



ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Tema di: MATEMATICA e FISICA

Indirizzo: Scientifico IGCSE

Classe: VB_C

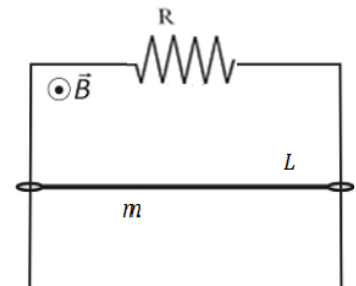
A.S.: 2020/2021

Gruppo E

La scelta deve essere tale che ogni proposta sia presa in esame da almeno uno studente.

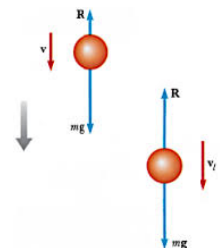
PROPOSTA 1

Una barretta conduttrice di lunghezza L e massa m , inizialmente ferma, viene lasciata cadere all'istante $t = 0$ in caduta verticale, con attrito trascurabile, lungo due guide metalliche verticali di resistenza trascurabile, collegate ad una resistenza R . La barretta cade in una regione dello spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare alla barretta, il cui verso è riportato in figura.



- Spiega per quale motivo nel circuito comincia a circolare una corrente, specificando il suo verso e determinando la sua espressione algebrica $i(t)$ in funzione della velocità $v(t)$.
- Dopo aver rappresentato il diagramma delle forze, dal secondo principio della dinamica deduci l'equazione differenziale del moto.
- Ricava la soluzione dell'equazione differenziale applicando il metodo della separazione delle variabili.
- Calcola il $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(t)}{t}$, interpretando il risultato dal punto di vista fisico.

Un corpo di massa m cade da fermo in un fluido viscoso, che esercita sulla massa una forza resistente proporzionale alla velocità v di caduta, secondo un coefficiente di proporzionalità b . Determina l'accelerazione a con cui cade il corpo (trascurando la spinta di Archimede) e verifica che la velocità limite coincide con quella determinata per la barretta nel campo magnetico se $b = mB$. Nel caso in cui si volesse considerare anche la spinta di Archimede, come cambierebbe qualitativamente la tua analisi del fenomeno?



- Dal punto di vista matematico, l'espressione della velocità della barretta in funzione del tempo $t \geq 0$ è del tipo $v(t) = v_{lim}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, dove v_{lim} è la cosiddetta velocità di regime e τ una costante reale. Traccia il grafico della funzione e deduci da esso il grafico della sua derivata.
- Determina il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare la funzione $v(t)$ intorno all'asse y in termini di v_{lim} e τ .
- Se il corpo fosse lanciato verso il basso con una velocità iniziale diversa da zero (sia v_0 tale valore), dedurre la soluzione dell'equazione differenziale e realizzare il grafico dell'andamento temporale della funzione velocità al variare dei parametri liberi v_0 e v_{lim} .



PROPOSTA 2

Si consideri nel vuoto un filo rettilineo cilindrico, con sezione ortogonale all'asse di raggio R espresso in metri e lunghezza indefinita, percorso da una corrente I distribuita uniformemente su tutta la sezione del filo, con densità di corrente uniforme j ed espressa in Ampere al metro quadrato (A/m^2).

Dopo aver illustrato il concetto di circuitazione del campo magnetico, utilizza il Teorema di Ampere per determinare l'espressione dell'intensità $B(r)$ del campo magnetico all'interno ed all'esterno del filo, in funzione della distanza r dall'asse del filo e verifica che

$$B(r) = \begin{cases} hr & \text{se } 0 \leq r < R \\ \frac{hR^2}{r} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

dove h è una costante che dipende da j , di cui si chiede l'unità di misura.

- Determinare a che distanza dalla superficie del conduttore (ed esternamente ad esso) si ha un'intensità magnetica uguale a quella ottenuta per $r = \frac{1}{2}R$.
- Se si sceglie un piano cartesiano Oxy con l'asse y coincidente con l'asse del filo e se la corrente scorre nel filo nel verso positivo dell'asse y , quali saranno il modulo, la direzione ed il verso della forza che agisce su una carica negativa $-q$ che transita nel punto di coordinate $(3R, 0)$ con vettore velocità di modulo v , direzione parallela all'asse del filo e verso concorde con quello della corrente?



Considera la funzione definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} hx & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{4h}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

con h costante reale positiva.

- Spiega per quale motivo alla funzione $f(x)$ non è applicabile il Teorema di Rolle relativamente all'intervallo $[1,4]$.
- Rappresenta la funzione nel piano cartesiano e determina il valore del massimo assoluto della funzione.
- Attraverso la definizione di derivata, ricava l'espressione algebrica della funzione derivata $f'(x)$ di $f(x)$ e deduci dal grafico di $f(x)$ il grafico qualitativo di $f'(x)$.
- Dopo aver discusso la natura dei punti di discontinuità di una funzione, stabilisce per quale valore di h il "salto" nella discontinuità di $f'(x)$ è uguale a 8? Che tipo di discontinuità presenta la derivata prima?
- Supponi ora che la corrente elettrica I che fluisce all'interno del cilindro ora sia distribuita secondo una densità di corrente non costante che dipenda soltanto dalla distanza dal centro. Sia, quindi, $J(r) = cr$ la funzione densità definita per $0 \leq r \leq R$ e c una costante da determinare. Calcola il valore della costante c e il campo magnetico $B(r)$ generato internamente ed esternamente al cilindro. Giustificare in termini del teorema della circuitazione di Ampere perché il campo magnetico esterno non risente della diversa distribuzione della densità di corrente rispetto all'ipotesi iniziale.



PROPOSTA 3

Considera la funzione reale parametrica $f_k(x) = \sin^2(kx)$, con k parametro reale maggiore di 1 e variabile x reale. Per studiare più agevolmente questo tipo di funzioni, ritieni opportuno sfruttare le formule di duplicazione del coseno per trasformare $f_k(x)$ in una funzione lineare in coseno del tipo $g_k(x) = A + B \cos(2kx)$. Dopo aver determinato i numeri A e B deduci dall'analisi di $g_k(x)$ il periodo T di $f_k(x)$.

- Illustra quali tipi di trasformazioni geometriche devi eseguire sul grafico della funzione elementare $y = \cos x$ per ottenere il grafico di $g_k(x)$.
- Disegna il grafico di $f_\pi(x)$ nel suo intervallo di periodicità $[0, T]$.
- Calcola il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_k(x)}{x}$, descrivendo il tipo di limite notevole utilizzato e da quale teorema esso derivi.
- Indica con S il trapezoide di base $[0, T]$ determinato da $f_\pi(x)$ e calcolane l'area.
- Calcolare il valore dell'integrale $\int_0^T \sin^2 kx \, dx$ e verificare che è lo stesso di $\int_0^T \cos^2 kx \, dx$. quindi generalizzare il calcolo e valutare i seguenti integrali: $\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$, $\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx$ e $\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx$ dove m ed n sono interi naturali.
- Determinare la primitiva della funzione $e^{\alpha x} \cos kx$ con α e k costanti reali.

Il contorno di S del trapezoide rappresenta una spira di resistenza R , che risulta attraversata perpendicolarmente da un campo magnetico di intensità variabile descritta dalla funzione $B(t) = B_0(A + \cos(\omega t))$. Se A e ωt sono numeri puri, quale dovrà essere l'unità di misura di B_0 ?

- Determina i valori di A e ω , sapendo che $B(0) = 3B_0$ e $B(1) = \frac{3}{2}B_0$.
- Spiega per quale legge fisica nella spira circolerà una corrente elettrica e, dalla sua applicazione, determinane l'espressione algebrica.
- Illustra la relazione che intercorre tra la corrente ed il campo magnetico.
- Scelto per ω il valore trovato sopra, spiegando cosa potrebbe rappresentare dal punto di vista fisico, e posto $k = \frac{B_0 S}{R}$, determina la potenza media dissipata per effetto Joule nella spira durante i primi 10 secondi in funzione della costante k .

PROPOSTA 4

“Elevare un numero al quadrato genera un numero positivo”. Tale affermazione non è sempre vera. Infatti è possibile estrarre la radice di un numero negativo appena si estende l'insieme dei numeri reali a quello dei cosiddetti numeri complessi. Il candidato tracci, seguendo un suo personale percorso, il legame, in base a quanto affermato, tra la matematica e la fisica riportando aspetti dell'una e dell'altra. Si suggerisce, solo ad esempio, il nesso che lega le oscillazioni nei circuiti elettrici, la trigonometria e i numeri complessi.