LICEO SCIENTIFICO G. RUMMO
CAMBRIDGE International Examinations
Cambridge International School
Liceo Scientifico ad opzione IGCSE
Liceo scientifico sportivo
Via S. Colomba, 52 – BENEVENTO
0824.362718 – 0824.360947
mail:bnps010006@istruzione.it
sito: www.liceorummo.gov.it
pec: bnps010006@pec.istruzione.it CF:80002060624

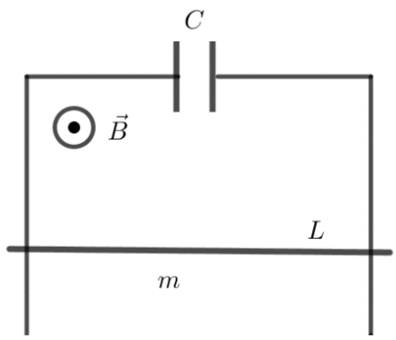
ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Tema di: MATEMATICA e FISICA
Indirizzo: Scientifico IGCSE
Classe: VB_C
A.S.: 2020/2021

Gruppo A

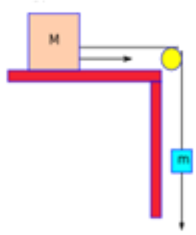
La scelta deve essere tale che ogni proposta sia presa in esame da almeno uno studente.

PROPOSTA 1



Una barretta conduttrice di lunghezza L e massa m, inizialmente ferma, viene lasciata cadere all'istante $t = 0$ in caduta verticale, con attrito trascurabile, lungo due guide metalliche verticali di resistenza trascurabile, collegate ad un condensatore di capacità C.
La barretta cade in una regione dello spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare alla barretta, il cui verso è riportato in figura.

- Spiega per quale motivo nel circuito comincia a circolare una corrente e determina l'espressione della carica $q(t)$ del condensatore inizialmente scarico, deducendo da essa l'espressione della corrente indotta $i(t)$.
- Dopo aver rappresentato il diagramma delle forze, applicando il secondo principio della dinamica, calcola l'accelerazione della barretta classificando la modalità di moto che ne scaturisce. E' soddisfatto il principio di equivalenza? Si ricorda che tale principio afferma che tutti i corpi sottoposti alla sola forza gravitazionale accelerano con la stessa intensità.



Dopo aver verificato che l'unità di misura della grandezza CL^2B^2 è *il* Kg, risolvi il problema di meccanica riportato in figura.
Si supponga che la massa M, pari a CL^2B^2, sia appoggiata su un pavimento orizzontale liscio e collegata mediante una fune ed una carrucola (supposte ideali) ad una seconda massa m pari a quella della barretta. Determina l'accelerazione a con cui si muove il sistema.
Dal punto di vista matematico l'espressione dell'accelerazione della barretta in funzione del campo magnetico è una funzione del tipo $f(x) = \frac{A}{1+kx^2}$, con A e k costanti positive.
Traccia il grafico della funzione, dopo aver analizzato eventuali simmetrie, estremi relativi, flessi asintoti e possibili discontinuità.

- Determina il valore di A per cui la funzione sia interpretabile come una densità di distribuzione di probabilità per una variabile continua aleatoria x. Determinare, quindi, k affinché il massimo della funzione sia 2.

LICEO SCIENTIFICO G. RUMMO
CAMBRIDGE International Examinations
Cambridge International School
Liceo Scientifico ad opzione IGCSE
Via S. Colomba, 52 – BENEVENTO
0824.362718 – 0824.360947
mail:bnps010006@istruzione.it
sito: www.liceorummo.gov.it
pec: bnps010006@pec.istruzione.it CF:80002060624

- In caso affermativo, sapendo che il valore medio della variabile x è dato dall'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, calcolare il valore. E' possibile stimare anche la deviazione standard? In caso negativo come è possibile ovviare al problema di un integrale divergente?

PROPOSTA 2

"*Natura non facit saltus*". G. W. Leibniz

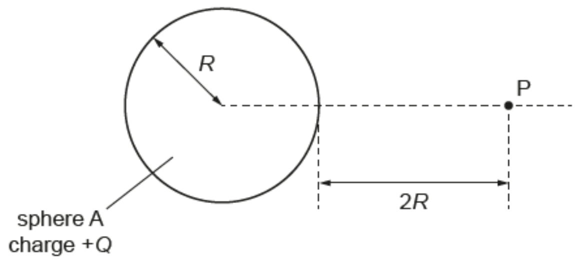
Molte grandezze fisiche, come la massa o la carica elettrica, appaiono continue anche se variano in ragione di un multiplo intero di unità fondamentali. Nello studio dell'analisi matematica di quest'anno hai imparato a considerare e trattare funzioni reali continue che ti hanno condotto ad approfondire il concetto di limite di una funzione.

Discuti il tema della continuità e della derivabilità delle funzioni reali di variabile reale, illustrando in particolare i vari casi di discontinuità di una funzione e della sua derivata.

- Illustra gli esempi che ritieni più opportuni di funzioni con punti di discontinuità e con punti di non derivabilità. Mostra, in particolare, un esempio di funzione continua in un punto, che sia un punto angoloso oppure una cuspide.

- Dato il grafico di $y = f(x)$ è possibile dedurre il grafico della sua derivata $y = f'(x)$ e viceversa? Si può risalire dal grafico di una funzione a quello della sua primitiva. Illustra ed argomenta queste situazioni o altre che ritieni opportune, aiutandoti anche con esempi specifici.

An isolated solid metal sphere A of radius R has charge +Q, as illustrated in figure. A point P is distance 2R from the surface of the sphere. Determine an expression that includes the terms R and Q for the electric field strength ***E*** *at point P.*



Supponiamo, invece, che la sfera sia isolante e che la carica $+Q$ sia distribuita uniformemente in tutto il volume della sfera, con densità volumica di carica costante ρ. Posto nell'origine dello spazio cartesiano il centro della sfera, indicare con r la distanza di un punto P dal centro della sfera.

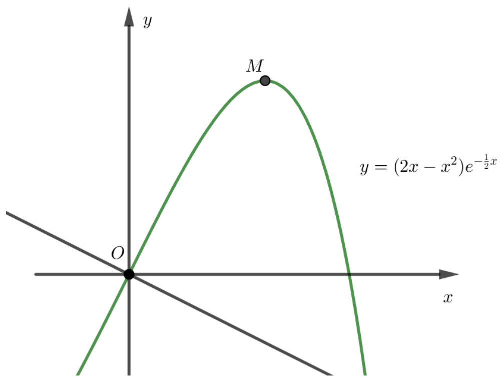
- Applicando opportunamente il teorema di Gauss sul flusso del campo elettrico, provare che l'intensità del campo elettrico generato da tale distribuzione di carica nel punto a distanza r dal centro della sfera è data da una funzione $E(r)$ (modulo del campo elettrico $\boldsymbol{E}$) definita a tratti, a seconda che $0 \leq r \leq R$ oppure $r > R$, di cui si chiede l'espressione in funzione di r e della densità di carica ρ.
- Tracciare il grafico della funzione $E(r)$, descrivendone le caratteristiche principali.
- Dalla relazione tra potenziale $V(r)$ e campo elettrico deduci il grafico qualitativo del potenziale elettrico.
- Supponi ora che la carica Q contenuta nella sfera ora sia distribuita seconda una densità di carica non costante che dipenda soltanto dalla distanza dal centro. Sia, quindi, $\rho(r) = c\,r$ la

funzione densità definita per $0 \leq r \leq R$ e c una costante da determinare. Calcola il valore della costante c e il campo elettrico $E(r)$ generato internamente ed esternamente alla sfera. Giustificare in termini del teorema di Gauss il perché il campo elettrico esterno non risente della diversa distribuzione di carica rispetto all'ipotesi iniziale.

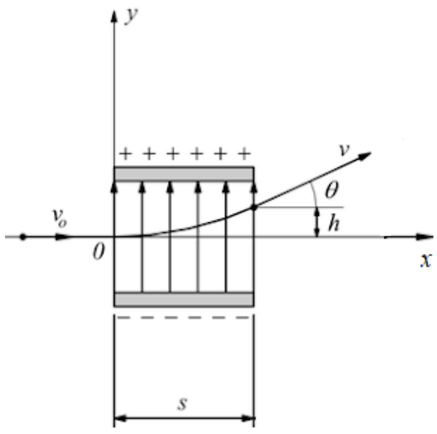
PROPOSTA 3

L'operazione matematica nota come derivata nasce come esigenza di determinare le rette tangenti alle curve ed i tassi istantanei di variazione di una funzione. La sua applicazione sia in matematica che in fisica riveste un ruolo importante nello studio delle discipline. Partendo dalla seguente situazione problematica, prendi lo spunto per illustrare il concetto di derivata sia come limite che come interpretazione geometrica.

The diagram shows part of the curve $y = (2x - x^2)e^{-\frac{1}{2}x}$, the normal to the curve at the origin O and its maximum point M. Find the exact x-coordinate of M and the equation of the normal.



Attraverso la definizione, determina la derivata della funzione $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ o di una qualunque altra funzione trascendente non elementare scelta a piacere ed illustra le possibili interpretazioni grafiche dei punti stazionari di una funzione.
Spiega in che senso e perché la funzione del quesito presenta un asintoto orizzontale e non un asintoto obliquo.
Dopo aver determinato il campo elettrico all'interno di un condensatore a facce piane e parallele attraverso il Teorema di Gauss, descrivi il moto di una particella positiva carica che entra nel condensatore con velocità v_0 parallela alle armature, come illustrato figura accanto.
Determinare l'equazione della traiettoria seguita dalla carica e, sfruttando le considerazioni geometriche relative alla derivata, determinare la direzione della velocità $\vec{v}$ nel punto della traiettoria all'uscita dal condensatore.



LICEO SCIENTIFICO G. RUMMO

CAMBRIDGE International Examinations
Cambridge International School
Liceo Scientifico ad opzione IGCSE

Liceo Scientifico Sportivo

Via S. Colomba, 52 – BENEVENTO
0824.362718 – 0824.360947
mail:bnps010006@istruzione.it
sito: www.liceorummo.gov.it
pec: bnps010006@pec.istruzione.it CF:80002060624

PROPOSTA 4

L'operazione matematica nota come integrale nasce come esigenza del calcolo delle aree di una parte di piano delimitata da curve di forma qualsiasi. Alternativamente l'integrale nasce in fisica come esigenza di calcolo opposto a quello di derivazione: basti pensare alla richiesta di come passare dalle accelerazioni alle velocità oppure da queste ultime allo spazio percorso. Oppure dalla potenza all'energia e così via. Tuttavia in entrambi i campi l'integrale trova la sua completa interpretazione teorica e la sua applicazione pratica. Traccia, seguendo un tuo personale percorso, un parallelo tra il concetto astratto in matematica e sue applicazioni, e quello connesso alla fisica, non tralasciando i teoremi della media e il teorema fondamentale del calcolo integrale.