Quindi la traiettoria del raggio non è parallela al suolo ma subisce una "curvatura" positiva o negativa e quindi permette di far osservare oggetti posti sotto l'orizzonte.

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER SOLUZIONE EQUAZIONE PROPAGAZIONE CALORE

Consideriamo la temperatura $u(x,t)$ in un campione di materiale che ricopre una regione $D \subset \mathbb{R}$. L'equazione che descrive l'evoluzione spazio-temporale della temperatura $u(x,t)$ è data

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - K \, \Delta u(x,t) = 0$$

dove $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Consideriamo che il nostro sistema evolve soltanto lungo una sola direzione $\Delta \to \partial^2/\partial x^2$. Quindi nel nostro caso otteniamo:

$$(\circ) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - K \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = 0$$

Il metodo generale per cercare soluzioni della $(\circ)$ è per separazione di variabili. Vedremo che questo ci porterà a soluzioni sotto forma di espansioni in serie di Fourier.

A tal fine consideriamo il seguente problema

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = 0 & 0 \le x \le l,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & \forall t \end{cases}$$

dove abbiamo imposto le "condizioni iniziali" ($u(x,0) = f(x)$) e le "condizioni al contorno" ($u(0,t) = u(l,t) = 0$). $f(x)$ è una generica funzione che ci dà la particolare forma di $u(x,t)$ per $t=0$.
Cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo:

$$X(x)\dot{T}(t) - k\,T(t)\,X''(x) = 0$$

dove $\cdot \to \partial/\partial t$ e $' \to \partial/\partial x$

Dividendo per $X(x)\,T(t)$ (che è sempre $\neq 0$)

$$\dot{T}(t)/T(t) = k\,X''(x)/X(x)$$

poiché tale relazione deve essere vera $\forall x, t$, i due membri devono essere uguali ad una costante ($\doteq -\lambda$)

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda \, T(t) = 0 \\ X''(x) + \frac{\lambda}{k} X(x) = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases}$$

Le cui soluzioni sono $T(t) = K_3 e^{-\lambda t}$ e $X(x) = K_1 \cos\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\,x + K_2 \sin\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\,x$. Imponendo le condizioni al contorno $X(0) = X(\ell)$ otteniamo:

$$K_1 = K_1 \cos\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\,\ell + K_2 \sin\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\,\ell = 0$$

quindi $K_1 = 0$ e $\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\,\ell = n\pi$ da cui ricaviamo che λ deve assumere particolari valori:

$$\lambda \doteq \lambda_n = \frac{k n^2 \pi^2}{\ell^2} \quad \forall n$$

Dunque le soluzioni trovate per $X(x)$ e $T(t)$ sono funzioni dell'indice n:

$$u(x,t) = u_n(x,t) = \underbrace{K_3 K_2}_{K} \, e^{-\frac{k n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

K costante arbitraria.

La soluzione più generale, dunque, sarà una combinazione delle soluzioni $u_n(x,t)$ al variare di n. Infatti:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, e^{-\frac{k n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)}$$

dove b_n sono dei coefficienti arbitrari.

Tuttavia i coefficienti b_n non sono arbitrari. Infatti ci resta ancora che soddisfare una condizione iniziale: $(u(x,0) = f(x))$. Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x = f(x)$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $\sin\frac{m\pi}{\ell}x$ ed integriamo tra $-\ell$ ed ℓ otteniamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_{-\ell}^{\ell} dx \sin\frac{m\pi}{\ell}x \sin\frac{n\pi}{\ell}x = \int_{-\ell}^{\ell} dx \sin\frac{m\pi x}{\ell} f(x)$$

Valutiamo l'integrale con il prodotto di due seni:

$$\int_{-\ell}^{\ell} dx \sin\frac{m\pi}{\ell}x \sin\frac{n\pi}{\ell}x = \frac{\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy \sin my \sin ny$$

avendo posto $\frac{\pi x}{\ell} = y$. Che per le note condizioni di "ortogonalità" delle basi trigonometriche:

$$\int_{-\ell}^{\ell} dx \sin\frac{m\pi}{\ell}x \sin\frac{n\pi}{\ell}x = \frac{\ell}{\cancel{\pi}}\cancel{\pi}\,\delta_{m,n} = \ell\,\delta_{m,n}$$

dove $\delta_{m,n}$ è la delta di Kronecker: $\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{se } m=n \\ 0 & \text{se } m\neq n \end{cases}$

Sostituendo il tutto nella $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \ldots$ otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \ell\, \delta_{m,n} = \int_{-\ell}^{\ell} dx \sin\frac{m\pi}{\ell}x\, f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} dx \, \sin \frac{n\pi}{l} x \, f(x)}$$

Quindi b_n (o b_m) rappresentano i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x)$ rispetto alla base $\left\{\sin \frac{n\pi}{l} x\right\}_{n=0}^{\infty}$ il cui periodo vale $2l/n$.

N.B. Il periodo della base trigonometrica è diverso da $2\pi/n$ poichè abbiamo sviluppato rispetto a $\sin \frac{n\pi x}{l}$ e non rispetto a $\sin nx$ (per il quale avremmo avuto $2\pi/n$). Infatti effettuando una sostituzione

$\frac{\pi}{l} x = y$ otteniamo:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy \, \sin ny \, f\left(\frac{l}{\pi} y\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy \, \sin ny \, \tilde{f}(y)$$

Quindi ora ci troviamo... infatti abbiamo definito una funzione $\tilde{f}$ che ha periodo diverso da f.

EQUAZIONE DEL CALORE NON OMOGENEA

Utilizziamo l'espansione in serie di Fourier appena visto per risolvere l'equazione del calore non omogenea. Il problema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = F(x,t) & 0 \le x \le \ell\,,\ t>0 \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \forall t \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

N.B. In questo caso poiché vi è una "sorgente" $F(x,t)$ possiamo avere che all'istante $t=0$ u sia nulla. Nel caso precedente $F(x,t)=0$ ed imponendo che u sia nulla per $t=0$ implica la soluzione banale $u=0$.

Cerchiamo la soluzione dello stesso stile trovato in precedenza ma sfruttiamo il metodo della variazione delle costanti e rendiamo, quindi, i coefficienti b_n funzioni del tempo.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

Inversamente, $b_n(t)$ sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier della funzione $u(x,t)$:

$$b_n(t) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} dx \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) u(x,t).$$

Espandiamo in serie anche $F(x,t)$:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

Inserendo il tutto nell'equazione del calore non omogenea, otteniamo: (12)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dot{b}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + k\sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \sin\frac{n\pi}{\ell}x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\left\{ \dot{b}_n(t) + \frac{kn^2\pi^2}{\ell^2} b_n(t) - B_n(t)\right\} = 0$$

siccome al variare di n $\left\{\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right\}$ sono linearmente indipendenti dobbiamo imporre:

$$\dot{b}_n(t) + \underbrace{\frac{kn^2\pi^2}{\ell^2}}_{\to\ \xi_n} b_n(t) = B_n(t) \qquad \forall t$$

che rappresenta un'equazione lineare di primo grado non omogenea. La soluzione è trovata facilmente

$$\dot{b}_n(t) + \xi_n b_n(t) = B_n(t) \Rightarrow b_n(t) = k e^{-\xi_n t} + k(t) e^{-\xi_n(t)}$$

dove $k(t)$ è tale che $\dot{k}(t) = e^{\xi_n t} B_n(t)$

$$k(t) = \int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{\xi_n \tau} B_n(\tau)$$

Quindi

$$b_n(t) = k e^{-\xi_n t} + \int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{\xi_n(\tau - t)} B_n(\tau)$$

che per $t \to \infty$ sopravvive soltanto il termine integrale (soluzione stazionaria)

Quindi la soluzione per $u(x,t)$ diviene:

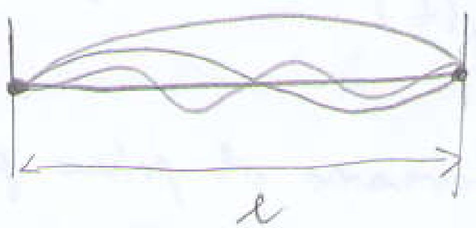
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{t_0}^{t} d\tau \, e^{\xi_n (\tau - t)} B_n(\tau) \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

ma $B_n(\tau)$ sono i coefficienti di Fourier di $F(x,\tau)$.

Da cui se $F(x,\tau) \neq 0 \Rightarrow B_n(\tau) \neq 0 \Rightarrow u(x,t) \neq 0$

EQUAZIONE CORDA VIBRANTE

Consideriamo un sistema costituito da una corda di lunghezza ℓ fissa ai suoi estremi che può soltanto oscillare:



L'equazione che descrive tale fenomeno è

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x,t) = 0$$

Il problema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - k^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x,t) = 0 & 0 \leq x \leq \ell \,,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq \ell \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \ell \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \forall t \end{cases}$$

Notiamo innanzitutto che una qualsiasi funzione (13)
$f(x,t)$ in cui la dipendenza da x e t sia del
tipo $f(x \pm vt)$ è soluzione dell'equazione. Infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\xi}(\xi)(\pm v) \qquad \text{dove} \quad \xi = x \pm vt$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} v^2 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(x \pm vt) = (v^2 - k^2)\frac{d^2 f}{d\xi^2} = 0$$

$v = \pm |k|$. Poiché v è una velocità possiamo concludere che la costante k deve avere le dimensioni di una velocità.

Analizziamo ora applicando lo sviluppo in serie di Fourier ed otteremo come risultato quanto appena anticipato.

Cerchiamo una soluzione $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$X(x)\ddot{T}(t) - v^2 X''(x) T(t) = 0$$

$$\ddot{T}(t)/T(t) = v^2 X''(x)/X(x)$$

Come per l'equazione del calore anche qui ambo i membri devono essere uguali ad una costante. Sia $-\lambda^2$ questa costante.

$$\begin{cases} \ddot{T} + \lambda^2 T = 0 \\ X'' + \frac{\lambda^2}{v^2} X = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(t) = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t \\ X(x) = C \cos \frac{\lambda}{v} x + D \sin \frac{\lambda}{v} x \end{cases}$$

Imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} C = C \cos \frac{\lambda}{v} \ell + D \sin \frac{\lambda}{v} \ell = 0 & (u(0,t) = u(\ell,t) = 0) \\ B\lambda = 0 & (\dot{u}(x,0) = 0) \end{cases}$$

$$C = 0 \ , \quad B = 0 \ , \quad \frac{\lambda}{v} \ell = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi v}{\ell} n$$

Quindi la soluzione $u(x,t)$ assume la forma:

$$u_n(x,t) = D \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) A \cos\left(\frac{\pi v}{\ell} n t\right) \quad \odot$$

$$= K \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \cos\left(\frac{\pi v n}{\ell} t\right)$$

che per note proprietà trigonometriche possiamo riscrivere:

$$u_n(x,t) = \frac{K}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x + \frac{\pi v n}{\ell} t\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x - \frac{\pi v n}{\ell} t\right) \right]$$

$$= \frac{K}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}(x + vt)\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{\ell}(x - vt)\right) \right]$$

quindi abbiamo trovato che $u(x,t)$ può avere come forma un seno il cui argomento è $x \pm vt$.

Ritorniamo alla formula $\odot$.

Dobbiamo ancora soddisfare la condizione

$u(x,0) = f(x)$. Quindi la soluzione più generale sarà la somma di tutte le soluzioni $u_n(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \cos\left(\frac{\pi v n}{\ell} t\right)$$

dove cui:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) = f(x)$$

che come nel caso nella propagazione del calore C_n rappresentano i coefficienti dello sviluppo di Fourier.

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{\pi m x}{\ell}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \, \ell \, \delta_{m,n} = C_m \, \ell$$

$$\Rightarrow C_m = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi m x}{\ell} dx .$$

Quindi C_m rappresenta il peso della particolare onda $\sin\left[\frac{\pi n}{\ell}(x+vt)\right]$. Tale peso è lo stesso anche nel caso $\sin\left[\frac{\pi n}{\ell}(x-vt)\right]$. Possiamo a questo punto affermare che la soluzione più generale può essere scritta come la somma di due profili di onde: una che avanza da sinistra a destra $(x-vt)$ ed una che si muove in verso contrario $(x+vt)$. Quindi

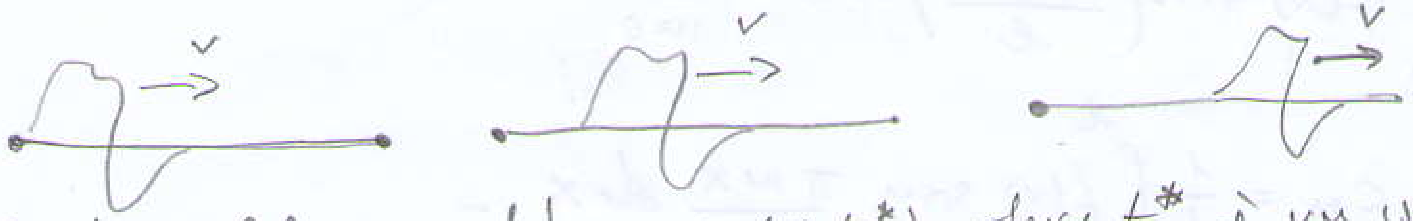
$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x - \omega_n t) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x + \omega_n t)}$$

dove $\quad k_n \doteq \frac{\pi}{\ell} n \quad$ e $\quad \omega_n \doteq \frac{\pi v}{\ell} n$

sono detti vettore d'onda e pulsazione, rispettivamente, della componente n. Alla pulsazione ω_n si suole preferire la frequenza $\nu_n = \left(\frac{v}{2\ell}\right) n$.

Supponendo che la velocità di propagazione sia la stessa ($v = \text{cost}$) la frequenza aumenta quanto più è corta la corda: $\nu \to \infty$ se $\ell \to 0$. Al variare di n si ottengono componenti oscillanti più o meno veloci (cioè con frequenze più o meno grandi).

Un profilo di onda potrebbe essere:



Questo profilo sarebbe $u(x, t^*)$ dove t^* è un istante di tempo scelto. Questo andamento può essere descritto in effetti con una sovrapposizione di onde del tipo

$\sin(k_1 x - \omega_1 t)$, $\sin(k_2 x - \omega_2 t)$, ..., $\sin(k_n x - \omega_n t)$

con gli opportuni pesi $c_1, c_2, \dots, c_n$.