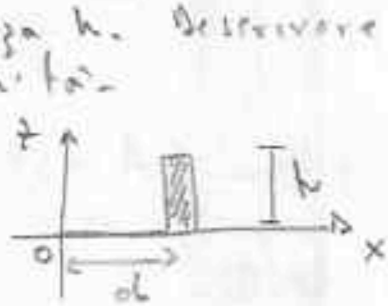
$$= \frac{1}{2}A\cos\alpha\,\tau^2\left(\frac{A}{g}\,\mathrm{cotg}\,\alpha - 1\right);$$

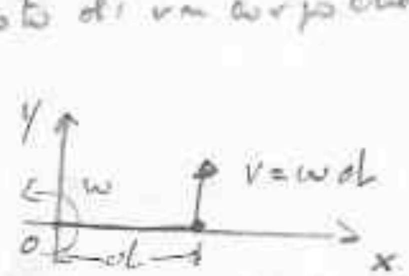
Se il corpo raggiungerà la sommità del piano inclinato dovrà accadere:

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}A\cos\alpha\,\tau^2\left(\frac{A}{g}\,\mathrm{cotg}\,\alpha - 1\right)$$

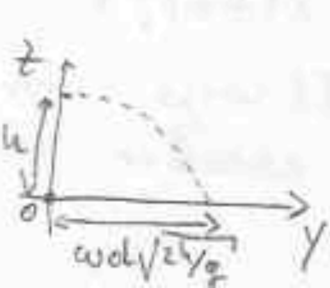
Abbiamo legato la geometria del sistema (h,α) con la dinamica (A,τ).

Data una piattaforma girevole con velocità angolare ω. Ad una distanza d dal centro di rotazione vi è una colonna di altezza h. Descrivere il moto di un corpo che cade dalla sommità.

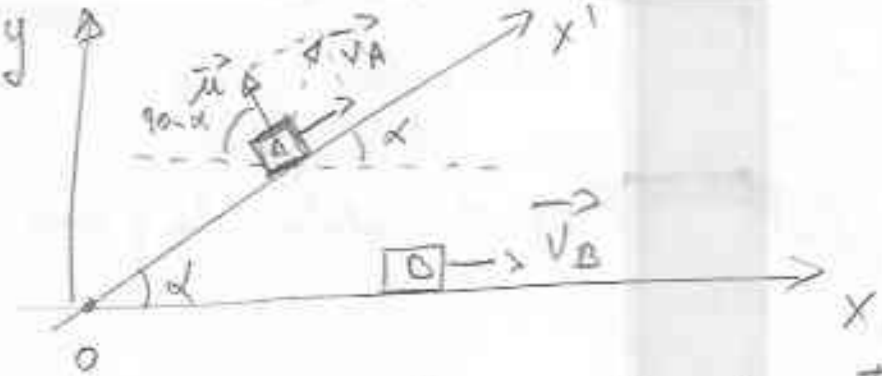




Le leggi orarie sono
$$\begin{cases} x(t) = d \\ y(t) = (\omega d)\,t \\ z(t) = h - \frac{1}{2}g t^2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \boxed{y_{cad} = d + \omega d\sqrt{2h/g}}$$



Quanto vale $\vec{u}$ rispetto al sistema di riferimento solidale con B?

In generale $\vec{v}_B = \vec{v}_A - \vec{V}_{AB}$

$$\begin{cases} u_y = v_A \sin\alpha + u \cos\alpha \\ u_x = v_A \cos\alpha - u \sin\alpha \end{cases}$$

Quindi rispetto al corpo B otteniamo $\vec{v}_B \equiv (v_B, 0)$

$$\begin{cases} u_x^B = v_A \cos\alpha - u \sin\alpha - v_B \\ u_y^B = v_A \sin\alpha + u \cos\alpha \end{cases}$$

Il modulo di $\vec{u}$ rispetto a B è

$$|u^B|^2 = (v_A \cos\alpha - u \sin\alpha - v_B)^2 + (v_A \sin\alpha + u\cos\alpha)^2$$

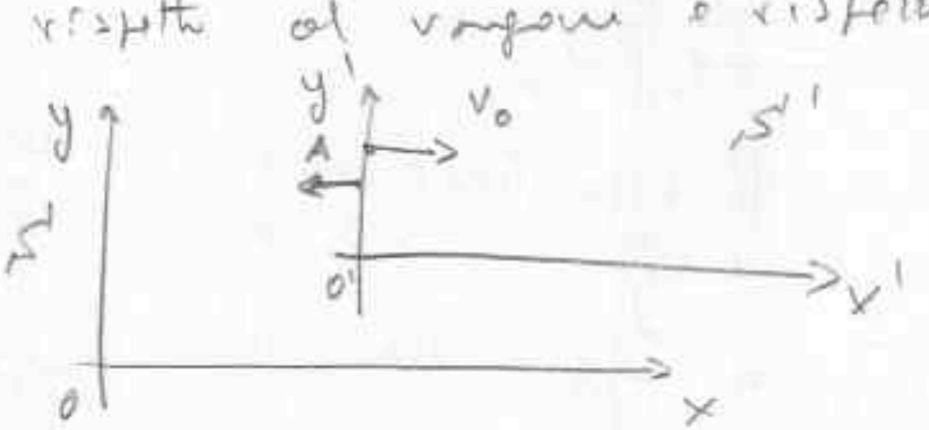
$$= \underline{v_A^2\cos^2\alpha} + u^2\sin^2\alpha + v_B^2 - \cancel{2v_A u \cos\alpha \sin\alpha} - 2v_A v_B \cos\alpha +$$

$$+ 2u v_B \sin\alpha + \underline{v_A^2 \sin^2\alpha} + u^2\cos^2\alpha + \cancel{2u v_A \sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= v_A^2 + v_B^2 + u^2 + 2v_B(u\sin\alpha - v_A\cos\alpha)$$

$$|u^B| = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 + u^2 + 2v_B(u\sin\alpha - v_A\cos\alpha)}$$

Un vagone che si muove di velocità v_0 decelera con $\vec{A}$. Studiare il moto rispetto al vagone e rispetto alla stazione.



Il moto di un oggetto è tale che $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}'$

$\Rightarrow \boxed{\bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_0}$ dato che il moto è traslatorio

otteniamo $\boxed{\bar{a}' = \bar{a} - \vec{A}}$

Per S : $\vec{a} = (0, -g)$ quindi

$$\begin{cases} y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \\ x(t) = v_0 t \end{cases} \Rightarrow \text{parabola}$$

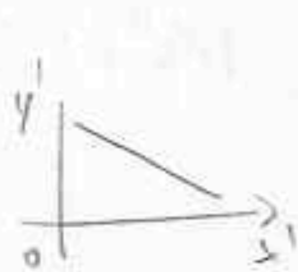
$$y(x) = h - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}$$

Per S' : $\vec{a}' = \vec{g} - \vec{A}$ $\quad \begin{cases} a'_x = (A, 0) \\ a'_y = (0, -g) \end{cases}$

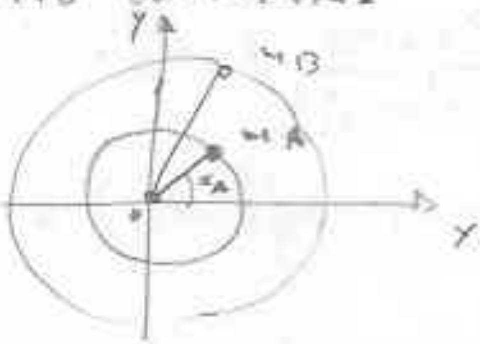
$$\begin{cases} \ddot{x}' = A \\ \ddot{y}' = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \frac{1}{2} A t^2 \\ y' = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y' = h - \frac{1}{2} g \frac{2x'}{A} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \quad y' = h - g/A \, x$$



Due corpi di masse m_A e m_B ruotano con velocità angolari ω_A e ω_B su circonferenze di raggio R_A e R_B. Descrivere la traiettoria del centro di massa.



$$\begin{cases} x_c = \dfrac{m_A x_A(t) + m_B x_B(t)}{m_A + m_B} \\[2ex] y_c = \dfrac{m_A y_A(t) + m_B y_B(t)}{m_A + m_B} \end{cases}$$

$$x_A(t) = R_A \cos(\omega_A t + \alpha_A) \qquad \begin{cases} x_B(t) = R_B \cos(\omega_B t + \alpha_B) \\ y_B(t) = R_B \sin(\omega_B t + \alpha_B) \end{cases}$$
$$y_A(t) = R_A \sin(\omega_A t + \alpha_A)$$

$$\begin{cases} x_c(t) = \dfrac{m_A}{m_A + m_B} R_A \cos(\omega_A t + \alpha_A) + \dfrac{m_B}{m_A + m_B} R_B \cos(\omega_B t + \alpha_B) \\[2ex] y_c(t) = \dfrac{m_A}{m_A + m_B} R_A \sin(\omega_A t + \alpha_A) + \dfrac{m_B}{m_A + m_B} R_B \sin(\omega_B t + \alpha_B) \end{cases}$$

$$x_c^2 + y_c^2 = \left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right)^2 R_A^2 \cos^2(\omega_A t + \alpha_A) + \left(\frac{m_B}{m_A + m_B}\right)^2 R_B^2 \cos^2(\omega_B t + \alpha_B)$$
$$+ 2 \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)^2} R_A R_B \cos(\omega_A t + \alpha_A) \cos(\omega_B t + \alpha_B) +$$
$$+ \left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right)^2 R_A^2 \sin^2(\omega_A t + \alpha_A) + \left(\frac{m_B}{m_A + m_B}\right)^2 R_B^2 \sin^2(\omega_B t + \alpha_B) +$$
$$+ 2 \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)^2} R_A R_B \sin(\omega_A t + \alpha_A) \sin(\omega_B t + \alpha_B) =$$
$$= \left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right)^2 R_A^2 \left[\cos^2(\omega_A t + \alpha_A) + \sin^2(\omega_A t + \alpha_A)\right] +$$
$$+ \left(\frac{m_B}{m_A + m_B}\right)^2 R_B^2 \left[\cos^2(\omega_B t + \alpha_B) + \sin^2(\omega_B t + \alpha_B)\right] +$$

$$+\frac{2m_Am_B}{(m_A+m_B)^2}R_AR_B\Big[\cos(\omega_At+\alpha_A)\cos(\omega_Bt+\alpha_B)+$$
$$+\sin(\omega_At+\alpha_A)\sin(\omega_Bt+\alpha_B)\Big]=$$

$$=\left(\frac{m_A}{m_A+m_B}\right)^2R_A^2+\left(\frac{m_B}{m_A+m_B}\right)^2R_B^2+\frac{2m_Am_B}{(m_A+m_B)^2}R_AR_B\cdot$$
$$\cdot\cos\big(\omega_At+\alpha_A-\omega_Bt-\alpha_B\big)=$$

$$=\frac{m_A^2R_A^2+m_B^2R_B^2}{(m_A+m_B)^2}+\frac{2m_Am_B}{(m_A+m_B)^2}R_AR_B\cos\big((\omega_A-\omega_B)t+\alpha_A-\alpha_B\big)$$

se $\omega_1=\omega_2$ otteniamo $x_c^2(t)+y_c^2(t)=$ costante

perciò il centro di massa si muoverà su una circonferenza di raggio $\sqrt{\dfrac{m_A^2R_A^2+m_B^2R_B^2}{(m_A+m_B)^2}+\dfrac{2m_Am_BR_AR_B}{(m_A+m_B)^2}\cdot\cos(\alpha_A-\alpha_B)}$;

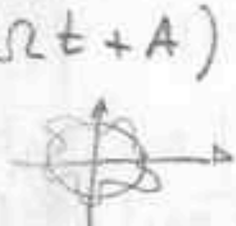
se anche le fasi sono uguali cioè partono in contemporanea i due corpi nella rotazione allora:

$$x_c^2(t)+y_c^2(t)=\left(\frac{m_AR_A+m_BR_B}{m_A+m_B}\right)^2\doteq D^2;$$

Cioè il raggio è esattamente pari al quadrato della distanza del centro di massa dall'origine.

Se, invece, $\omega_1\neq\omega_2$ allora la distanza del centro di massa dall'origine è modulata dal coseno. Se $\Omega=\omega_A-\omega_B$ $A=\alpha_A-\alpha_B$ abbiamo:

$$x_c^2(t)+y_c^2(t)=Z+W\cos(\Omega t+A)\quad;\quad Z \text{ e } W \text{ costanti.}$$



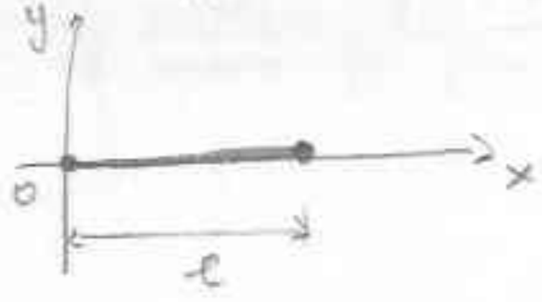
Calcolare il centro di massa di una sbarretta di lunghezza l e considerando che la densità di massa cresce linearmente con la distanza da un estremo all'altro.

In generale il centro di massa è definito come

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \qquad \text{(CASO DISCRETO)}$$

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M} \qquad \text{(CASO CONTINUO)}$$

nel nostro caso siamo in presenza di una densità continua (dato che la sbarretta è da considerarsi uniforme nella distribuzione della materia).



L'integrale diviene unidimensionale. Quindi

$$x_c = \frac{\int_0^l x\, dm}{M}$$

l'elemento infinitesimo di massa è esprimibile in forma della densità:

$$dm = \lambda(x)\, dx$$

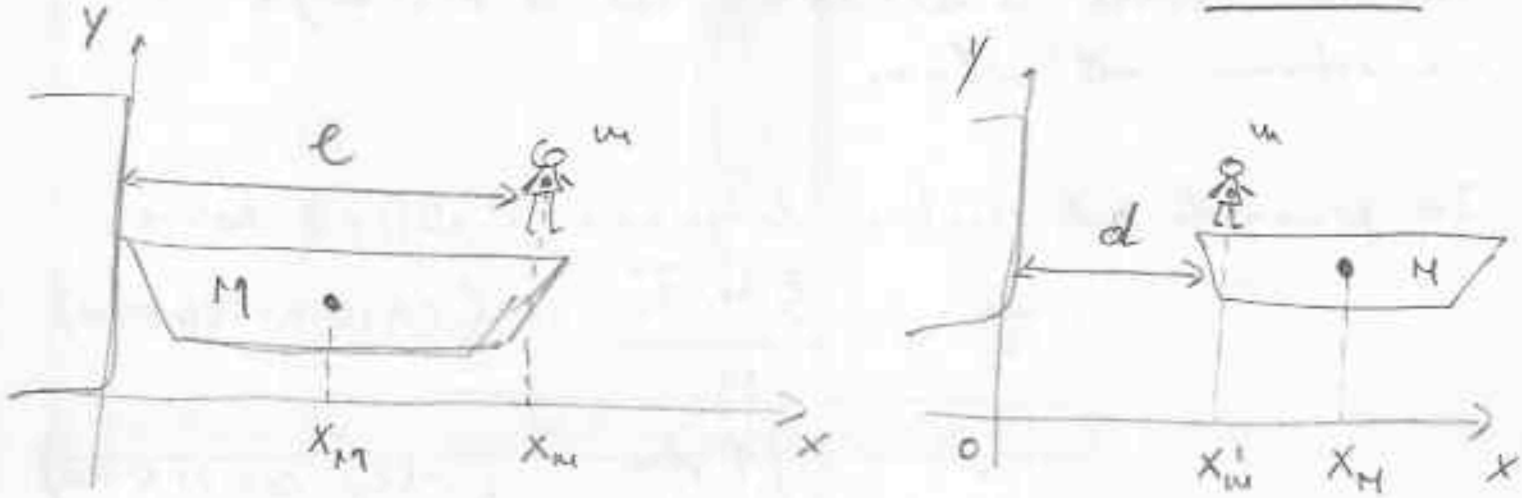
nel nostro caso $\lambda(x) = \lambda_0 x$ (cresce linearmente).

$$x_c = \frac{1}{M}\int_0^l x\,\lambda(x)\, dx = \frac{1}{M}\int_0^l x\,\lambda_0 x\, dx = \frac{\lambda_0}{M}\int_0^l x^2\, dx =$$

$$= \frac{\lambda_0}{M}\frac{l^3}{3}; \quad \lambda_0 \text{ è tale che } M = \int_0^l \lambda(x)\, dx \text{ (Massa Totale)}$$

$$M = \int_0^l \lambda_0 x\, dx = \frac{\lambda_0 l^2}{2} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{2M}{l^2}; \quad x_c = \frac{2M}{l^2}\cdot\frac{1}{M}\frac{l^3}{3} = \frac{2}{3}l.$$

Il centro di massa non corrisponde con il punto medio della sbarretta poiché la distribuzione della massa non è uniforme lungo la sbarretta.



Di quanto si è spostata la barca dal molo?

Centro di massa prima del movimento:

$$x_c = \frac{\ell/2\, M + m\ell}{M+m} = \frac{\ell M + 2m\ell}{2(M+m)} = \frac{M+2m}{M+m}\,\frac{\ell}{2};$$

Dopo lo spostamento:

$$x_c' = \frac{(d + \ell/2)M + md}{M+m}$$

Dato che il centro di massa deve restare fermo poiché il movimento della persona è dovuto a forze interne al sistema uomo + barca, otteniamo:

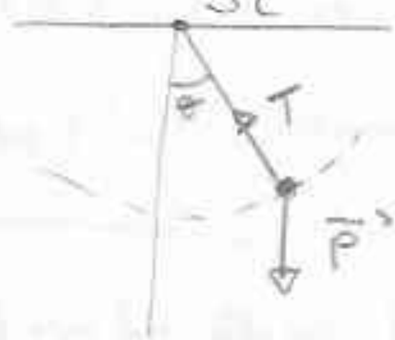
$$x_c = x_c' \Rightarrow \frac{M+2m}{M+m}\,\frac{\ell}{2} = \frac{(d+\ell/2)M + md}{M+m}$$

$$(M+2m)\,\frac{\ell}{2} = \frac{(2d+\ell)M + 2md}{2}$$

$$(M+2m)\,\ell = M\ell + 2(M+m)d \Rightarrow d = \frac{2m\,\ell}{2(M+m)}$$

$$\boxed{d = \frac{m}{M+m}\,\ell}$$

Pendolo con la seconda legge cardinale della dinamica.



$$\vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

$\vec{M}$ = momento della forza

$\vec{L}$ = momento quantità di moto.

$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$; $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

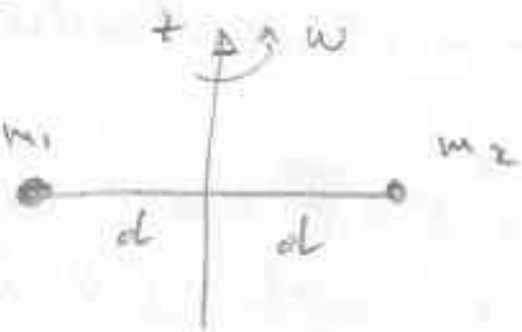
Scelto Ω come polo abbiamo:

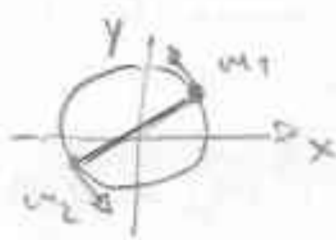
$\vec{M} = \vec{r} \wedge m\vec{g} \Rightarrow |\vec{M}| = -mlg\sin\theta$

$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \Rightarrow |\vec{L}| = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$

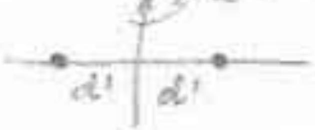
$\Rightarrow \vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{L} \Rightarrow ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mlg\sin\theta$

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g/l\,\sin\theta$ (EQUAZIONE PENDOLO)





$|\vec{L}| = m_1 d^2\omega^2 + m_2 d^2\omega^2 = (m_1+m_2)d^2\omega^2$



$|\vec{L}'| = (m_1+m_2)d'^2\omega^2$

ma essendo la contrazione dovuta a forze interne il momento angolare si deve conservare. Quindi:

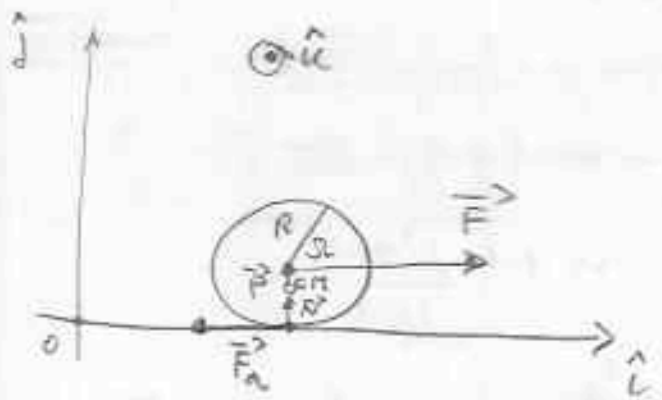
$$|\vec{L}'| = |\vec{L}| \implies (m_1+m_2)\, d^2 \omega = (m_1+m_2)\, d'^2 \omega'$$

$$\implies \boxed{\omega' = (d/d')^2 \omega}$$

Se $d/d' < 1$ si allunga la sbarra $\omega' < \omega$

Se $d/d' > 1$ si accorcia la sbarra $\omega' > \omega$

Moto di una sfera di raggio R e massa M soggetta ad una forza $\vec{F}$ costante.



$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_a + \vec{N} + \vec{P} = M \vec{a}_{CM} \\ \vec{M} = I \vec{\alpha} \end{cases}$$

I = momento di inerzia.

Lungo gli assi $\hat{i}$ e $\hat{j}$ le equazioni del moto traslazionale sono

$$\begin{cases} N - Mg = 0 \\ F - F_a = M a_{CM} \end{cases}$$

Per l'equazione dei momenti, scelto come polo Ω il centro di massa, otteniamo:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{f} = \begin{cases} \vec{M}_P = \vec{r} \wedge \vec{P} = \vec{0} \wedge \vec{P} = 0 \\ \vec{M}_N = \vec{r} \wedge \vec{N} = 0 \quad \text{poiché } \vec{r} \parallel -\vec{N} \\ \vec{M}_F = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0} \wedge \vec{F} = 0 \\ \vec{M}_{F_a} = \vec{r} \wedge \vec{F_a} = R F_a \hat{k} \end{cases}$$

Noto che

$$\vec{F} = (F, 0, 0)\,;\ \vec{N} = (0, N, 0)\,;\ \vec{P} = (0, -mg, 0)\,;$$

$$\vec{F_a} = (-F_a, 0, 0)\,;\ \vec{r} = (0, R, 0)$$

$\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare diretta lungo l'asse $\hat{z}$.

Quindi:

$$\vec{\alpha} = (0, 0, \alpha) = \left(0, 0, \frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

Lungo l'asse $\hat{z}$ proiettiamo l'equazione dei momenti:

$$R F_a = I \alpha$$

Ipotizzando la condizione di puro rotolamento (la sfera non slitta!!) abbiamo:

$$s = R\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{CM} = R\alpha}$$

Mettendo tutto insieme abbiamo:

$$\begin{cases} N - Mg = 0 \\ F - F_a = M a_{CM} \\ R F_a = I\alpha \\ a_{CM} = R\alpha \end{cases} \longrightarrow \alpha = \frac{R F_a}{I} \Rightarrow a_{CM} = \frac{R^2 F_a}{I}$$

$$F - F_a = M\frac{R^2 F_a}{I} \qquad F_a = \frac{F}{1 + MR^2/I}$$

Affinché vi sia puro rotolamento la forza di attrito $\vec{F_a}$ non deve in modulo superare il valore massimo della forza d'attrito per il caso statico:

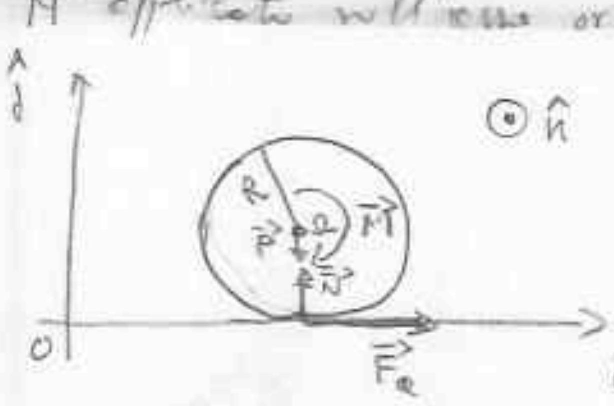
$$F_a \le \mu_s N = \mu_s M g \Rightarrow \frac{F}{1 + MR^2/I} \le \mu_s M g$$

da cui otteniamo la condizione sul modulo della forza esterna $\vec{F}$ affinché il corpo rotoli e non strisci.

$$\boxed{F \le \mu_s M g \left(1 + MR^2/I\right)}$$

La grandezza MR^2/I è adimensionale e rappresenta un coefficiente che tiene conto della distribuzione della materia nel corpo in considerazione (sfera, ruota, cilindro, ecc...). Per ognuno di questi corpi il momento d'inerzia assume un particolare valore.
Notiamo, infine, come la presenza della forza d'attrito sia necessaria per avere il moto di rotolamento altrimenti avremmo solo il moto traslatorio.

Moto di puro rotolamento causato da un momento esterno $\vec{M}$ applicato sull'asse ortogonale allo spostamento del corpo.



$$\vec{M} = (0, 0, M)$$
$$\vec{F_a} = (F_a, 0, 0)$$
$$\vec{N} = (0, N, 0)$$
$$\vec{P} = (0, Mg, 0)$$

Le equazioni cardinali della dinamica sono:

$$\begin{cases} \vec{N} + \vec{P} + \vec{F_a} = M\vec{a}_{CM} \\ \vec{M} + \vec{M}_{F_a} = I\vec{\alpha} \end{cases}$$

Il momento della forza d'attrito $\vec{M}_{F_a}$ è dato da:

$$\vec{M}_{F_a} = \vec{r} \wedge \vec{F_a} = -RF_a\hat{k}$$

mentre $\vec{M}_P = \vec{M}_N = 0$.

È da notare che la forza d'attrito ha come verso quello positivo dell'asse î perché in questo modello tende ad opporsi al movimento (in questo caso provocato da un momento esterno $\vec{M}$) applicando un momento resistivo che si oppone al $\vec{M}$.
Proiettando le equazioni:

$$\begin{cases} N - Mg = 0 \\ F_a = M a_{CM} \longrightarrow a_{CM} = F_a/M \Rightarrow \alpha = F_a/MR \\ \mathcal{M} - F_a R = I\alpha \\ a_{CM} = R\alpha \end{cases}$$

$$\mathcal{M} - F_a R = I F_a/MR \Rightarrow F_a = \frac{\mathcal{M}}{R + I/MR}$$

Anche in questo caso F_a deve essere al massimo pari al modulo della forza d'attrito nel caso statico:

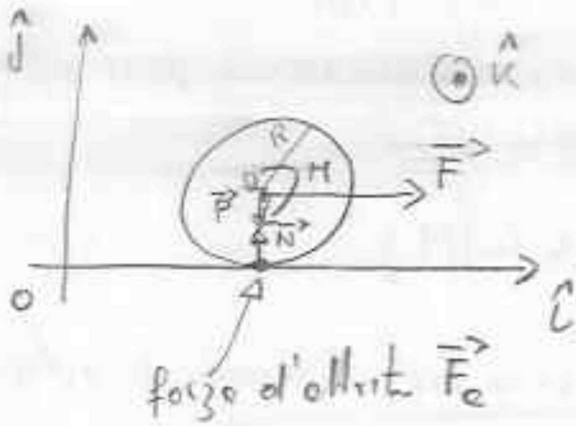
$$F_a \le \mu_s Mg \Rightarrow \frac{\mathcal{M}}{R + I/MR} \le \mu_s Mg$$

Quindi otteniamo un valore massimo per il momento esterno:

$$\boxed{\mathcal{M} \le \mu_s MgR\left(1 + I/MR^2\right)}$$

Se $\mathcal{M} > \mathcal{M}_{MAX}$ avremo il fenomeno dello slittamento.

Applichiamo contemporaneamente una forza esterna $\vec{F}$ ed un momento esterno $\vec{M}$. Ora il fenomeno del rotolamento risulta quale effetto di due agenti esterni. Innanzitutto, ora, non possiamo "a priori" stabilire il verso della forza d'attrito $\vec{F}_a$ in quanto tutto dipenderà da chi avrà maggiore effetto sul corpo se il momento esterno o la forza esterna. Procedendo le equazioni non possiamo esplicitare nessun segno algebrico per la forza d'attrito.



$$\vec{F}_a = (F_a, 0, 0)$$
$$\vec{M} = (0, 0, \mathcal{M})$$
$$\vec{N} = (0, N, 0)$$
$$\vec{P} = (0, Mg, 0)$$

$$\begin{cases} N - Mg = 0 \\ F + F_a = M a_{CM} \longrightarrow a_{CM} = \dfrac{F + F_a}{M} \Rightarrow \alpha = \dfrac{F + F_a}{RM} \\ \mathcal{M} - R F_a = I\alpha \\ a_{CM} = R\alpha \end{cases}$$

$$\mathcal{M} - RF_a = I\,\frac{F + F_a}{RM} \Rightarrow \boxed{F_a = \frac{\mathcal{M}/R - I/MR^2\, F}{1 + I/MR^2}}$$

Quindi:

$$F_a \gtreqless 0 \Rightarrow \mathcal{M}/R \gtreqless I/MR^2\, F \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} \gtreqless (I/MR) F}$$

L'accelerazione del centro di massa è:

$$a_{cm} = F/M + 1/M \, \frac{\mathcal{M}/R - I/MR^2 F}{1 + I/MR^2} =$$

$$= \frac{F + \mathcal{M}/R}{M(1 + I/MR^2)} ;$$

Quindi l'accelerazione del centro di massa è data dai due contributi dovuti alla forza esterna $\vec{F}$ e al momento esterno $\vec{M}$:

$$\boxed{a_{cm} = \frac{F + \mathcal{M}/R}{M(1 + I/MR^2)}}$$

Se $\mathcal{M} = 0$ $\Downarrow$ $a_{cm} = \dfrac{F}{M(1 + I/MR^2)}$

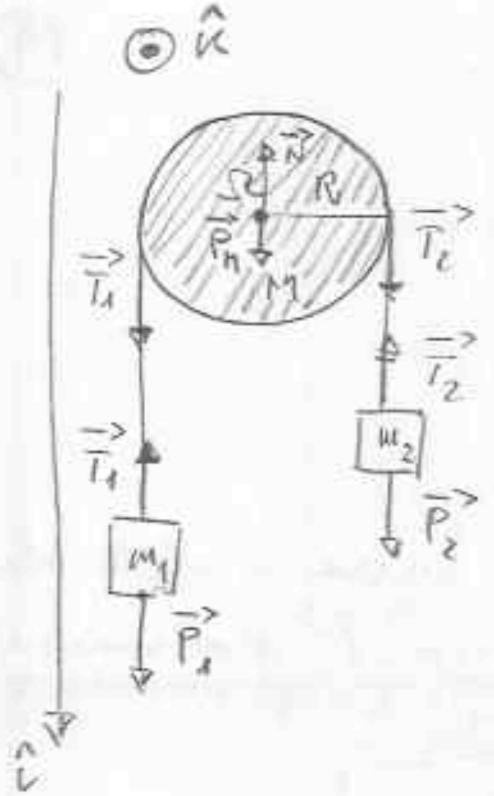
se $F = 0$ $\Downarrow$ $a_{cm} = \dfrac{\mathcal{M}}{MR(1 + I/MR^2)}$

valori dell'accelerazione del centro di massa dei due casi precedenti.

Anche in questo ultimo caso F_a deve soddisfare la condizione $F_a \leq \mu_s M g$. Quindi:

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{M}/R - I/MR^2 F}{1 + I/MR^2} \leq \mu_s M g$$

$$\boxed{\mathcal{M}/R - I/MR^2 F \leq \mu_s M g (1 + I/MR^2)}$$



Carrucola massiva (M: massa e R: raggio). Filo inestensibile e di massa trascurabile.

Si sceglie come polo Ω il centro di massa della carrucola. La carrucola è fissa.

Le equazioni cardinali sono:

$$\begin{cases} \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{N} + \vec{P}_M = M\vec{a}_M \\ \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2 \\ \vec{M}_{T_1} + \vec{M}_{T_2} + \vec{M}_{P_M} + \vec{M}_N = I\vec{\alpha} \end{cases}$$

Proiettando le equazioni sugli assi $\hat{i}$ e $\hat{k}$:

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \\ N - T_1 - T_2 - Mg = 0 \\ RT_1 - RT_2 = I\alpha \end{cases}$$

Affinché la corda non scivoli sulla carrucola otteniamo:

$$a_1 = -a_2 = a = \alpha R$$

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = -m_2 a \\ N - T_1 - T_2 - Mg = 0 \longrightarrow N = T_1 + T_2 + Mg \\ R(T_1 - T_2) = I\,a/R \end{cases}$$

Infine il vero "sistema" da risolvere:

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = - m_2 a \\ R(T_1 - T_2) = I/R \, a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 - m_1 g = - m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \\ T_1 - T_2 = I/R^2 \, a \end{cases}$$

$$- m_1 g + m_2 g = - m_1 a - m_2 a - I/R^2 \, a$$

$$(m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2 + I/R^2) a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2} g}$$

quindi se $m_1 > m_2 \Rightarrow a > 0$ m_1 scende e m_2 sale.
$m_1 < m_2 \Rightarrow a < 0$ m_2 " " m_1 " -

la tensione T_1 è data:

$$T_1 = m_1 g - m_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2} g$$

$$= \frac{\cancel{m_1^2} + m_1 m_2 + m_1 I/R^2 - \cancel{m_1^2} + m_1 m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2} g = \frac{2 m_1 m_2 + m_1 I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} g;$$

per T_2:

$$T_2 = m_2 g + m_2 a = m_2 g + m_2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2} g =$$

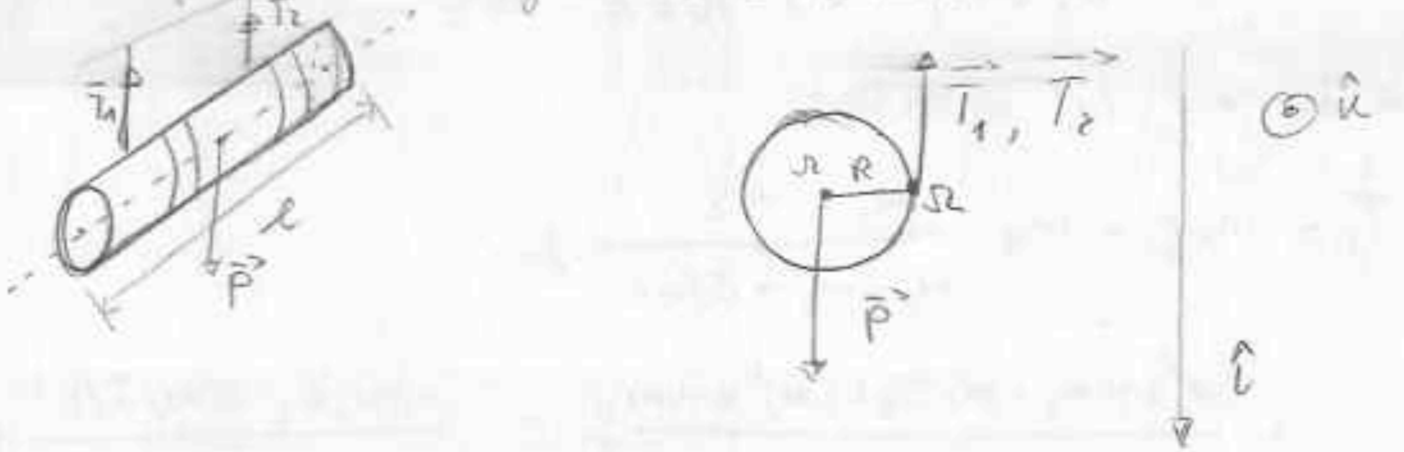
$$= \frac{m_2 m_1 + \cancel{m_2^2} + m_2 I/R^2 + m_2 m_1 - \cancel{m_2^2}}{m_1 + m_2 + I/R^2} g = \frac{2 m_1 m_2 + m_2 I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} g;$$

Quindi le tensioni T_1 e T_2 sono diverse poiché la loro differenza è causa dell'accelerazione angolare della carrucola

Infine se si vuole trascurare il moto della carrucola bisogna ipotizzare una massa dei corpi 1 e 2 nettamente maggiore di quella della carrucola. Stesso risultato si ottiene se si ipotizza una carrucola, anche se massiva, molto piccola rispetto alle dimensioni in cui evolve il sistema fisico. Entrambe queste ipotesi sono prese in considerazione richiedendo che il momento d'inerzia sia trascurabile ($I \to 0$).
Quindi otteniamo:

$$T_1 = T_2 = \frac{2\, m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g \quad e \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g \; ;$$

Un cilindro di lunghezza l e raggio R si srotola sotto l'azione della gravità. Descrivere il moto:



Scegliamo come polo il punto di contatto tra cilindro e corda. Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} Mg - T = M a_{CM} \\ MgR = I\alpha \end{cases} \qquad \text{dove} \quad I = I_{CM} + MR^2 \ (\text{TEOREMA DI })$$

Anche qui per ipotesi di puro rotolamento: $\alpha = a_{CM}/R$

$$MgR = I\,\frac{a_{CM}}{R} \implies a_{CM} = \frac{MgR^2}{I} = \frac{MR^2}{I_{CM} + MR^2}\, g$$

$$\boxed{a_{CM} = \frac{1}{1 + I_{CM}/MR^2}\, g}$$

N.B. se $I_{CM} = 0 \Rightarrow a_{CM} = g$ (ovvio!!).

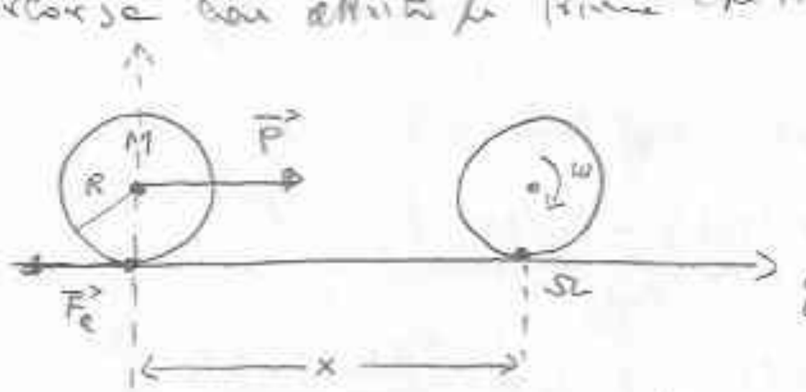
Infine la Tensione:

$$T = Mg - M a_{CM} = Mg - \frac{M}{1 + I_{CM}/MR^2}\, g =$$

$$= \left(\frac{I_{CM}/MR^2}{1 + I_{CM}/MR^2} \right) Mg$$

$$\Rightarrow \quad T = \left[\frac{I_{CM}}{MR^2 + I_{CM}} \right] Mg$$

Un corpo sferico (può essere anche cilindrico, una ruota, ecc... tanto sarà solo I, momento d'inerzia, a cambiare) trasla con impulso $\vec{P} = P_0 \hat{i}$ soggetto ad una forza d'attrito radente di coefficiente μ_D che ne rallenta il moto. Calcolare la distanza percorsa con attrito μ prima che il corpo cominci a rotolare.



La condizione di rotolamento è che $v_{CM} = R\omega$ (analoga a quella utilizzata per le accelerazioni nei casi precedenti $a_{CM} = R\alpha$).

Prima del rotolamento abbiamo:

$$-F_a = M a_{CM} \Rightarrow -\mu_D M g = M a_{CM}$$
$$\Rightarrow \vec{a}_{CM} = -\mu_D g \hat{i}$$

La forza d'attrito (costante) in un dato intervallo di tempo Δt varia l'impulso di:

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = (P_f - P_0)\hat{i} = -\mu_D M g \hat{i}\, \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{P_0 - P_f}{\mu_D M g}$$

ovviamente $P_0 > P_f$ (Il corpo sta rallentando). Per la cinematica otteniamo:

$$\begin{cases} x(t) = P_0/M\, t - \frac{1}{2}\mu_D g\, t^2 \\ v(t) = P_0/M - \mu_D g\, t \end{cases}$$

$x(\Delta t)$ rappresenta la distanza percorsa prima di iniziare a rotolare. P_0/M è la velocità iniziale, mentre P_f/M è la velocità per cui dovrà valere la relazione per il puro rotolamento.

$$V(\Delta t) = P_0/M - \mu_D g\, \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{V(\Delta t) - P_0/M}{-\mu_D g}$$

$$X(\Delta t) = P_0/M\, \frac{V(\Delta t) - P_0/M}{-\mu_D g} - \frac{1}{2}\mu_D g\, \frac{(V(\Delta t) - P_0/M)^2}{\mu_D^2 g^2}$$

$$= \frac{(P_0/M)^2 - V(\Delta t)^2}{2\mu_D g};$$

Dalla conservazione del momento angolare:

$$P_0 R = I\omega$$

dove $I = I_{CM} + MR^2$

$$\Rightarrow \omega = \frac{P_0 R}{I_{CM} + MR^2} \Rightarrow V_{CM} = \frac{P_0 R^2}{I_{CM} + MR^2}$$

ma $V_{CM} = V(\Delta t)$. Quindi

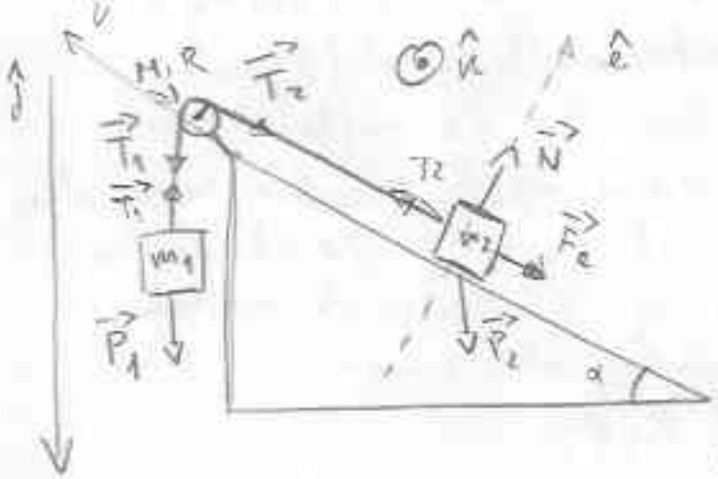
$$X(\Delta t) = \frac{(P_0/M)^2 - \left[P_0 R^2/(I_{CM} + MR^2)\right]^2}{2\mu_D g};$$

Se $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2 \Rightarrow I = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$

e $P_0 = MV_0$

$$X(\Delta t) = \frac{V_0^2 - \left[\cancel{M}V_0\cancel{R^2}/\tfrac{7}{5}\cancel{MR^2}\right]^2}{2\mu_D g} =$$

$$= \frac{V_0^2 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 V_0^2}{2\mu_D g} = \frac{V_0^2}{2\mu_D g}\frac{24}{49} = \frac{12 V_0^2}{49\mu_D g};$$



Descrivere il moto

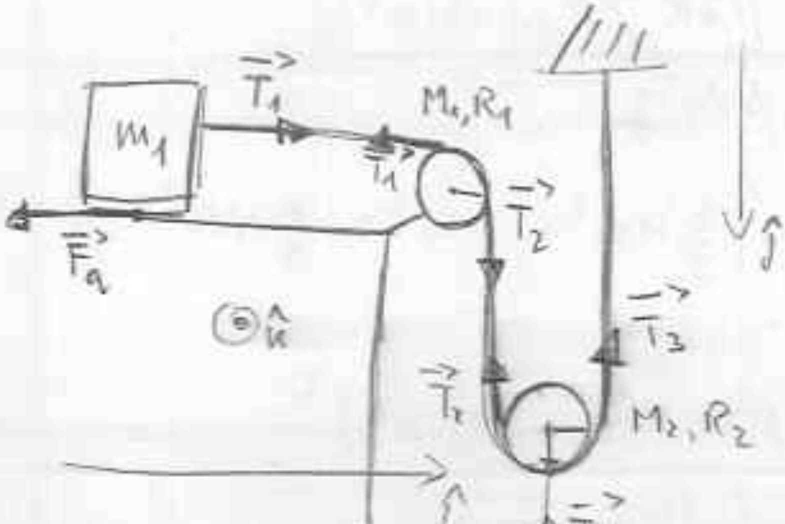
$$\begin{cases} \hat{\ell}: N - m_2 g\cos\theta = 0 \\ \hat{i}: -F_a - m_2 g\sin\theta + T_2 = m_2 a_2 \\ \hat{j}: m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ \hat{k}: RT_1 - RT_2 = I\alpha \\ F_a = \mu_D N \\ a_1 = a_2 = a = \alpha R \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mu_D m_2 g\cos\theta - m_2 g\sin\theta + T_2 = m_2 a \\ m_1 g - T_1 = m_1 a \\ R(T_1 - T_2) = I\, a/R \end{cases}$$

da cui l'accelerazione è data da

$$\boxed{a = \frac{m_1 - m_2(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)}{m_1 + m_2 + I/R^2}\, g}$$

Ponendo $\mu_D = 0$ e $\theta = \pi/2$ otteniamo il risultato di quello problema precedente. In maniera analoga si ottengono le tensioni.



Descrivere il moto.

$$\begin{cases} T_1 - \mu m_1 g = m_1 a_1 \\ R_1 T_1 - R_1 T_2 = I_1 \alpha_1 \\ T_4 + M_2 g - T_2 - T_3 = M_2 A_2 \\ T_3 R_2 - T_2 R_2 = I_2 \alpha_2 \\ m_2 g - T_4 = m_2 a_2 \end{cases}$$

Se il corpo di massa m_1 si sposta di un tratto s la prima carrucola si gira di un angolo θ_1 tale che $s = R_1\theta_1$. Per la seconda carrucola allo spostamento s del primo corpo corrisponde uno spostamento pari a $s/2$ (per il suo centro di massa). Mentre la rotazione della seconda carrucola è di θ_2 tale che $R_2\theta_2 = s/2$. Infine per il corpo di massa m_2 lo spostamento è pari a quello del centro di massa della seconda carrucola. In formule abbiamo:

$$s_1 = R_1\theta_1 = 2 s_2 = 2 R_2 \theta_2$$

Derivando due volte abbiamo:

$$a_1 = R_1\alpha_1 = 2a_2 = 2R_2\alpha_2 \doteq 2a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2a \\ a_2 = a \\ A_2 = a \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -2a/R_1 \text{ (gira in senso orario)} \\ \alpha_2 = a/R_2 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
T_1 - \mu m_1 g = 2 m_1 a \\
R_1 (T_1 - T_2) = -2 I_1 / R_1 \, a \\
T_4 + M_2 g - T_2 - T_3 = M_2 a \\
R_2 (T_3 - T_2) = I_2 / R_2 \, a \\
m_2 g - T_4 = m_2 a
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
T_1 - \mu m_1 g = 2 m_1 a \\
T_1 - T_2 = -2 \dfrac{I_1}{R_1^2} a \\
T_4 - T_2 - T_3 + M_2 g = M_2 a \\
T_3 - T_2 = \dfrac{I_2}{R_2^2} a \\
-T_4 + m_2 g = m_2 a
\end{cases}
$$

eliminando tutte le tensioni si ottiene:

$$
-2 \mu m_1 g + M_2 g + m_2 g = 4 m_1 a + 4 \frac{I_1}{R_1^2} a + M_2 a + \frac{I_2}{R_2^2} a + m_2 a
$$

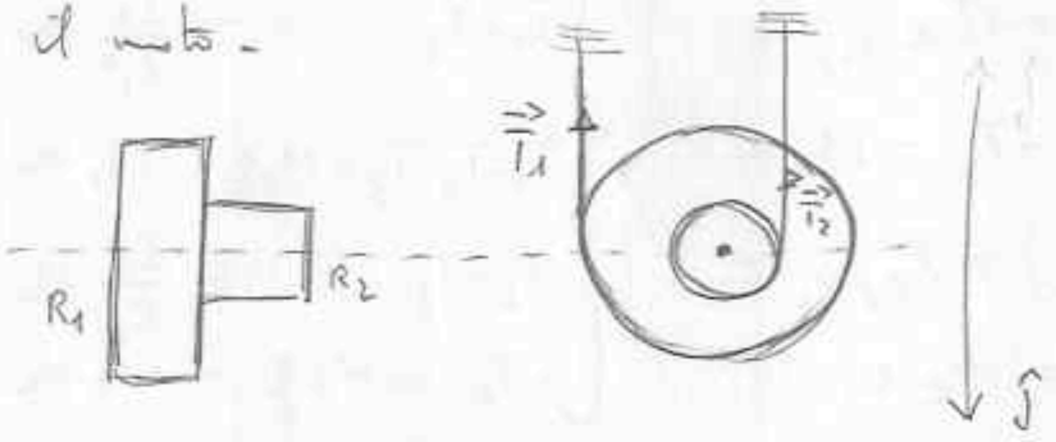
$$
a = \frac{m_2 - 2 \mu m_1 + M_2}{4 m_1 + 4 I_1/R_1^2 + M_2 + I_2/R_2^2 + m_2} =
$$

$$
= \frac{m_2 + M_2 - 2 \mu m_1}{4 m_1 + m_2 + M_2 + 4 I_1/R_1^2 + I_2/R_2^2} ;
$$

se $m_2 + M_2 = 2 \mu m_1 \Rightarrow a = 0$.

Si nota che se $\mu = 0$ (assenza di attrito) indipendentemente dalla massa di m_1 il tutto accelera verso il basso.

Due carrucole di raggi diversi sono collegate in modo da muoversi come un solo blocco. Determinare il moto.



$$\begin{cases} -T_1 - T_2 + Mg = M a_{CM} \\ R_2 T_2 - R_1 T_1 = I\alpha \end{cases}$$

La struttura è in equilibrio se $a_{CM} = 0$ e $\alpha = 0$

$$\begin{cases} T_1 + T_2 - Mg = 0 \\ R_2 T_2 - R_1 T_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = Mg / 1 + R_1/R_2 \\ T_2 = Mg / 1 + R_2/R_1 \end{cases}$$

Descrivere il pendolo massivo costituito da una sbarra omogenea.

Applicando la seconda legge cardinale della meccanica

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

rispetto al polo Ω abbiamo:

$$\vec{M}_P = \vec{r} \wedge \vec{P} = -Mg|\vec{r}|\sin\theta\,\hat{n}$$

mentre $\vec{L} = I\vec{\omega}$ dove $I = I_{CM} + M|\vec{r}|^2$

$$\Rightarrow -Mg|\vec{r}|\sin\theta\,\hat{k} = \frac{d}{dt} I\omega\hat{k}$$

$$I\frac{d^2}{dt^2}\theta = -Mg|\vec{r}|\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\theta + \frac{Mg|\vec{r}|}{I}\sin\theta = 0$$

per piccole oscillazioni: $\theta \ll 1$ (espressione in radianti)

N.B. 1 rad $\simeq 60°$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + \frac{Mg|\vec{r}|}{I_{CM} + M|\vec{r}|^2}\theta = 0$$

Il periodo d'oscillazione è:

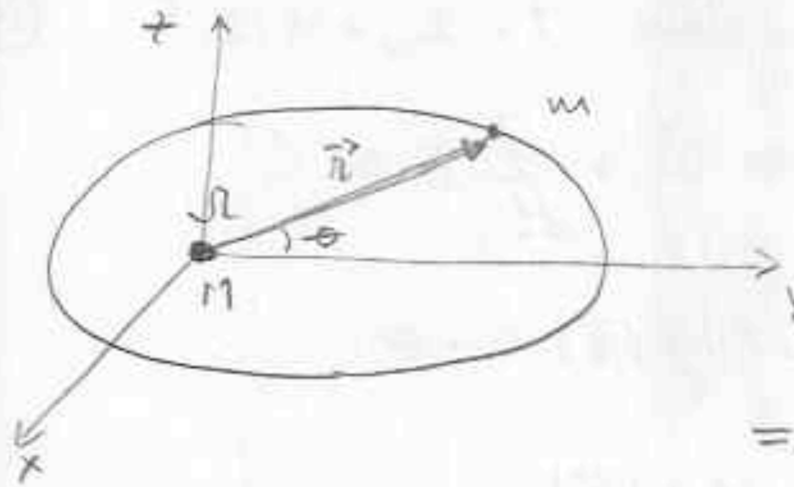
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + M|\vec{r}|^2}{Mg|\vec{r}|}}$$

TRAIETTORIA DI UN CORPO IN UN CAMPO DI FORZE CENTRALI

Traiettorie di un pianeta in un campo gravitazionale.
Dalla conservazione dell'energia abbiamo:

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - U(\vec{r}) = E$$

dove $|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, $U(\vec{r}) = -\frac{GMm}{|\vec{r}|}$ è l'energia potenziale ed E è l'energia totale.
Dalla seconda legge della dinamica abbiamo:



$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}_G =$$
$$= -\vec{r} \wedge \frac{GMm}{r^2}\hat{r} = 0$$
poiché $\vec{r} \wedge \hat{r} = 0$
$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{L} = \text{costante.}$$

Si conserva il momento angolare.

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

Scegliendo delle coordinate polari (ρ, θ) così definite:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{cases}$$

Il momento angolare $\vec{L}$ diventa:

$$\vec{L} = m\rho^2\dot{\theta}\,\hat{z}$$

La conservazione dell'energia è:

$$\begin{cases} \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{GMm}{\rho} = E \\ L = m\rho^2\dot{\theta} \longrightarrow \dot{\theta} = L/m\rho^2 \end{cases}$$

N.B. $L = |\vec{L}|$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\frac{L^2}{m^2\rho^4}\right) - \frac{GMm}{\rho} = E$$

da cui otteniamo

$$\dot{\rho} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{\rho} - \frac{L^2}{m^2\rho^2}}$$

potremmo integrare direttamente tale equazione differenziale ed ottenere la legge oraria $\rho = \rho(t)$:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \pm\sqrt{\;---\;} \quad \Rightarrow \pm\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{\rho} - \frac{L^2}{m^2\rho^2}}} = \int_{t_0}^{t} dt$$

Invece siamo interessati a considerare come ρ funzione di φ: $\rho = \rho(\varphi)$. Quindi utilizzando la conservazione del momento angolare:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2} \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\rho}{dt} = \varphi'\dot{\rho} = \pm\varphi'\sqrt{\;-\,-\,-\;}$$

$$\Rightarrow \varphi' = \pm\frac{L}{m\rho^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{\rho} - \frac{L^2}{m^2\rho^2}}}$$

$$d\varphi = \pm b\,\frac{d\rho}{\rho^2}\frac{1}{\sqrt{-1 + \frac{2a}{\rho} - \frac{b^2}{\rho^2}}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a = -\dfrac{GMm}{2E} \\ b = \sqrt{-\dfrac{L^2}{2mE}} \end{cases}$$

a e b sono delle lunghezze e sono positive (come devono essere solo se $E<0$!!). Integrando abbiamo:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm b\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{-1 + \frac{2a}{\rho} - \frac{b^2}{\rho^2}}} \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \arccos\left[\frac{b^2 - a\rho}{\rho\sqrt{a^2-b^2}}\right]$$

(FIDATEVI!!!)

Da cui

$$\cos\theta = \frac{b^2 - a\rho}{\rho\sqrt{a^2-b^2}} \quad \odot$$

Abbiamo posto $\theta_0 = 0$ (dipende da come scegliamo gli assi cartesiani).

La $\odot$ rappresenta l'equazione di un'ellisse con asse maggiore pari ad a ed asse minore pari a b.