PON 2007 – 2013

Liceo Scientifico *Leonardo da Vinci*

Vallo della Lucania

Nuovi percorsi matematici:

Osservare, descrivere, costruire.

Derive - 2

ESPRESSIONI E POLINOMI

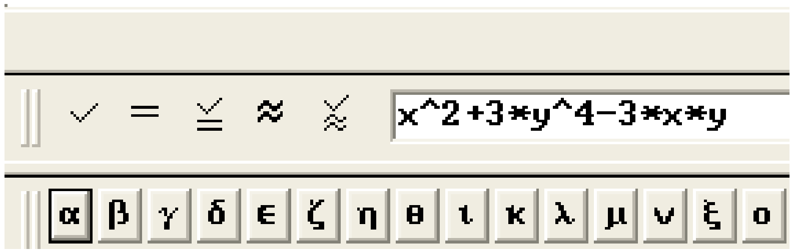
Arturo Stabile

Vallo della Lucania

26 settembre 2008

Valutazione di espressioni - 1

- Si inserisce l'espressione

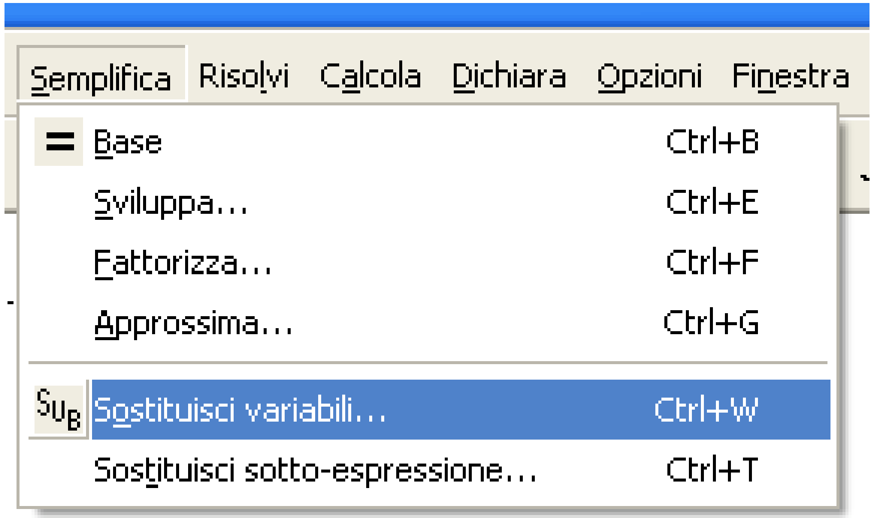


ottenendo

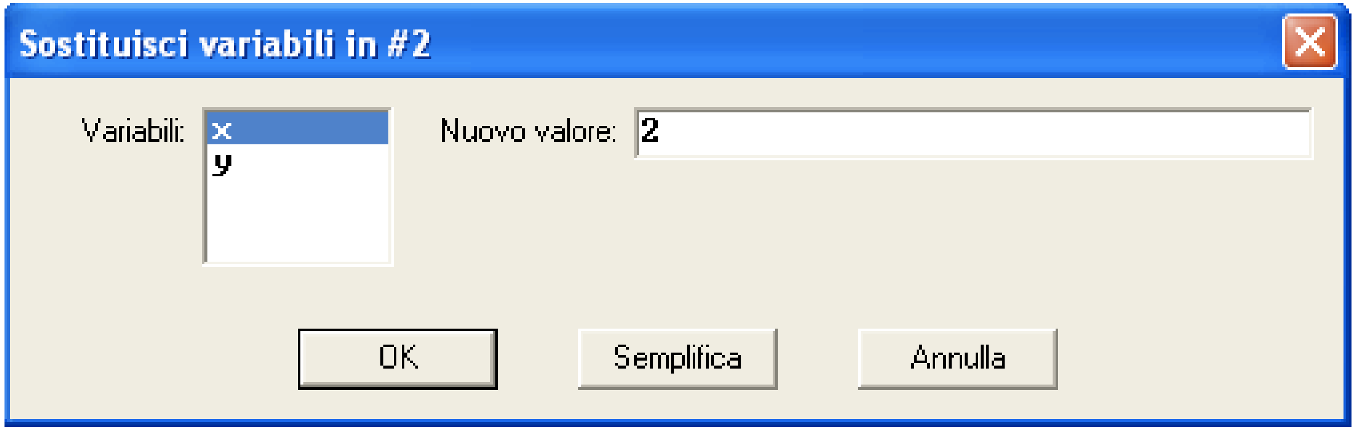
#1: $x^2 + 3 \cdot y^4 - 3 \cdot x \cdot y$

Valutazione di espressioni - 2

- Lasciando l'espressione evidenziata, si seleziona dal menu Semplifica, la voce Sostituisci variabili



Valutazione di espressioni - 3



#3: $2^2 - 3 \cdot 2 \cdot y + 3 \cdot y^4$

Valutazione di espressioni - 4

- Lasciando l'espressione evidenziata, si clicca il bottone Semplifica = ottenendo

$$3 \cdot y^4 - 6 \cdot y + 4$$

- Possiamo ripetere gli stessi passi per la variabile y

Sviluppare espressioni - 1

- Si inserisce l'espressione

```
(x^2-y^2)*(x-y)^2-(x+y)^2*(x^2+y^2)
```

ottenendo

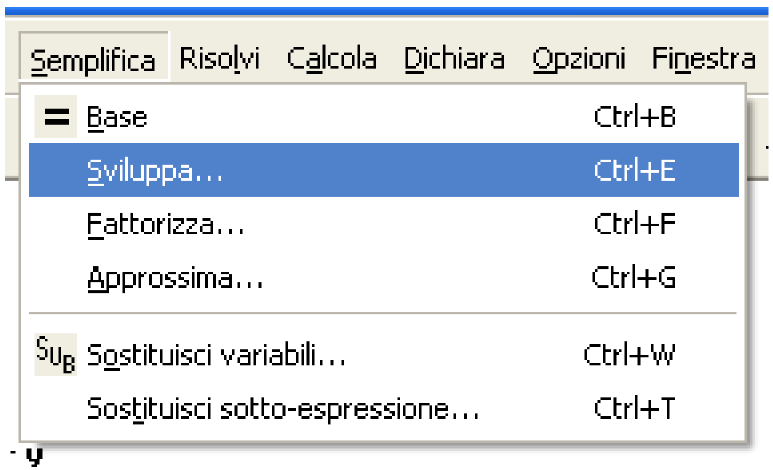
#12: $(x^2 - y^2)\cdot(x - y)^2 - (x + y)^2\cdot(x^2 + y^2)$

Sviluppare espressioni - 2

- Si seleziona la parte da sviluppare

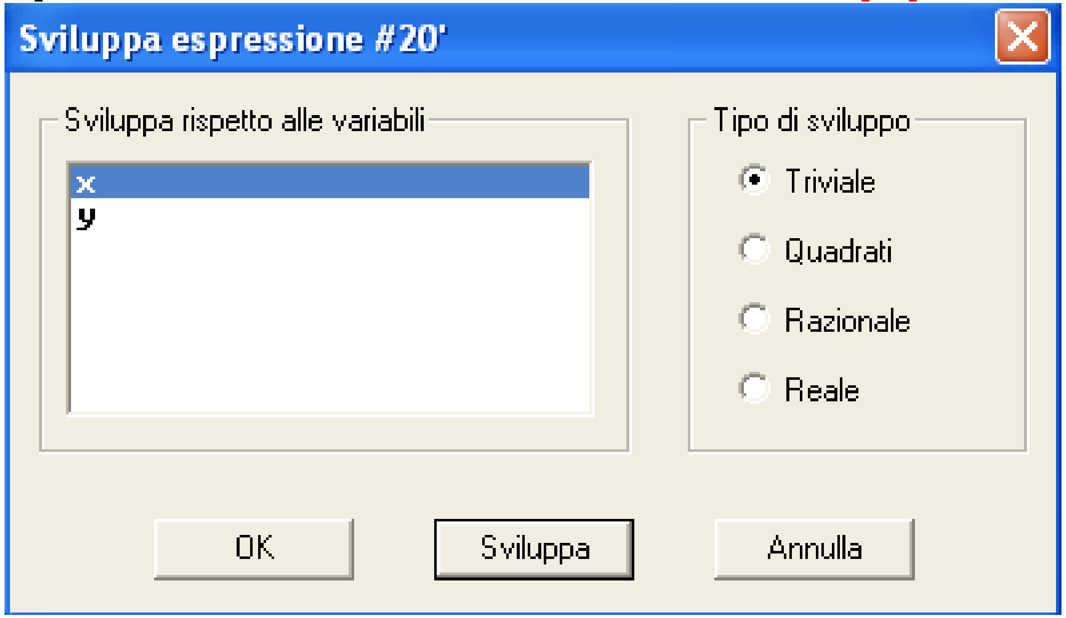
$$\#12:\quad (x^2 - y^2)\cdot(x - y)^2 - (x + y)^2\cdot(x^2 + y^2)$$

- Si selezione la voce Sviluppa dal menu Semplifica



Sviluppare espressioni - 3

- Si seleziona una delle due variabili e poi si preme il bottone Sviluppa



Sviluppare espressioni - 4

- Si ottiene

$$(x^2 - y^2)\cdot(x^2 - 2\cdot x\cdot y + y^2) - (x + y)^2\cdot(x^2 + y^2)$$

- Si ripete il tutto, fino ad ottenere il risultato finale

$$- 4\cdot x^3\cdot y - 2\cdot x^2\cdot y^2 - 2\cdot y^4$$

Stessi passi anche per le espressioni numeriche

- Si seleziona l'espressione da semplificare e si preme =

$$4 \cdot \left(\frac{12 - 9}{3} + 10 \right)$$

$$4 \cdot \left(\frac{3}{3} + 10 \right)$$

$$4 \cdot (1 + 10)$$

$$4 \cdot 11$$

$$44$$

Calcolare, passo a passo, le seguenti espressioni

- $(x^3+5x^2+3)*(x^2+1)$
- $x^5+5x^2+10x+4$
- $(x^3+5x^2+3)/(x^2+10x+4)$
- $(x^6-3x^3+2x)/x$
- $(x^6 -x^3+5x^2-7)*(x^3+1)/(x^2-1)$

Definire una funzione

- Per definire una funzione utilizziamo quasi la stessa sintassi che utilizziamo in analisi
  - $f(x) = x^2+4\sin(x)$ diventa
    f(x) := x^2 + 4*sin(x)
  - $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ diventa
    g(x,y) := x^2 + y^2 - 4
- Rappresentiamo i polinomi come una funzione

Valutazione di funzioni

- Per valutare
  - g(x,y) nel punto x=3, inseriamo g(3,y), si clicca su semplifica = ottenendo $y^2 + 5$
  - g(x,y) nel punto y=2, inseriamo g(x,2), si clicca su semplifica = ottenendo x^2
  - g(x,y) nel punto (x,y)=(3,5), inseriamo g(3,5), si clicca su semplifica ottenendo 30

Divisione tra polinomi - 1

- Dati A(x) e B(x) due polinomi tali che deg(A) >= deg(B), possiamo scrivere A(x) come

$$A(x) = Q(x)\cdot B(x) + R(x) \text{ con}$$

$$\deg(R(x)) < \deg(B(x))$$

Divisione tra polinomi - 2

- Possiamo calcolare Q(x) tramite

Q(x) = QUOTIENT(A(x), B(x))

mentre R(x) è calcolato come

R(x) = REMAINDER(A(x), B(x))

Algoritmo della divisione

- Possiamo *simulare* con Derive l'algoritmo della divisione di polinomi
- $A(x) = 3x^3+2x^2-2x+1$, $B(x) = x^2+2x-1$
- $Q_1(x) = 3x^3 / x^2 = 3x$
- $B(x) \cdot Q_1(x) = 3x^3+6x^2-3x$
- $R_1(x) = A(x) - B(x) \cdot Q_1(x) = -4x^2+x+1$
- $Q_2(x) = -4x^2 / x^2 = -4$
- $R_2(x) = R_1(x) - B(x) \cdot Q_2(x) = 9x -3$

Riassumendo

A(x)	B(x)
$R_1(x)$ $R_2(x)$	$Q_1(x)+ Q_2(x)$

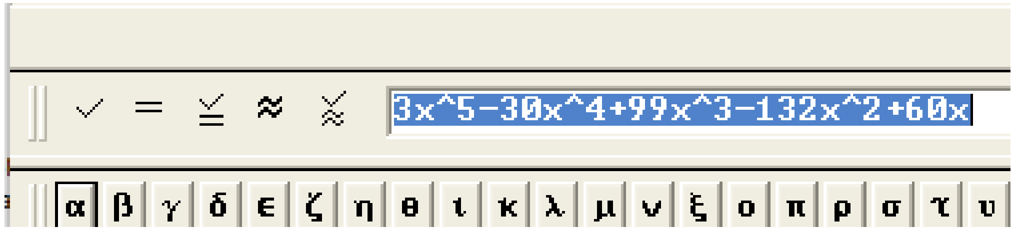
$3x^3+2x^2-2x+1$	x^2+2x-1
$-4x^2+x+1$	$3x - 4$
$9x -3$	

Esercizi

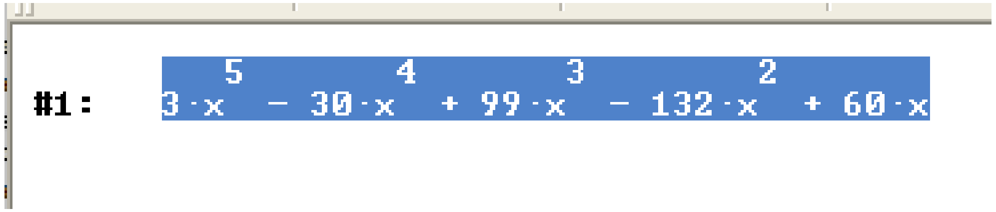
- A(x)
  - $x^4 + x^2 + 1$
  - $6a^4 + 9a^3 + 10a^2 - 3a - 4$
  - $2x^5 - x^4 + 3x^2 - x - 2$
  - $x^3 + 5x^2 + 3$
  - $x^6 - 3x^3 + 2x$
- B(x)
  - $x^2 - x + 1$
  - $2a^2 + 3a + 4$
  - $x^3 - x^2 + 1$
  - $x^2 + 10x + 4$
  - $x + 2$

Fattorizzazione di polinomi - 1

- Si inserisce il polinomio

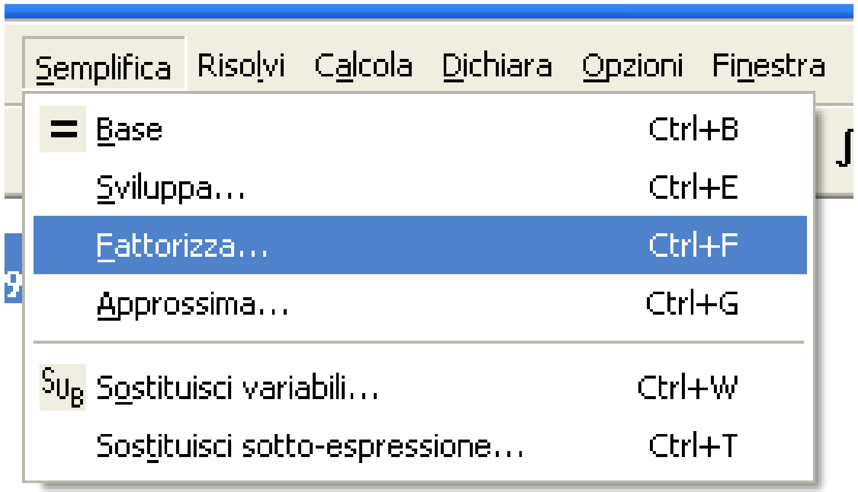


ottenendo

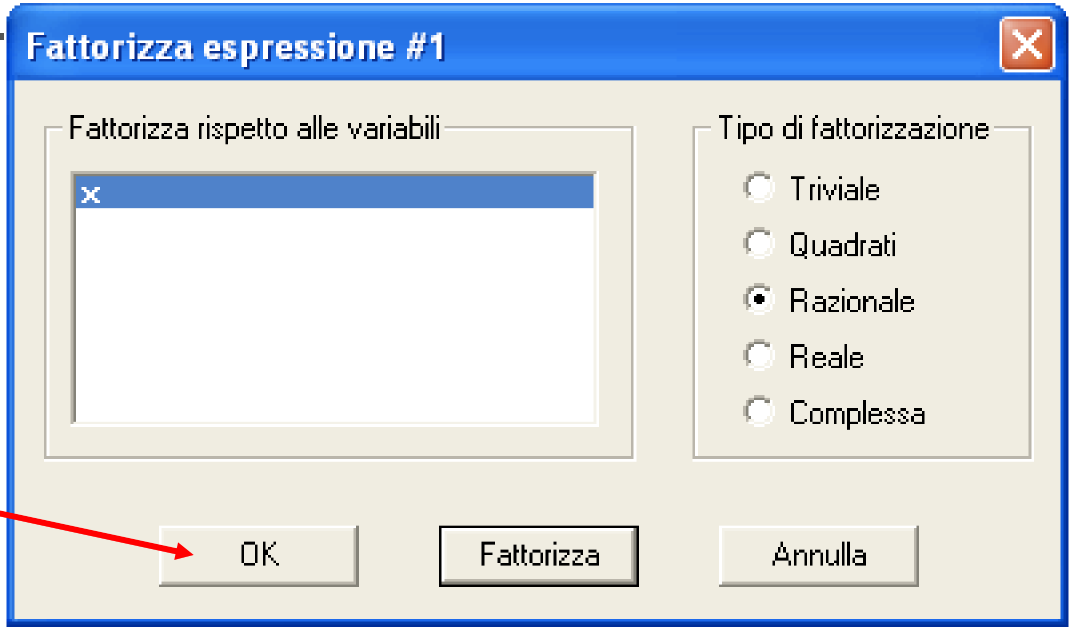


Fattorizzazione di polinomi - 2

- Lasciando l'espressione evidenziata, si seleziona dal menu Semplifica, la voce Fattorizza



Fattorizzazione di polinomi - 3



#2: $\text{FACTOR}(3 \cdot x^5 - 30 \cdot x^4 + 99 \cdot x^3 - 132 \cdot x^2 + 60 \cdot x, \text{Rational}, x)$

=

$$3 \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x - 5) \cdot (x - 2)^2$$

Tipo di fattorizzazione - 1

- Triviale
  - Raccoglimento dei monomi comuni
  - Mette in evidenza il MCD dei monomi che formano il polinomio

#1: $3\cdot x^5 - 30\cdot x^4 + 99\cdot x^3 - 132\cdot x^2 + 60\cdot x$

$$3\cdot x\cdot(x^4 - 10\cdot x^3 + 33\cdot x^2 - 44\cdot x + 20)$$

Tipo di fattorizzazione - 2

- Quadrati
  - Triviale + messa in evidenza di termini che sono una potenza di altre espressioni
    - $(A^2 + 2AB + B^2)$ diventa $(A + B)^2$

#1: $3 \cdot x^5 - 30 \cdot x^4 + 99 \cdot x^3 - 132 \cdot x^2 + 60 \cdot x$

$$3 \cdot x \cdot (x - 2)^2 \cdot (x^2 - 6 \cdot x + 5)$$

Tipo di fattorizzazione - 3

- Razionale
  - Triviale + Quadrati + messa in evidenza di prodotti di binomi di primo grado
    - (x-a)(x-b)...(x-q)
    - Utilizza la regola di Ruffini e prodotti notevoli del tipo $A^n - B^n$ e $A^n + B^n$

#1: $3 \cdot x^5 - 30 \cdot x^4 + 99 \cdot x^3 - 132 \cdot x^2 + 60 \cdot x$

$$3 \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x - 5) \cdot (x - 2)^2$$

Tipo di fattorizzazione - 4

- Reale: considera eventuali zeri reali

$$x^2 - 3$$

$$(x + \sqrt{3})\cdot(x - \sqrt{3})$$

- Complessa: considera eventuali zeri complessi

$$x^2 + 4$$

$$(x + 2\cdot\hat{\imath})\cdot(x - 2\cdot\hat{\imath})$$

Fattorizzare usando QUOTIENT

- Invece di utilizzare FACTOR per fattorizzare un polinomio, utilizzeremo soltanto QUOTIENT

- TEOREMA DEL RESTO
  - Un polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $x-a$ se e solo se $P(a) = 0$

Esempio: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$

- Determiniamo i divisori del termine noto
  - $\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6$
- Determiniamo i divisori del coefficiente di grado massimo
  - $\pm 1 \quad \pm 2$
- Calcoliamo tutte le possibili frazioni
  - $\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6 \quad \pm 1/2 \quad \pm 3/2$

Continuazione

1. Applicando il teorema del resto verifichiamo per quali binomi del tipo x-a è divisibile P(x)
2. Dopo aver trovato un divisore si esegue la divisione tra P(x) e x-a (si usa QUOTIENT)
   Applichiamo la regola di Ruffini
3. Se necessario, si ripetono sul quoziente le operazioni del punto 1
   Non consideriamo però i fattori x-a che non hanno dato esito positivo al primo tentativo

Fattorizzare, passo a passo, i seguenti polinomi

- $P(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 16$
- $P(x) = x^4 + x^2 - 6$
- $P(x) = x^5 + a^5$ $\quad$ $P(x) = x^5 - a^5$
  - Calcolo zeri: VECTOR(P($\pm a^n$), n, 1, 5)
- $P(x) = x^7 + a^7$ $\quad$ $P(x) = x^7 - a^7$
- $P(x) = x^4 + a^4$ $\quad$ $P(x) = x^4 - a^4$
- $P(x) = x^6 + a^6$ $\quad$ $P(x) = x^6 - a^6$

MCD e mcm tra polinomi

- Per calcolare il MCD si usa la funzione
  - POLY_GCD(A(x), B(X))
- Per calcolare il mcm si usa l'espressione
  - (A(x)•B(x))/POLY_GCD(A(x), B(X))

- Per i numeri usiamo
  - GCD(a,b,c,d) e LCM(a,b,c,d)

Calcolare il MCD e mcm dei seguenti polinomi

- A(x)
  - $x^4 + x^2 + 1$
  - $6a^4 + 9a^3 + 10a^2 - 3a - 4$
  - $2x^5 - x^4 + 3x^2 - x - 2$
  - $x^3 + 5x^2 + 3$
  - $x^6 - 3x^3 + 2x$
- B(x)
  - $x^2 - x + 1$
  - $2a^2 + 3a + 4$
  - $x^3 - x^2 + 1$
  - $x^2 + 10x + 4$
  - $x + 2$