Le pale di un mulino a vento ruotano, a partire dalla posizione di riposo, con accelerazione costante $\alpha = 0{,}236 \frac{rad}{s^2}$. Dopo quanto tempo vi è un elemento di una delle pale che ha accelerazione centripeta e tangenziale di eguale intensità?.

Moto uniformemente accelerato: $\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t-t_0)$

L'accelerazione centripeta è: $a_c(t) = \omega(t)^2 r$

dove r è il raggio. L'accelerazione tangenziale:

$a_T(t) = \alpha r$.

Quindi:

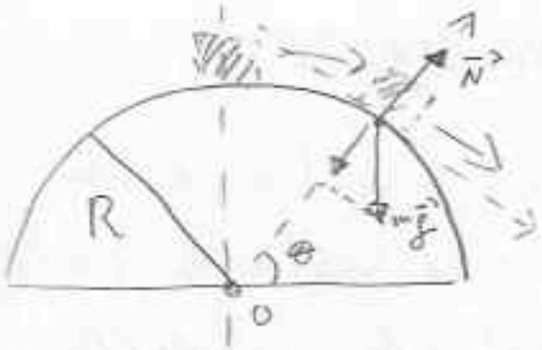
$$a_T(t) = \alpha_c(t) \Rightarrow \alpha \cancel{r} = [\omega_0 + \alpha(t-t_0)]^2 \cancel{r}$$

supponendo che $t_0 = 0$ e $\omega_0 = 0$

$$\alpha = \alpha^2 t^2 \Rightarrow t = \alpha^{-1/2};$$

$$t = \left(0{,}236\ rad/_{sec^2}\right)^{-1/2} \simeq 2.06\ sec -$$

Un corpo è posto sulla sommità di una semisfera di raggio R. Il corpo riceve una breve spinta ed abbandona la posizione di equilibrio instabile iniziando a scivolare lungo la superficie senza attrito. Calcolare a che altezza il corpo si staccherà dalla superficie-



Il corpo si muove di moto circolare accelerato in cui agiscono le forze peso e la reazione vincolare.

Proiettando le equazioni: $mg\sin\theta - N = m v^2/R$
ma non conosciamo la velocità v che è una funzione del tempo. Al distacco $|\vec{N}| = 0$

$$\cancel{m} g \sin\theta = \cancel{m} v^2/R$$

Dalla conservazione dell'energia otteniamo:

$$mgR = mgR\sin\theta + \frac{1}{2} m v^2$$

dove v è la velocità nell'istante di tempo in cui $|\vec{N}| = 0$.
Infine otteniamo:

$$\begin{cases} g\sin\theta = v^2/R \\ gR(1-\sin\theta) = \frac{1}{2} v^2 \end{cases}$$

$$\cancel{g}\sin\theta = \frac{1}{\cancel{R}}\, 2\cancel{g}\cancel{R}(1-\sin\theta)$$

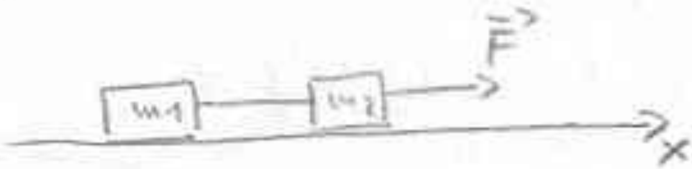
$$\sin\theta = 2 - 2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = 2/3$$

Il punto di distacco avviene con un angolo al centro tale che $\sin\theta = 2/3$. Quindi il punto di distacco è:

$$h = R\sin\theta = \frac{2}{3}R.$$

(2)

Siano due punti materiali, collegati tramite un filo, in moto su di un piano orizzontale scabro (sia μ_D il coefficiente di attrito dinamico μ_D). Calcolare l'accelerazione dei corpi supponendo che sia eseguita una forza $\vec{F}$. Inoltre calcolare la tensione del filo supponendo che il moto sia uniforme.



$$\begin{cases} F - T - \mu_D N_2 = m_2 a_2 \\ T - \mu_D N_1 = m_1 a_1 \\ N_1 - m_1 g = 0 \\ N_2 - m_2 g = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F - T - \mu_D m_2 g = m_2 a \\ T - \mu_D m_1 g = m_1 a \end{cases} \qquad \text{poiché } a_1 = a_2 = a$$

$$F - \mu_D m_2 g - \mu_D m_1 g = (m_1 + m_2) a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{F - \mu_D g (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}} \quad \odot$$

$$T = \mu_D m_1 g + m_1 \cdot \frac{F - \mu_D g (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{\cancel{\mu_D m_1 (m_1 + m_2) g} + m_1 F - \cancel{\mu_D m_1 (m_1 + m_2) g}}{m_1 + m_2} =$$

$$\boxed{T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F} \quad \odot\odot$$

Nel caso di moto uniforme: $a = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} F - T - \mu_D m_2 g = 0 \\ T - \mu_D m_1 g = 0 \end{cases} \Rightarrow F - \mu_D m_2 g - \mu_D m_1 g = 0$$

$$\boxed{F = \mu_D g (m_1 + m_2)}$$

e $\boxed{T' = \mu_D m_1 g}$

Ponendo $a = 0$ nella (o) si otteneva direttamente.

e poi sostituendo nella (oo):

$$T = \frac{m_1}{\cancel{m_1 + m_2}} \mu_D g \cancel{(m_1 + m_2)} = \mu_D m_1 g \text{ -}$$

Un punto materiale di massa $m = 5\,kg$ si muove lungo la guida in figura $A \to B$:

$A \equiv (0, 0, 5)$

$B \equiv (2, 0, 8)$

Sul corpo è applicata la forza costante $\vec{F}$ orizzontale pari a 20 N. Calcolare il lavoro eseguito sul corpo e la velocità finale se $v(t=0) = 0$.

Il lavoro è dato da $L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (F_x\, dx + F_y\, dy)$;

La forza $\vec{F}$ è data in componenti cartesiane:

$$\vec{F} \equiv (F, -mg)$$

$$L = \int_A^B (F\,dx - mg\,dy) = \int_0^{x_B} F\,dx - mg \int_{y_A}^{y_B} dy =$$

(3)

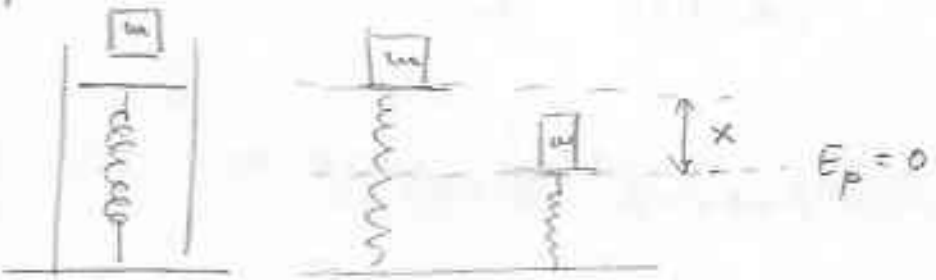
$$= F x_B - m g (y_B - y_A) = 20 N \cdot 2 m - 5 kg \cdot 9,8 \frac{m}{sec^2} (5-2) m =$$

$$= 40 J - 147 J = -107 J ;$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = -L \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2|L|}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 107 J}{5 kg}} =$$

$$= 6,54 \, m/sec ;$$

Un blocco di massa m = 263 g cade su di una molla come in figura di costante elastica k = 2,52 N/cm. Il blocco rimane attaccato alla molla che si comprime di una distanza massima pari a 11,8 cm. Quanto lavoro compie sulla compressione: i) la forza di gravità, ii) la molla. Qual'è la velocità del corpo all'istante dell'impatto?



Dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g x = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{k/m \, x^2 - 2 g x}$$

$$V = \sqrt{2,52 \cdot 10^2 \, N/m / 0,263 \, kg \, (11,8)^2 \cdot 10^{-4} m^2 - 2 \cdot 9,8 \frac{m}{sec^2} \, 11,8 \cdot 10^{-2} m}$$

$$= m/sec \cdot 10^{-1} \sqrt{\frac{2,52}{0,263} \cdot (11,8)^2 - 2 \cdot 9,8 \cdot 11,8} = \ldots$$

Il lavoro della forza peso:

$$L_p = mgx$$

e della forza elastica:

$$L_E = -\frac{1}{2}kx^2$$

In un acceleratore di particelle si lancia un protone che in un tratto rettilineo lungo 3,5 cm subisce un'accelerazione di $3,6 \cdot 10^{15}$ m/sec^2 - Se la velocità iniziale del protone vale $2,4 \cdot 10^7$ m/sec, calcolare la velocità in uscita e la variazione di energia cinetica che ha la massa del protone vale $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg -

La forza che agisce sul protone è:

$$F = m a = 1,67 \cdot 10^{-27} \, kg \cdot 3,6 \cdot 10^{15} \, m/sec^2 =$$

$$= 6,01 \cdot 10^{-12} \, N -$$

Il lavoro è quindi:

$$L = F \cdot S = 6,01 \cdot 10^{-12} \, N \cdot 0,035 \, m =$$

$$= 2,1 \cdot 10^{-11} \, J = \Delta E_K ;$$

La velocità finale è data da:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_i^2 + \Delta E_K$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + \frac{2 \Delta E_K}{m}} =$$

$$= \sqrt{(2,4)^2 \cdot 10^{14} \frac{m^2}{sec^2} + 2 \cdot \frac{2,1 \cdot 10^{-11} \, J}{1,6 \cdot 10^{-27} \, kg}} =$$

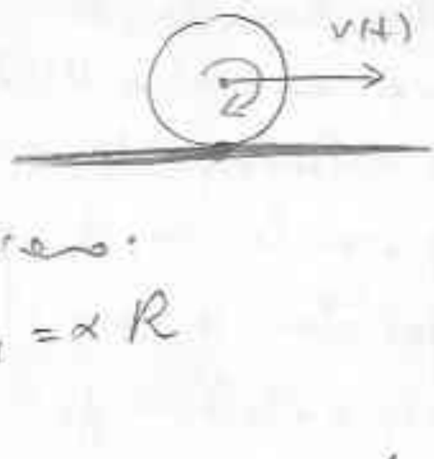
$$= m/sec \sqrt{(2,4)^2 \cdot 10^{14} + \frac{4,2}{1,6} \cdot 10^{16}} =$$

$$= m/sec \;---\; ;$$

Una ruota di raggio 27,4 cm con velocità iniziale di 43,3 m/sec rotola senza strisciare e si ferma dopo 225 m. Si calcoli l'accelerazione lineare, l'accelerazione angolare della ruota, e supponendo che il momento d'inerzia della ruota sia 0,155 $kg\,m^2$ si calcoli il momento torcente esercitato sulla ruota durante la fase di arresto.

Essendo il moto uniformemente decelerato abbiamo:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0 - a t \end{cases}$$



Per l'ipotesi di puro rotolamento abbiamo:

$$v_{CM} = \omega R \quad e \quad a_{CM} = \alpha R$$

Il tempo di arresto t^* è tale che

$$v(t^*) = v_0 - a_{CM} t^* = 0 \Rightarrow a_{CM} = v_0 / t^*$$

Lo spazio percorso $x(t^*)$ è tale che:

$$x(t^*) = v_0 t^* - \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{t^*}\right) t^{*2} = v_0 t^* - \frac{1}{2} v_0 t^* = \frac{1}{2} v_0 t^* ;$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{2\,x(t^*)}{v_0} = \frac{2 \cdot 225\,m}{43,3\,m/s} = 10,4\,sec;$$

L'accelerazione a_{CM} è quindi:

$$a_{CM} = v_0/t^* = \frac{43,3\ m/sec}{10,4\ sec} = 4,2\ m/sec^2$$

L'accelerazione angolare:

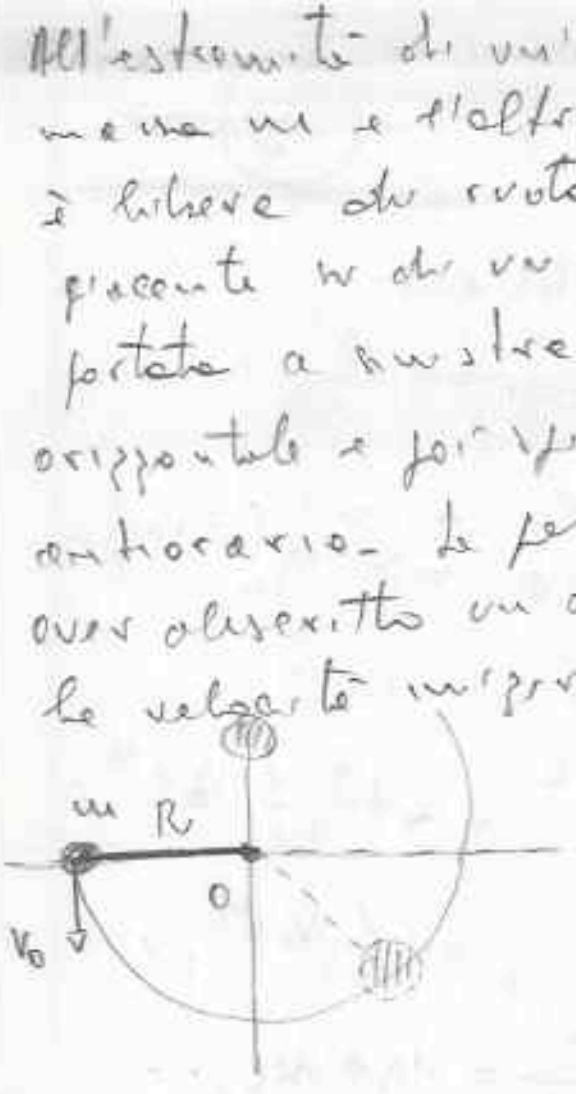
$$\alpha = a_{CM}/R = \frac{4,2\ m/sec^2}{0,274\ m} = 15,195\ sec^{-2};$$

Il momento responsabile della accelerazione è tale che:

$$|\vec{M}| = I\alpha = 0,155\ kg\,m^2 \cdot 15,195\ sec^{-2} =$$

$$=$$

All'estremità di un'asticella leggera è attaccata una massa m e l'altra estremità è fissa e la pallina è libera di ruotare su di una circonferenza giacente su di un piano verticale. L'asticella viene portata a ruotare fino ad assumere posizione orizzontale e poi spinta verso il basso in verso antiorario. La pallina ruota e si arresta dopo aver descritto un angolo di $3/2\,\pi$. Quanto vale la velocità impressa?

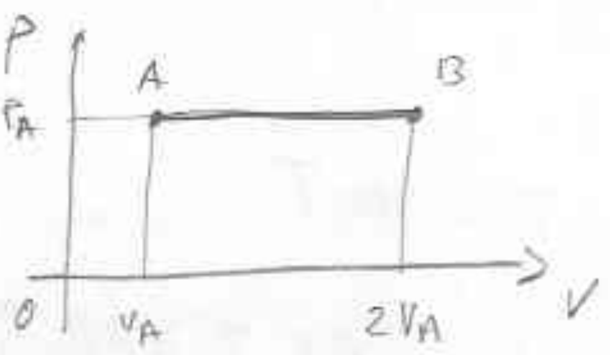


Il sistema è conservativo. Quindi:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = mgR$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR}$$

Un gas ideale di 0,8 moli compie una trasformazione isobara reversibile dallo stato $A(V_A = 10^{-2}\,m^3,\ P_A = 2\,bar)$ allo stato $B\ (V_B = 2V_A)$ con $Q/L = 2.5$. Calcolare la variazione di energia interna ΔU, il calore specifico a pressione costante. Come cambierebbe se fosse $V_B = 3V_A$ nel rapporto Q/L?



$$L = p(V_B - V_A) =$$
$$= p V_A = 2\,kJ.$$

Il calore scambiato è

$$Q = 2.5\,L = 2.5 \cdot 2\,kJ =$$
$$= 5\,kJ;$$

la variazione di energia interna è

$$\Delta U = Q - L = 5\,kJ - 2\,kJ = 3\,kJ;$$

Il calore ed il lavoro posso anche essere scritti come segue:

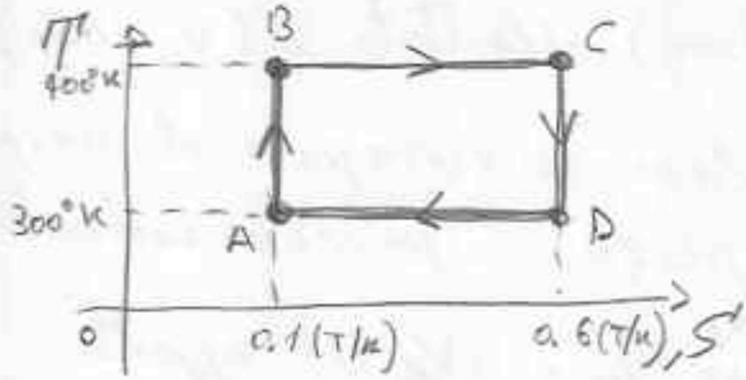
$$Q = n c_p (T_B - T_A) \quad e \quad L = nR(T_B - T_A)$$

$$\Rightarrow Q/L = c_p/R \Rightarrow c_p = Q/L\, R = 2.5 \cdot R$$

$$\Rightarrow c_p = 5/2\, R$$ (il gas è monoatomico).

Q/L non dipende dal volume. Quindi anche modificando il volume il rapporto resta lo stesso.

Calcolare per il ciclo in figura il calore assorbito ed il lavoro svolto dal sistema.



Lungo le trasformazioni isoterme: $Q = -L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$

$Q > 0$ nell'espansione isoterma ed $Q < 0$ nella compressione isoterma.

Il calore assorbito è

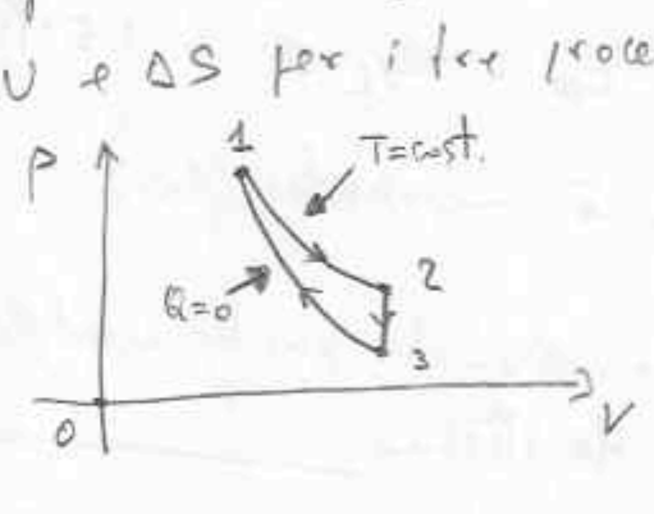
$$Q_{ASS} = \Delta S \cdot T = 200\ J$$

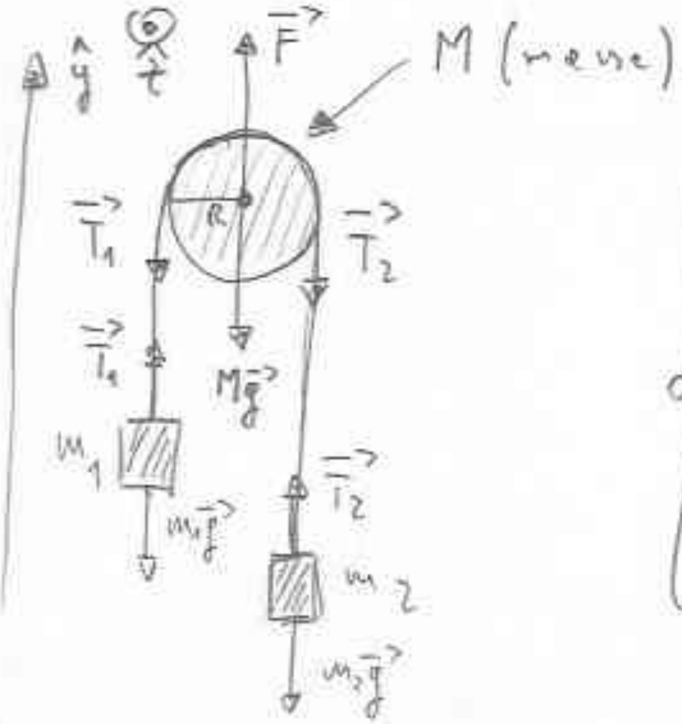
$$L = -Q_{TOT} = -(Q_{ASS} + Q_{CED}) = -(\Delta S_2 T_2 + \Delta S_1 T_1) =$$

$$= -\Delta S_2 (T_2 - T_1) = -75\ J.$$

$\Delta U = 0$ (sempre) $\rightarrow \Delta S_1 = \Delta S_2$.

Un gas biatomico ideale percorre il ciclo in figura dove $V_2 = 3V_1$. Calcolare: $P_2, P_3, T_3, L, Q, \Delta U$ e ΔS per i tre processi. Assumere P_1, V_1, T_1 noti.





Descrivere il moto:

$$\begin{cases} \vec{T}_1 + \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2 \vec{a}_2 \\ \vec{F} + \vec{P}_M + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = M\vec{A} \\ \vec{R} \wedge \vec{T}_1 + \vec{R} \wedge \vec{T}_2 = I\vec{\alpha} \end{cases}$$

proiettando sugli assi abbiamo:

$$\begin{cases} \hat{y}: \ F - Mg - T_1 - T_2 = MA \\ \hat{y}: \ T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \\ \hat{y}: \ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ \hat{z}: \ R(T_1 - T_2) = I\alpha \\ a_1 = a + A \\ a_2 = -a + A \\ \alpha = -a/R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 + T_2 = -MA - Mg + F \\ T_2 - T_1 = Ia/R^2 \\ T_1 = m_1(a + g + A) \\ T_2 = m_2(-a + g + A) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$m_1(a + g + A) - m_2(-a + g + A) = -Ia/R^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)(g + A)}{m_1 + m_2 + I/R^2} \qquad A = \frac{F - (m_1 + m_2 + M)g - (m_1 + m_2)a}{m_1 + m_2 + M}$$