Funzioni

Definizione di funzione:

Siano A e B due insiemi non vuoti. Una **funzione** *f* da A a B è un assegnamento di esattamente un elemento di B ad ogni elemento di A

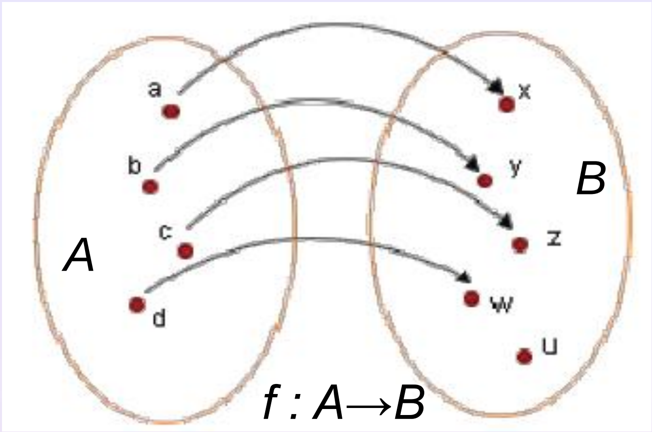
- ✓ Scriviamo $f(a) = b$ se *b* è l'unico elemento dell'insieme B che la funzione *f* associa all'elemento *a* dell'insieme A
- ✓ Per indicare che *f* è una funzione da A a B, scriviamo $f : A \to B$
- ✓ Sinonimi del termine funzione sono *trasformazione, applicazione, mappa.*
- ✓ *Una funzione può essere definita elencando tutti gli assegnamenti da A a B oppure attraverso una formula del tipo* $f(x) = x + 1$

Sia *f* è una funzione da A a B, A è detto **dominio** della funzione *f* mentre B è detto **codominio** di *f*.

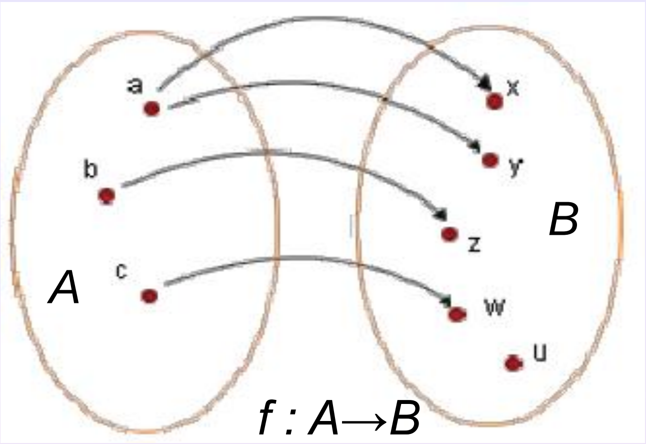
- ✓ Se $f(a) = b$, b è l'**immagine** di a ed a è la **preimmagine** di b
- ✓ Il rango di *f* è l'insieme delle immagini degli elementi di A

Funzioni

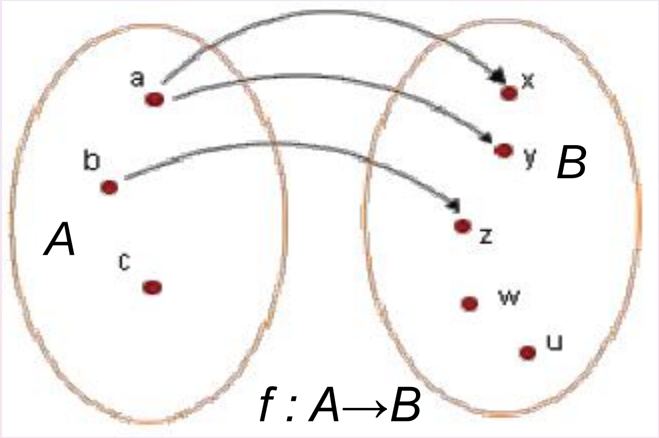
Esempi :



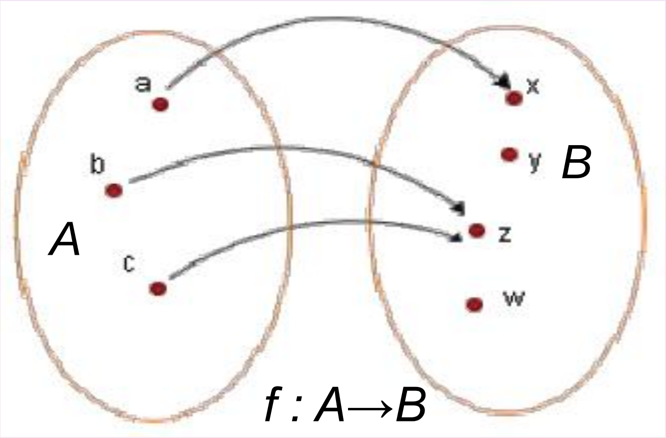
f è una funzione perché ad ogni elemento dell'insieme A corrisponde un solo elemento dell'insieme B



f non è una funzione perché all'elemento a dell'insieme A corrispondono gli elementi x e y dell'insieme B



f non è una funzione perché all'elemento c dell'insieme A non corrisponde nessun elemento dell'insieme B



f è una funzione perché ad ogni elemento dell'insieme A corrisponde un solo elemento dell'insieme B

Funzioni

Esempi :

- ✓ Sia *f* una funzione che data una stringa di bit di lunghezza maggiore di 2, assegna ad essa gli ultimi due bit Es. *f(011010) = 10*
  - Il dominio di *f* è l'insieme di tutte le stringhe di lunghezza maggiore o uguale di 2
  - Il codominio e il rango di *f* è l'insieme {00, 01, 10, 11}

- ✓ Sia $f:\mathbf{Z}\rightarrow\mathbf{Z}$ la funzione che assegna ad ogni numero intero il suo quadrato ($f(x) = x^2$).
  - Il dominio di *f* è l'insieme dei numeri interi
  - Il codominio di *f* è l'insieme dei numeri interi
  - Il rango di *f* è l'insieme dei numeri interi che sono quadrati perfetti {0, 1, 4, 9,…}

Funzioni

Definizioni:

Due funzioni a valori reali possono essere sommate e moltiplicate tra loro

Siano f_1 ed f_2 due funzioni da A ad **R**. Anche f_1+f_2 ed $f_1 f_2$ sono funzioni da A ad **R**, definite da:

- ✓ $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
- ✓ $(f_1 f_2)(x) = f_1(x)\, f_2(x)$

Esempi:

Siano f_1 ed f_2 due funzioni da **R** ad **R** tali che $f_1(x) = x^2$ ed $f_2(x) = x - x^2$

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x)\, f_2(x) = x^3 - x^4$$

Funzioni

Funzioni iniettive:

Una funzione si dice **iniettiva** se e solo se *f(a) = f(b)* implica a = b

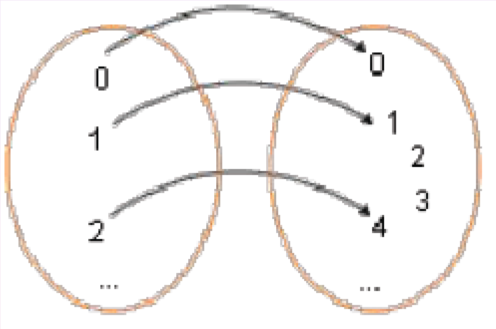
$$\forall a, \forall b \quad (f(a) = f(b) \rightarrow a = b)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall a, \forall b \quad (a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b))$$

Esempi:

- ✓ Sia ***f:N→Z*** la funzione che assegna ad ogni numero naturale il suo quadrato *(f(x) = x^2)*



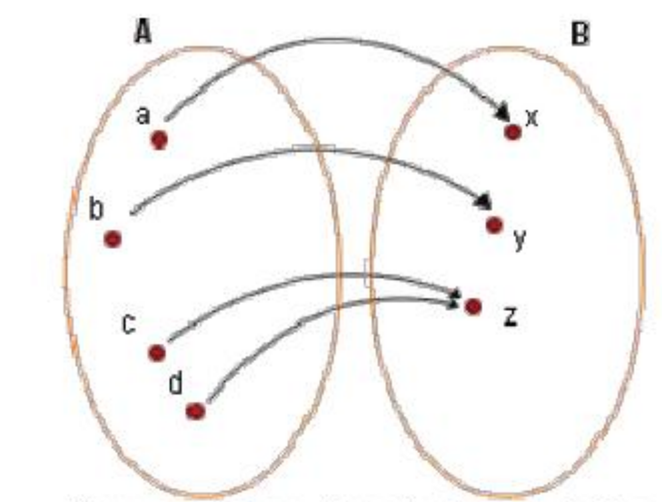
f è *iniettiva*. Infatti ogni numero naturale x elevato al quadrato dà un numero naturale *y* ma non è vero il contrario, ossia non tutti i numeri naturali sono il quadrato di un numero naturale

- ✓ Sia ***f:Z→Z*** la funzione che assegna ad ogni numero *intero* il suo quadrato *(f(x) = x^2)*
  - *f non è iniettiva* perché *f(1) = f(-1) = 1*

Funzioni

Funzioni suriettive:

Una funzione definita in A e a valori in B, si dice **suriettiva** se e solo se per ogni *b є B* c'è un elemento in *a є A* con *f(a) = b*.



Rappresentazione di una funzione **suriettiva**

$$\forall b \in B\ \exists a \in A\ \ (f(a) = b)$$

Esempi:

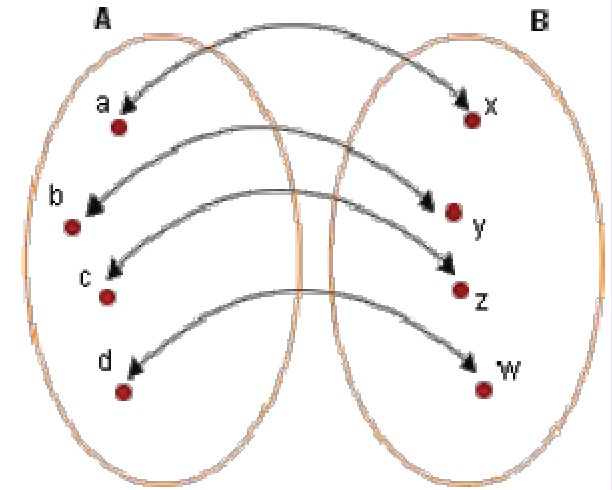
- ✓ Sia *f:**Z**→**Z*** la funzione che assegna ad ogni numero *intero* il suo quadrato ($f(x) = x^2$)
  - *f non è suriettiva* perché non esiste alcun numero intero tale che $x^2 = -1$

- ✓ Sia *f:**Z**→**Z*** la funzione che assegna ad ogni numero *intero* il suo successivo ($f(x) = x + 1$)
  - *f è suriettiva* perché per ogni intero y esiste un intero x = y – 1 tale che $f(x) = y$

Funzioni

Funzioni biunivoche:

Una funzione definita in A e a valori in B, si dice **biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva ossia se ad ogni elemento dell'insieme "di partenza" A corrisponde uno ed un solo elemento dell'insieme "di arrivo" B, e viceversa ad ogni elemento di B corrisponda uno ed un solo elemento di A. Una funzione biiettiva viene anche detta biunivoca (o corrispondenza biunivoca).



Rappresentazione di una funzione **biiettiva**

Esempi:

✓ Sia *f:**Z**→**Z*** la funzione che assegna ad ogni numero *intero* il suo successivo ($f(x) = x + 1$)

- *f è biunivoca* perché è sia suriettiva che iniettiva.

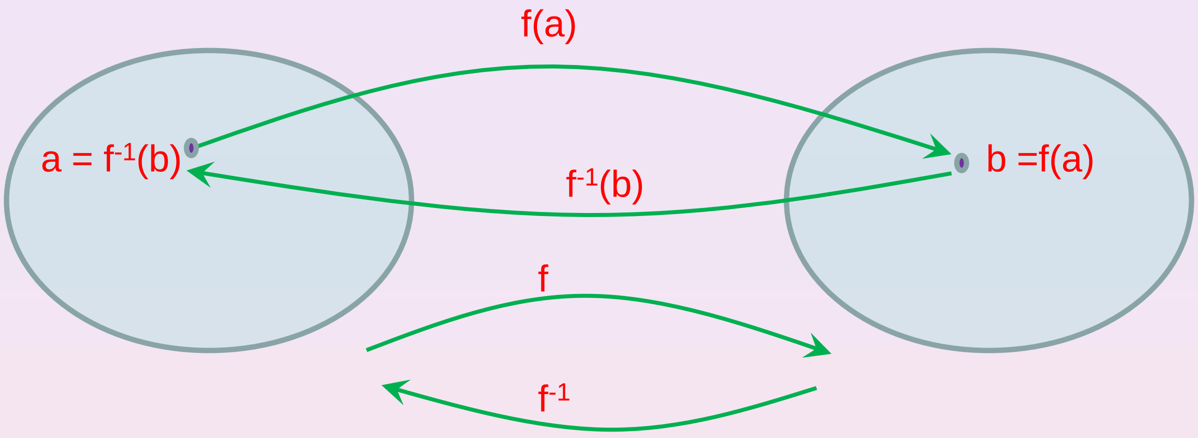
✓ La funzione "x è la capitale di y" con dominio l'insieme A delle città capitali e codominio l'insieme B delle nazioni è biiettiva .

Funzioni

Funzioni inverse:

Sia *f* una corrispondenza biunivoca dall'insieme A all'insieme B. La **funzione inversa** di *f* è la funzione che assegna ad ogni elemento b є B, l'unico elemento a є A tale che $f(a) = b$.

- ✓ la funzione inversa di *f* si indica con f^{-1}
- ✓ $f^{-1}(b) = a$ se e solo se $f(a) = b$



Funzioni

Funzioni invertibili:

Una funzione *f* si dice **invertibile** se è iniettiva e suriettiva e quindi esiste la sua funzione inversa.

Esempi:

✓ Sia $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ la funzione che assegna ad ogni numero *intero* il suo successivo ($f(x) = x + 1$)

- *f è biunivoca* perché è sia suriettiva che iniettiva quindi è invertibile
- *supponiamo che* y *sia l'immagine di* x, *abbiamo* $y = x + 1$ *e quindi* $x = y - 1$. *Questo significa che* $f^{-1}(y) = y-1$

✓ Sia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione che assegna ad ogni numero *reale* il suo quadrato ($f(x) = x^2$)

- poiché $f(-2) = f(2) = 4$, *f* non è iniettiva e quindi non è invertibile

✓ Se restringiamo il dominio della funzione *f* all'insieme dei numeri reali positivi $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ *con* $f(x) = x^2$

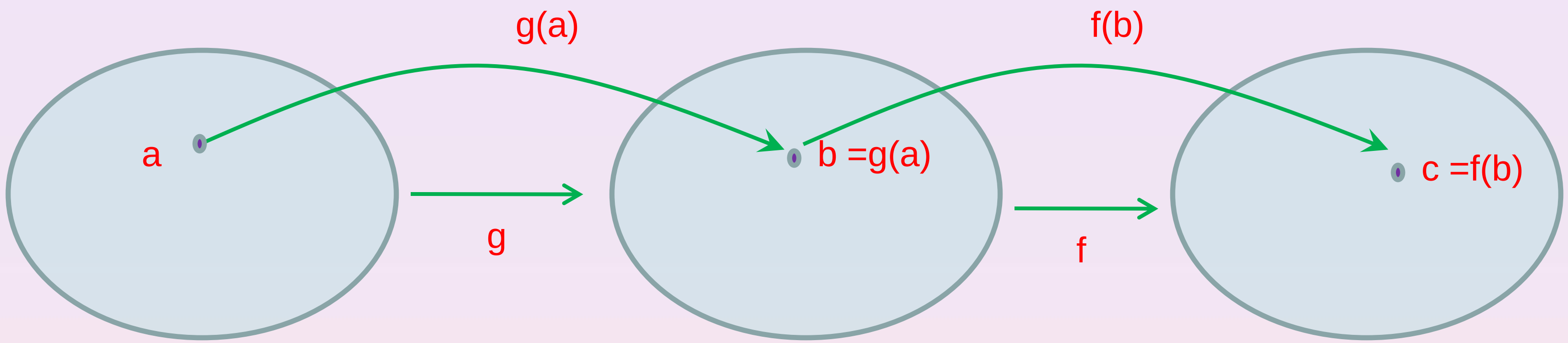
- *f* è invertibile ed è $f^{-1}(y) = \sqrt{x}$

Funzioni

Funzioni composte:

Sia *g* una funzione dall'insieme A all'insieme B e sia *f* una funzione definita in B ed a valori nell'insieme C. La composizione delle funzioni *f* e *g*, indicata con $f \circ g$, è definita da:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$



Funzioni

Esempi di funzioni composte:

- ✓ Siano $f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ e $g:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ due funzioni definite dalle epressioni: $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 3x + 2$
  - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$
  - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$

- ✓ Si $f:A\rightarrow B$ una funzione biunivoca
  - f^{-1} esiste ed è una funzione biunivoca da B ad A
  - $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$
  - $(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$

Funzioni

Le funzioni *floor* e *ceil*:

La funzione *floor* assegna ad ogni numero reale *x* il *più grande numero intero minore o uguale* ad *x*. Il valore della funzione *floor* applicata al numero *x* è indicato con $\lfloor x \rfloor$

La funzione *ceil* assegna ad ogni numero reale *x* il *più piccolo numero intero maggiore o uguale* ad *x*. Il valore della funzione *ceil* applicata al numero *x* è indicato con $\lceil x \rceil$

Esempi:

$$\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1 \quad \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 \quad \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor = -1 \quad \left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 0$$

$$\lfloor 3.1 \rfloor = 3 \quad \lceil 3.1 \rceil = 4 \quad \lfloor 6 \rfloor = 6 \quad \lceil 6 \rceil = 6$$

Funzioni

La funzioni *fattoriale*:

La funzione *fattoriale f:N→Z+ indicata con f(n) = n!, è il prodotto dei primi n numeri interi positiviquindi:*

f(1) = 1! = 1 *f(2) = 2! = 1 · 2 = 2* *f(6) = 6! = 1·2·3·4·5·6 = 720*

f(20) = 2.432.902.008.176.640.000

Formula di Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(n/\varepsilon\right)^{n}$$

il simbolo ~ indica che asintoticamente, per n che tende all'infinito i due termini tendono ad essere uguali

La retta reale

La retta reale e la retta Euclidea

E_1 *(*retta euclidea*) ed* ***R*** *(insieme dei numeri reali) godono di proprietà molto simili che consentono di stabilire una* **biiezione** *tra punti e numeri reali*

- *in* ***R*** *vale la legge di* ***tricotomia****:*

  se x e y sono due numeri reali, si ha una sola delle seguenti eventualità

  $$x < y, \qquad x = y, \qquad x > y$$

- *la retta* ***E_1*** *può essere orientata e quindi stabilire una relazione d'ordine tra i punti della retta che gode della proprietà di tricotomia*

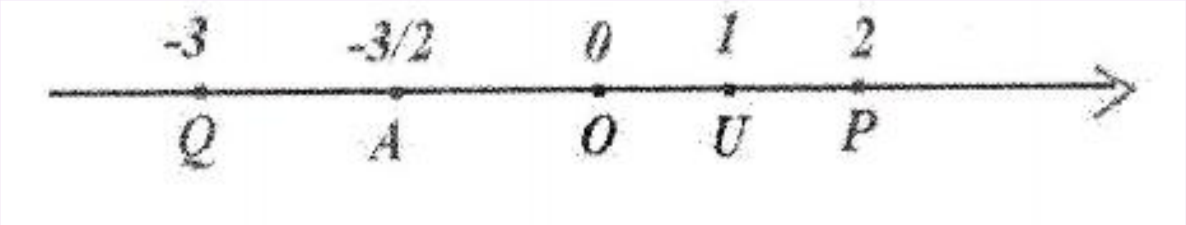
- *comunque si considerano due numeri reali x e y con x < y, esiste un numero reale z tale che x < z < y*

- *comunque si considerano due punti A e B sulla retta, esiste un punto P diverso da A e da B che appartiene al segmento [A,B]*

La retta reale

La retta reale e la retta Euclidea

- ✓ consideriamo una retta e scegliamo su di essa un ***riferimento***, cioè due punti distinti ***O*** ed*U*, ed *orientiamo* la retta da ***O*** a ***U***
- ✓ associamo il numero ***0*** ad ***O*** ed il numero ***1*** ad ***U***
- ✓ al generico punto ***P*** associamo il *rapporto* tra la misura di ***OP*** e la misura di ***OU***

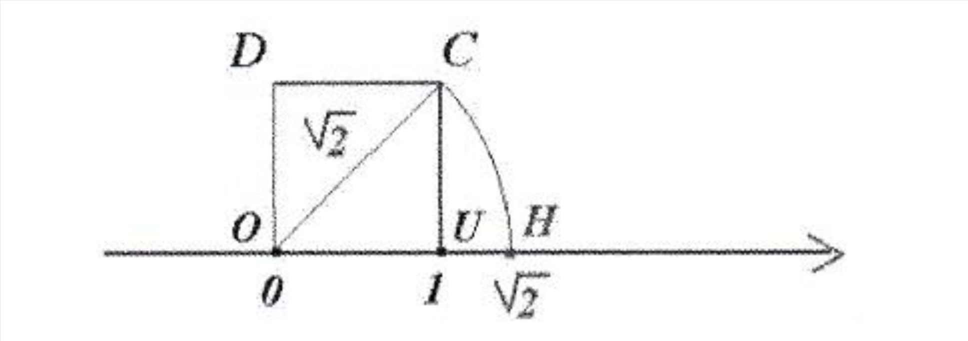


La retta reale

La retta reale e la retta Euclidea

- ✓ se i segmenti ***OP*** ed ***OU*** sono *commensurabili* cioè il rapporto delle loro misure è espresso da un numero razionale, a ***P*** corrisponde un numero *razionale*.

- ✓ esistono però *segmenti incommensurabili*, ciò significa che sulla retta esistono punti cui è necessario associare nuovi numeri detti irrazionali.



La retta reale

La retta reale e la retta Euclidea

*La biiezione **f:E$_1$ → R** si definisce nel modo seguente:*

- ✓ per ogni punto ***P*** di ***E$_1$*** si pone *f(**P**)=x* dove x indica il rapporto tra le misure di ***OP*** e di ***OU***

- ✓ la corrispondenza ***f*** dipende dalla scelta del riferimento ***(O,U)*** e prende il nome di *sistema coordinato relativo al riferimento*

$$f:[O,U]\to\mathbf{R}$$

- ✓ se si cambia *riferimento* cambia la *corrispondenza biunivoca*

Il Piano Cartesiano

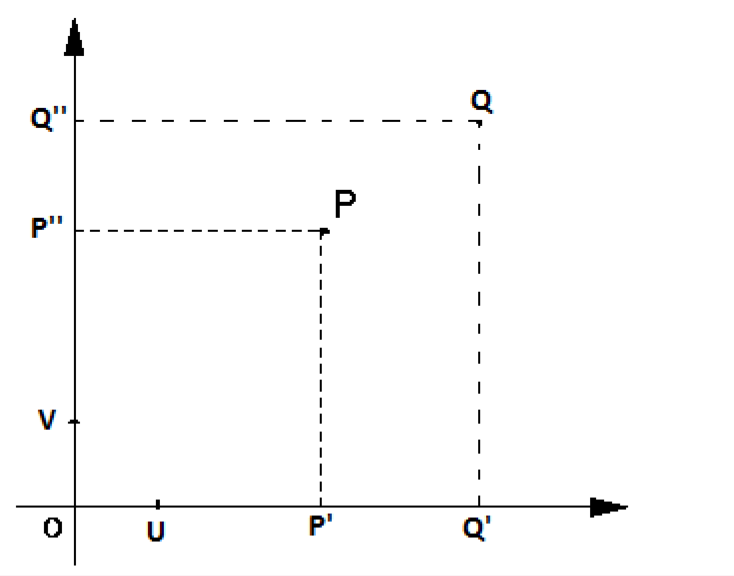
Riferimento Cartesiano e Piano Cartesiano

Un ***riferimento cartesiano*** è costituito da due rette perpendicolari con la scelta, su ciascuna di esse di un sistema coordinato ***(OU)*** ed ***(OV)***

Un piano con un fissato riferimento cartesiano è detto ***piano cartesiano***

Indicando con ***E_2*** *il piano, si stabilisce una corirspondenza biunivoca che associa ad ogni punto del piano una copia di numeri reali (x,y)*

$$h : E_2 \to \mathbf{R}^2$$



Distanza tra P e Q

$$|P-Q| = \sqrt{(P'-Q')^2 + (P''-Q'')^2}$$

Funzioni Reali

Siano $S, T \subseteq \mathbf{R}$ due sottoinsiemi non vuoti dell'insieme dei numeri reali

$f : S \to T$ è detta ***funzione reale di variabile reale***

L'insieme

$$R_f = \left\{ y \in T \ | \ \exists x \in S : \ y = f\left(x\right) \right\}$$

è detto ***immagine di f***

L'insieme

$$G_f = \left\{ \left(x, y\right) \in S \times T \ | \ y = f\left(x\right) \right\}$$

è detto ***grafico di f***

Fissato un *sistema di riferimento cartesiano nel piano*, il grafico di *f* si identifica con il *sottoinsieme di punti del piano i cui punti hanno come coordinate le coppie ordinate appartenenti al grafico di f*

Funzioni Reali

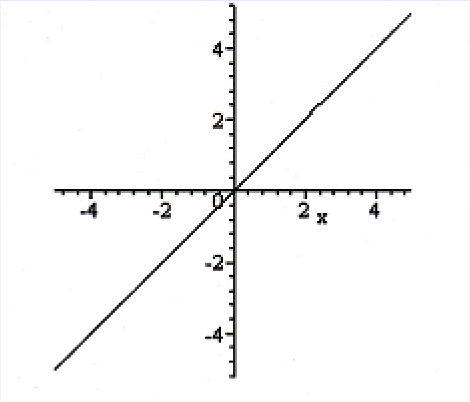
Esempi di funzioni reali

✓ La funzione $i_R : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita come segue

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad i_R(x) = x$$

è detta *funzione identità*

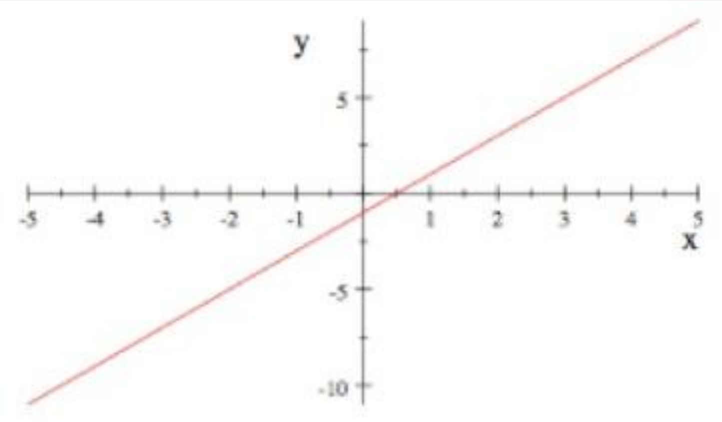
$$G_{i_R} = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \; y = x \right\}$$



✓ Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che

$$\forall \in \mathbf{R} \quad f(x) = 2x\text{-}1$$

$$G_f = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \; y = 2x - 1 \right\}$$



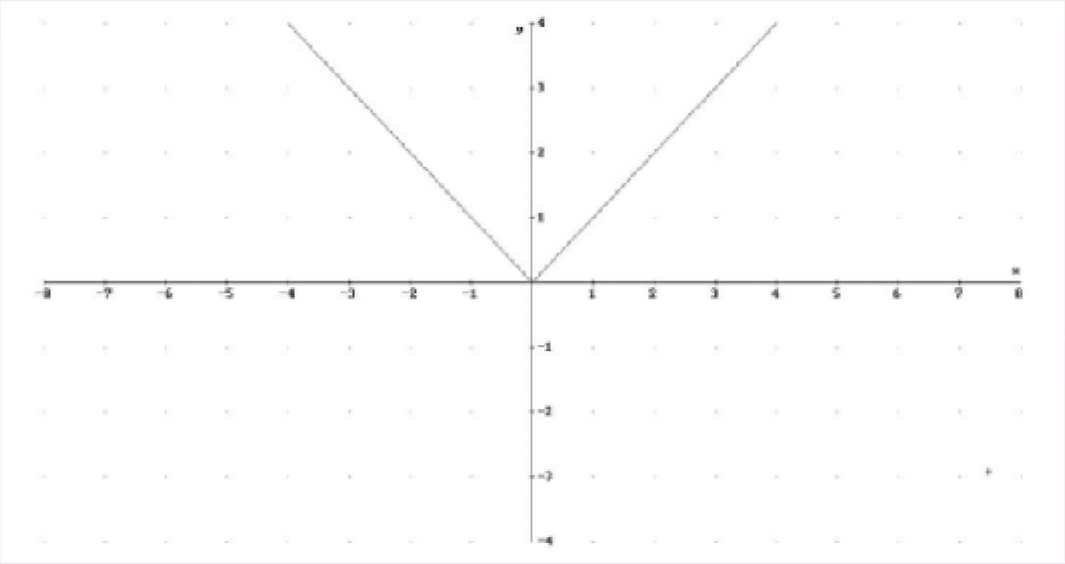
Funzioni Reali

Esempi di funzioni reali

✓ la funzione $\left|\cdot\right|: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definita come

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

è detta funzione ***valore assoluto***



Funzioni Reali

Esercizio

Stabilire se le seguenti coppie di funzioni reali sono uguali o meno

$$f_1 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad f_1(x) = |x|$$

$$g_1 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad \mathrm{g}_1(x) = x$$

$$f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad f_2(x) = |x|$$

$$g_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad \mathrm{g}_2(x) = x$$

$$f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad f_1(x) = |x|^2$$

$$g_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad \mathrm{g}_1(x) = x^2$$

$$f_4 : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad f_4(x) = -|x|$$

$$g_4 : \mathbf{R}_- \to \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad \mathrm{g}_4(x) = x$$

Funzioni Reali

Osservazione

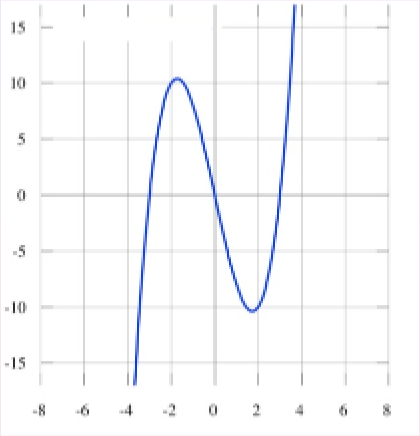
Non è affatto vero che, dati due sottoinsiemi $S,T \subseteq \mathbf{R}$

un qualsiasi sottoinsieme del loro prodotto cartesiano $G \subset S \times T \subseteq \mathbf{R}^2$

sia il grafico di una funzione reale di variabile reale

Esempi

Il seguente grafico:



rappresenta una funzione reale

Funzioni Reali

Osservazione

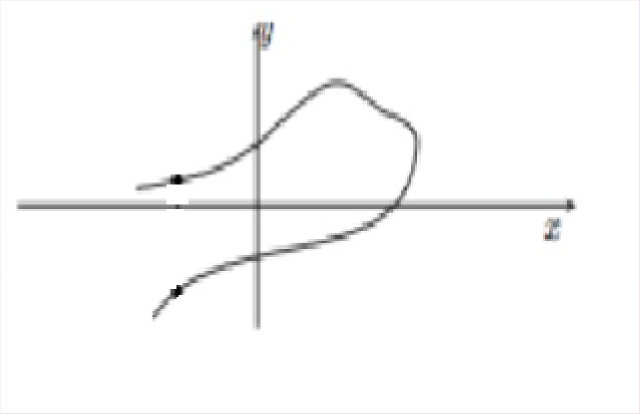
Non è affatto vero che, dati due sottoinsiemi $S, T \subseteq \mathbf{R}$

un qualsiasi sottoinsieme del loro prodotto cartesiano $G \subset S \times T \subseteq \mathbf{R}^2$

sia il grafico di una funzione reale di variabile reale

Esempi

Il seguente grafico:



non rappresenta alcuna funzione reale

Funzioni Reali

Osservazione

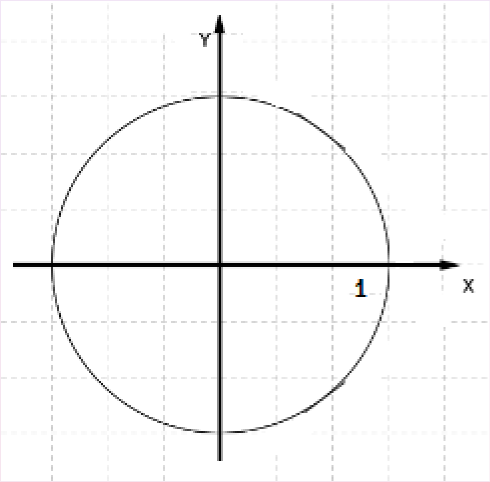
Non è affatto vero che, dati due sottoinsiemi $S, T \subseteq \mathbf{R}$

un qualsiasi sottoinsieme del loro prodotto cartesiano $G \subset S \times T \subseteq \mathbf{R}^2$

sia il grafico di una funzione reale di variabile reale

Esempi

Consideriamo l'insieme $G = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$



non è il grafico di una funzione perché per ogni $-1 < x < 1$

abbiamo due diversi valori di y

Funzioni Reali

Definizioni fondamentali

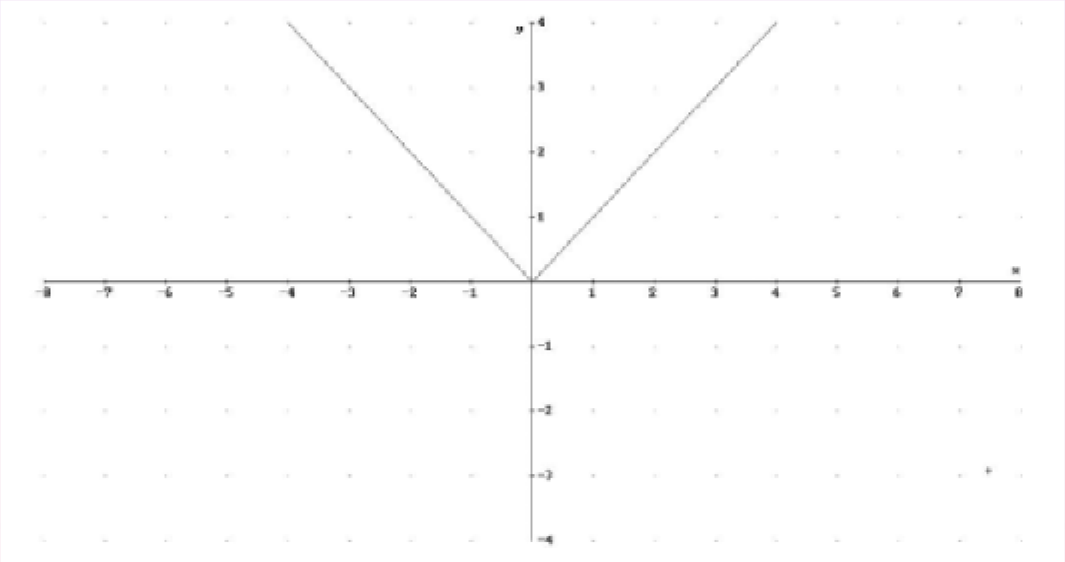
Funzioni pari:

*Una funzione f è detta **pari** se*

$$\forall x \in S: \quad -x \in S$$

$$\forall x \in S: \quad f(-x) = f(x)$$

La funzione ***valore assoluto è una funzione pari***



Funzioni Reali

Definizioni fondamentali

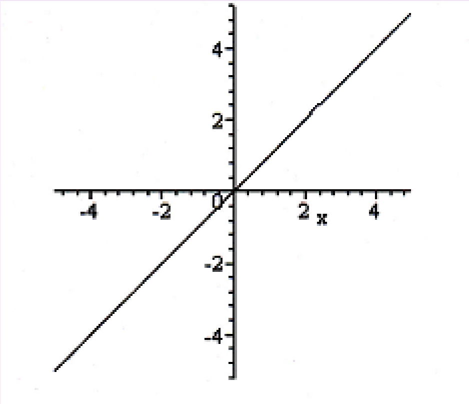
Funzioni dispari:

*Una funzione f è detta **dipari** se*

$$\forall x \in S: \quad -x \in S$$

$$\forall x \in S: \quad f(-x) = -f(x)$$

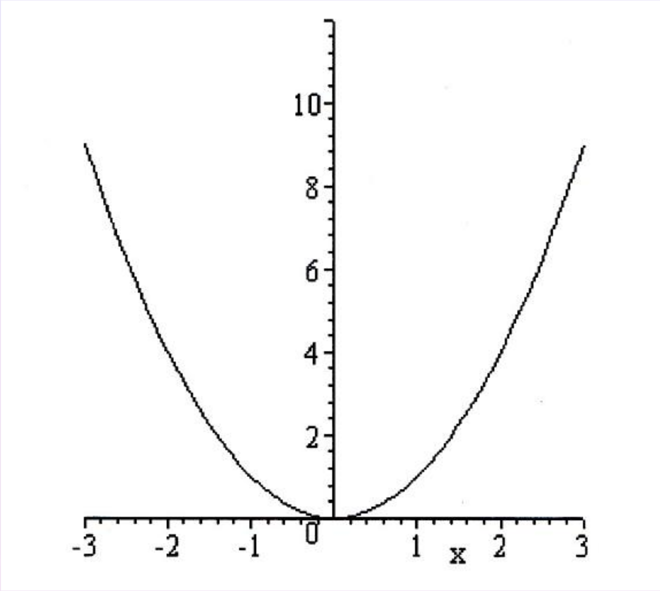
La funzione ***identità è una funzione dispari***



Funzioni Reali

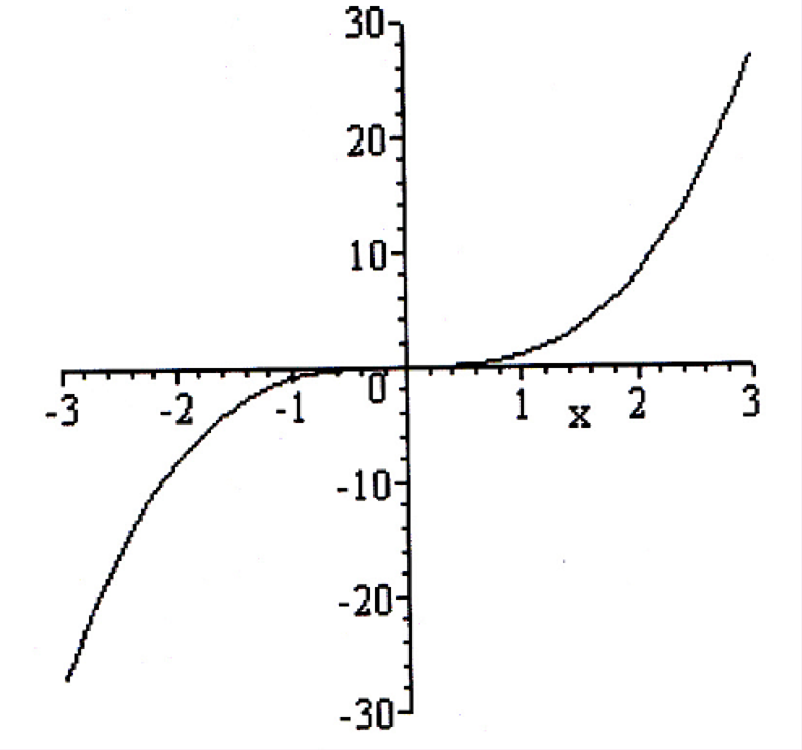
Esempi

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}:\ f(x)=x^2$$



è una funzione pari

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}:\ f(x)=x^3$$



è una funzione dipari

Funzioni Reali

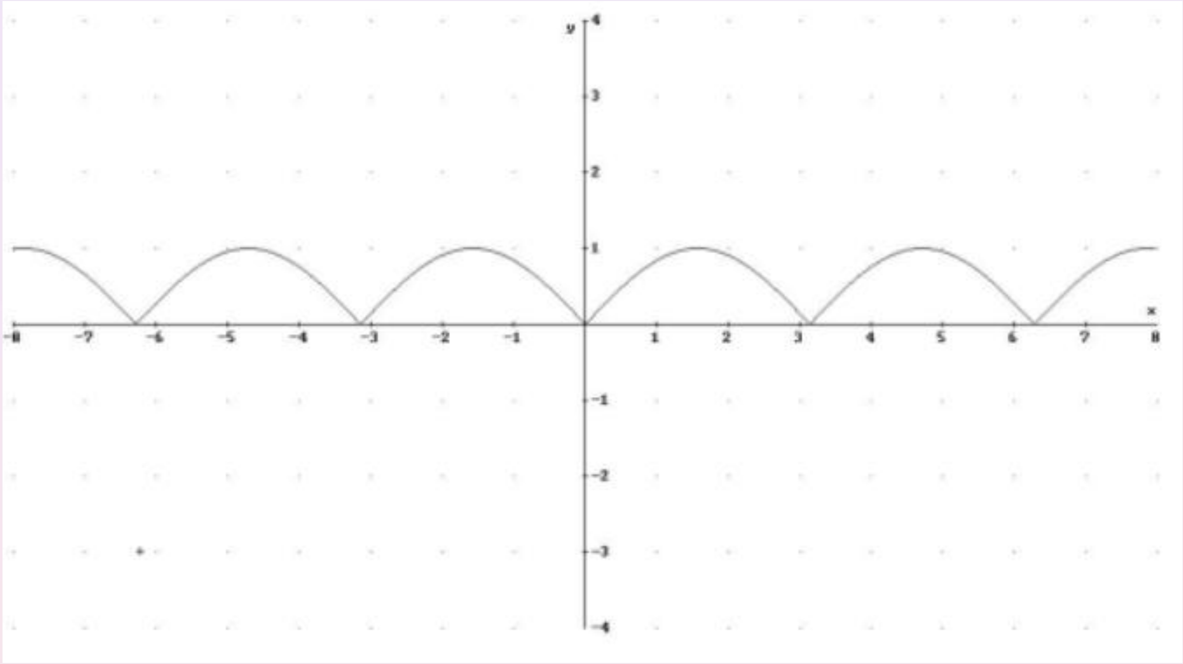
Definizioni fondamentali

Funzioni periodiche:

Una funzione $f : S \to T$ *è detta* ***periodica*** *di periodo p > 0* se

$$\forall x \in S: \quad x + p \in S \;\wedge\; x - p \in S$$

$$\forall x \in S: \quad f(x+p) = f(x) = f(x-p)$$



Funzioni Reali

Funzioni monotone

Siano $S, T \subseteq \mathbf{R}$ due *sottoinsiemi non vuoti* dell'insieme dei numeri reali

e sia $f : S \to T$

Si dice che *f* è una funzione *monotona crescente* se

$$\forall x, y \in S: \quad x < y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y)$$

Si dice che *f* è una funzione *monotona strettamente crescente* se

$$\forall x, y \in S: \quad x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y)$$

Si dice che *f* è una funzione *monotona decrescente* se

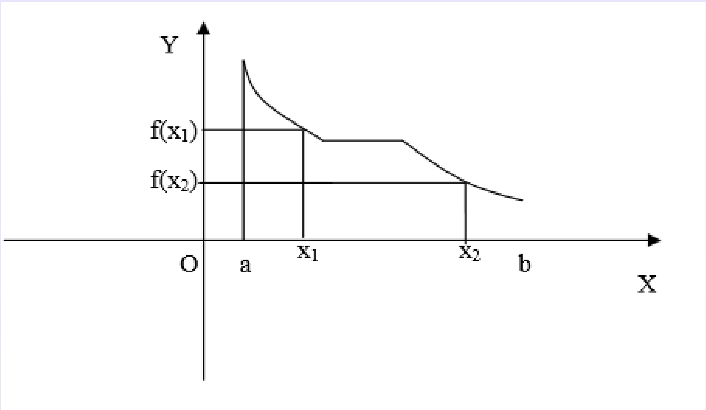
$$\forall x, y \in S: \quad x < y \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(y)$$

Si dice che *f* è una funzione *monotona strettamente decrescente* se

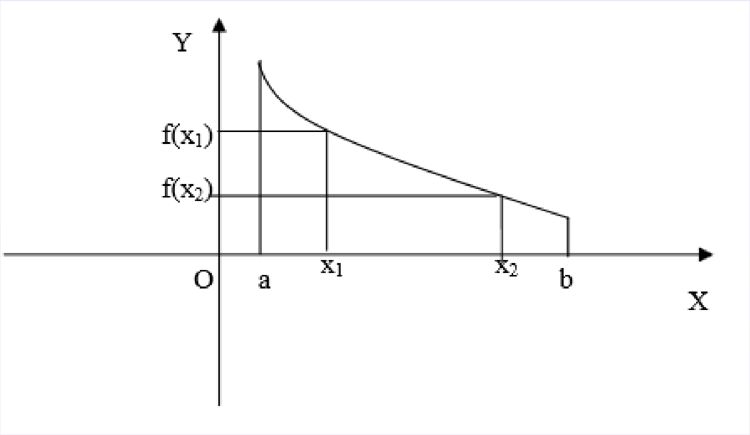
$$\forall x, y \in S: \quad x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y)$$

Funzioni Reali

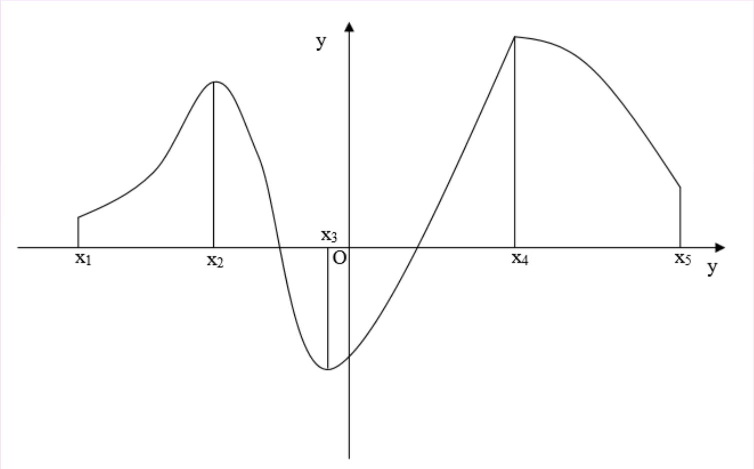
Funzioni monotone



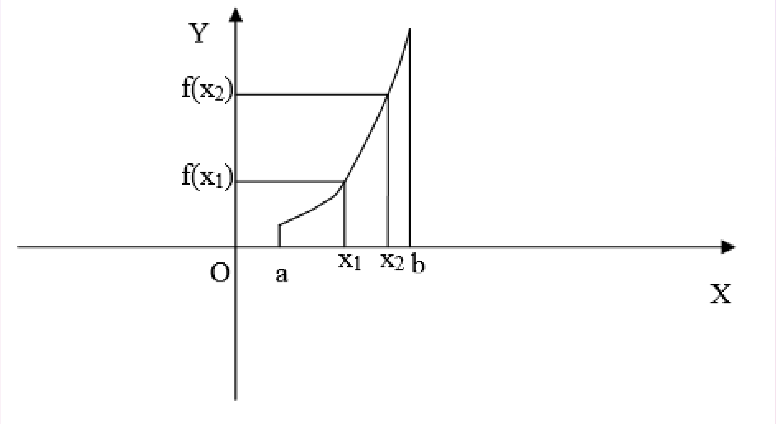
funzione monotona decrescente



funzione monotona strettamente decrescente



funzione non monotona



funzione monotona strettamente crescente

Funzioni Reali

Funzioni elementari

Alcune funzioni reali di variabili reali sono dette ***funzioni elementari***.

Questa denominazione deriva dal fatto che tutte le altre funzioni di uso più comune si ottengono da queste *tramite operazioni algebriche e dicomposizione*.

Le ***funzioni elementari*** si dividono in tre gruppi:

- funzioni ***potenza*** con esponente intero
- funzioni ***esponenziali*** e ***logaritmiche***
- funzioni ***circolari***

Funzioni Reali

Funzione potenza

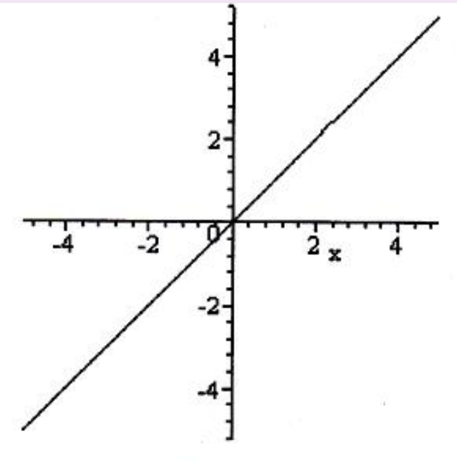
Dati $x \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 1$ si definisce *potenza n-esima* di *x* il numero *reale*

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n volte}}$$

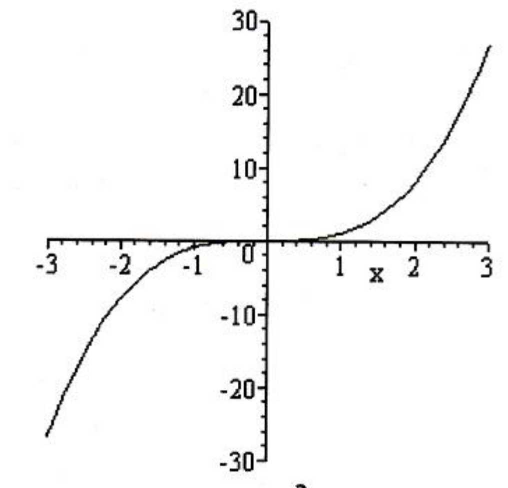
Fissato $n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 1$ la funzione *potenza n-esima* è definita come

$$f : R \rightarrow R : \qquad \forall x \in R \mid \; f(x) = x^n$$

Per *n dispari* la *funzione potenza* è una *funzione dispari*



f(x)=x



$f(x) = x^3$

Funzioni Reali

Funzione potenza

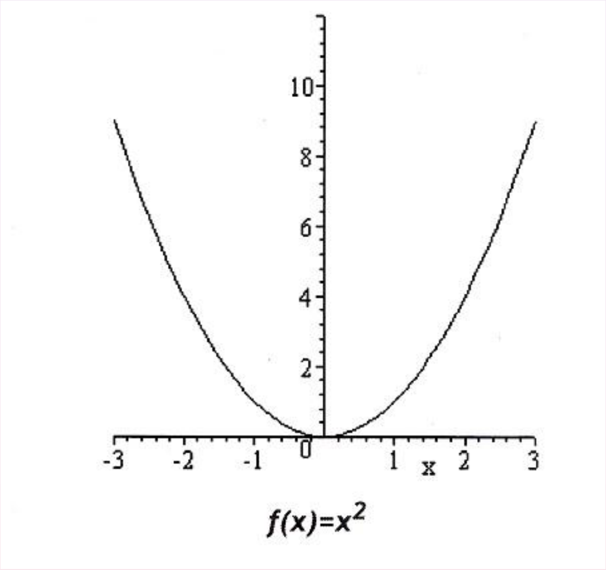
Dati $x \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 1$ si definisce *potenza n-esima* di *x* il numero *reale*

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n volte}}$$

Fissato $n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 1$ la funzione *potenza n-esima* è definita come

$$f : R \rightarrow R : \qquad \forall x \in R \mid \; f(x) = x^n$$

Per *n pari* la *funzione potenza* è una *funzione pari*



Funzioni Reali

Funzione radice n-esima

Dati $x \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 1$

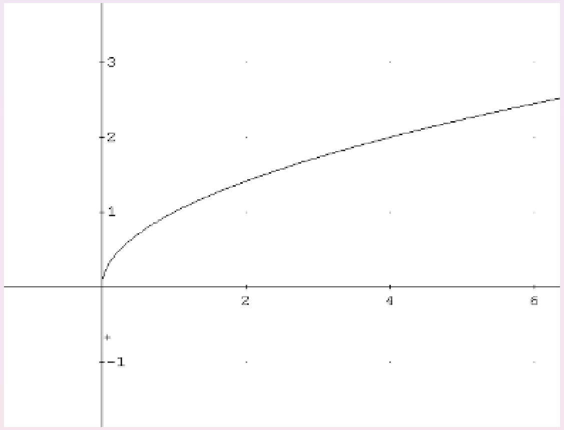
si definisce *radice n-esima* di *x e si indica con* $\sqrt[n]{x}$

il numero reale che elevato alla potenza ennesima ci restituisce *x*

Per n pari

La funzione radice n-esima è definita sull'insieme dei numeri reali positivi

$$\sqrt[n]{\ } : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} \ : \qquad \forall x \in \mathbf{R}_+ \mid \ \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$



Funzioni Reali

Funzione radice n-esima

Dati $x \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 1$

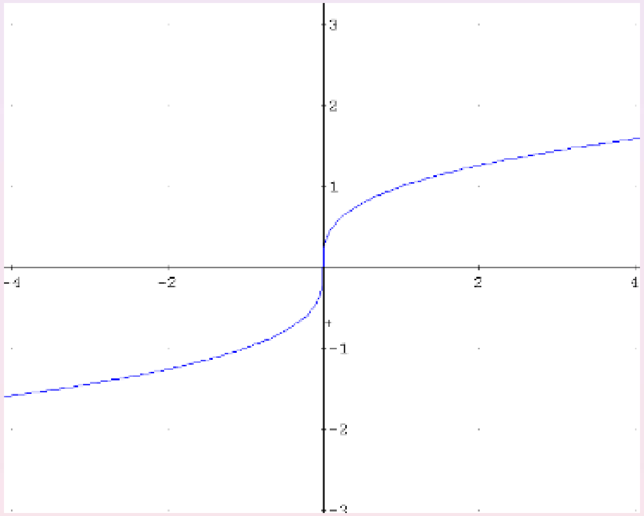
si definisce *radice n-esima* di *x e si indica con* $\sqrt[n]{x}$

il numero reale che elevato alla potenza ennesima ci restituisce *x*

Per n dispari

La funzione radice n-esima è definita su tutto l'nsieme dei numeri reali

$$\sqrt[n]{\;} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \; : \qquad \forall x \in \mathbf{R} \,|\, \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$



Funzioni Reali

Funzione radice n-esima

Osservazione:

Se n è pari, abbiamo che

$$\forall x \geq 0 \qquad \sqrt[n]{x^n} = x$$

In realtà il primo membro di questa uguaglianza ha senso per ogni $x \in \mathbf{R}$
in quanto $x^n \geq 0$

Sussiste allora la seguente ralzione

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \sqrt[n]{x^n} = |x|$$

Equazioni

Si definisce ***equazione*** un'*uguaglianza tra due espressioni* che contengono *una o più variabili*, generalmente indicate con le lettere *x,y,z,…*

(*Per semplcità ci limiteremo a trattare equazioni fino a 3 variabili*)

Esempi:

$2x+1=4$ Una soluzione

$3x^2-12=0$ due soluzioni

$x+2y-3=0$ Infinite soluzioni

$(x-1)^2+(y+1)^2=9$ Infinite soluzioni

$2^y+3^x=17$ Infinite soluzioni

$x^2+y^4=-3$ Nessuna soluzione

$3z=x^2-y^2$ Infinite soluzioni

Ciascun *punto*, coppia o terna, di ***R***, ***R***^{2}, ***R***^{3} che soddisfa un'assegnata *equazione* prende il nome di ***soluzione***.

Ogni equazione può ammettere *una o più soluzioni* eventualmente *infinite*, così come potrebbe *non ammetterne alcuna*.

Equazioni

Interpretazione geometrica

Alle *variabili* di una equazione si possono associare le *coordinate di un punto* che si trova:

1. *sulla retta se è presente la sola variabile x*
2. *nel piano se sono presenti x e y*
3. *nello spazio se sono presenti x,y e z*

Un equazione identifica un sottoinsieme della retta, del piano o dello spazio: l'insieme dei punti le cui coordinate verificano l'equazione

Un minimo di formalizzazione:

Se *f* e *g* sono due *funzioni reali* di *una o più variabili reali*, una generica equazione si può scrivere nella forma:

$$f = g \qquad oppure \qquad h = (f - g) = 0$$

Due equazioni si dicono *equivalenti* se i due *insiemi di soluzioni coincidono*

Equazioni

Manipolazioni di equazioni

Per *risolvere* un’equazione si possono effettuare operazioni algebriche allo scopo di ottenere un’*equazione equivalente* ma semplice da risolvere, in particolare:

- Si può *spostare un termine* da un membro all’altro a condizione di *cambiarlo di segno*

- Si possono *moltiplicare i due membri* di un’equazione per *uno stesso numero* purchè *diverso da 0*

$$4x - 1 = 2x - 5 \longrightarrow \quad 2x = -4 \quad \longrightarrow \quad x = -2$$

Equazioni

Interpretazione geometrica (funzioni in un’unica incognita)

Siano *f* e *g* due funzioni reali di una variabile reale:

- Risolvere l’equazione $f(x)= 0$ vuol dire determinare l’ascissa dei punti in cui il grafico di *f* taglia l’asse delle *x*
- Risolvere l’equazione $f(x)= g(x)$ vuol dire determinare l’ascissa dei punti in cui il grafico di *f* incrocia il grafico di *g*

Approcci risolutivi:

1. ***Risoluzione analitica***: applicazione di una *formula* che fornisce la o le soluzioni
2. ***Risoluzione qualitativa****:* determinazione dell’*esistenza* e del *numero di soluzioni* ed eventualmente della loro *collocazione in certi intervalli* anziché altri; richiede a priori la conoscenza del *grafico di f*
3. ***Risoluzione numerica****:* applicazione di qualche *procedura*, generalmente *ripetitiva*, affidata al calcolatore che fornisce una *soluzione approssimata*

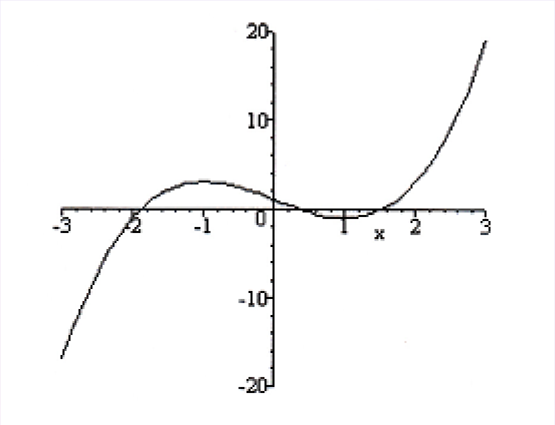
Equazioni

Esempio

Risolvere l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$

1. ***Approccio analitico***: formula di Cardano

2. ***Approccio qualitativo:*** dal grafico di $f(x) = x^3 - 3x + 1$



si ricava che l'equazione ammette 3 soluzioni appartenenti agli intervalli

$$\left]-\infty, -1\right[\qquad \left]-1, 1\right[\qquad \left]1, \infty\right[$$

3. ***Approccio numerico***: utilizzando un programma di calcolo si ottengono le seguenti soluzioni

$$x_1 = -1,879 \qquad x_2 = 0,347 \qquad x_3 = 1,532$$

Equazioni

Esempio

Risolvere l'equazione $x^4 + 4x^2 + 4 = 0$

Approccio analitico:

Ponendo $x^2 = y$ si ottiene

$$y^2 + 4y + 4 = 0 \longrightarrow y_{1/2} = -2 \longrightarrow x^2 = -2$$ *impossibile*

Risoluzione di un'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Funzioni Reali

Elevamento a potenza con esponente reale

Proviamo a dare significato all'espressione

$$a^x \quad con \quad a \in \mathbf{R}_+ \quad e \quad r \in \mathbf{R}$$

✓ *r numero razionale*

$$r = \frac{m}{n} \quad con \quad m \in \mathbf{Z}, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$$

per definizione si pone

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}$$

nel caso in cui m < 0 si pone $a^m = \left(\frac{1}{a}\right)^{-m}$

Funzioni Reali

Proprietà dell'elevamento a potenza

Siano $a, b \in \mathbf{R}: \quad a \geq 0 \quad b \geq 0$

$$\forall r \in \mathbf{Q} \qquad a^r \geq 0$$

$$\forall r \in \mathbf{Q} \qquad a^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}$$

$$\forall r, s \in \mathbf{Q} \qquad \left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$$

$$\forall r \in \mathbf{Q} \qquad \left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$$

*Dalla densità di **Q** in **R** e dalla completezza di **R** segue che si può dare significato al simbolo* a^x *per ogni numero reale* $a \geq 0$ *e per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *in modo tale che le proprietà elencate continuino a valere*

Funzioni Reali

Funzione esponenziale di base a

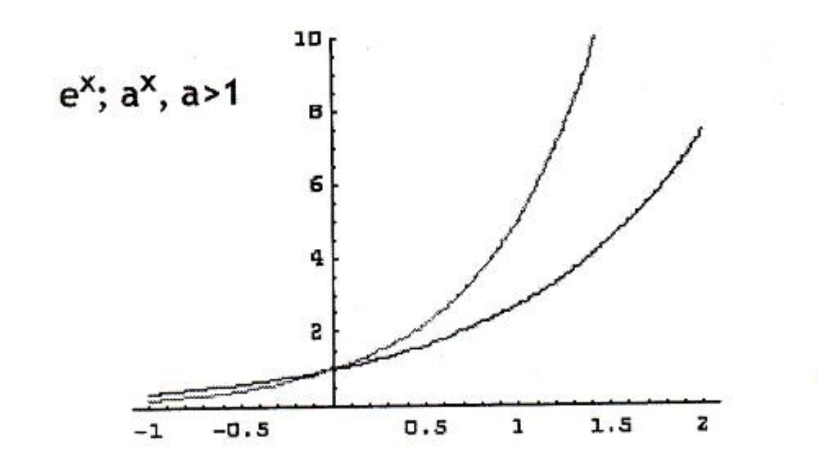
Fissato un numero reale $a > 0 \quad a \neq 1$

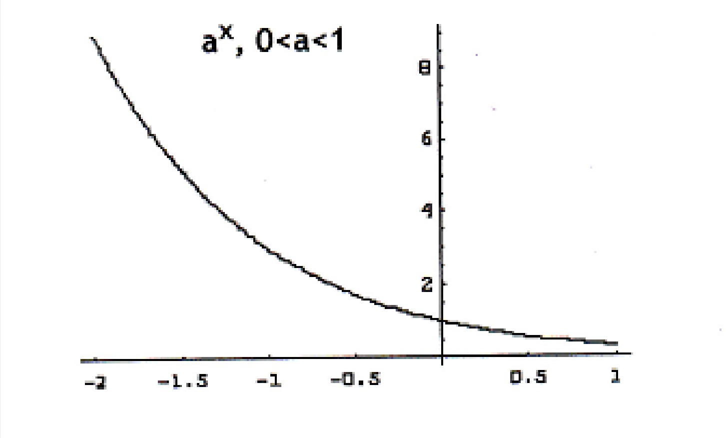
Si definisce funzione esponenziale di base a la funzione

$$f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+ \quad \textit{tale che} \quad \forall x \in \mathbf{R} : f_a(x) = a^x$$

La funzione esponenziale di *base* ***e*** (*numero di Nepero*) è detta semplicemente *funzione esponenziale* ed è talvolta indicata come *exp(x)*

f_a è *strettamente crescente* se *a>1*, *strettamente decrescente* se 0<a<1





Funzioni Reali

Logaritmi

Il ***logaritmo*** è in sostanza l'operazione *inversa* dell'*elevamento a potenza*

Il ***logaritmo*** di un numero è l'esponente da dare alla base per ottenere il numero dato

Esempi:

Logaritmo di 81 base 9

$$\log_9(81) = 2 \qquad 9^2 = 81$$

Logaritmo di 3 base 9

$$\log_9(3) = {}^1\!/_2 \qquad 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = 3$$

Funzioni Reali

Logaritmi

Il ***logaritmo*** è in sostanza l'operazione *inversa* dell'*elevamento a potenza*

Il ***logaritmo*** di un numero è l'esponente da dare alla base per ottenenre il numero dato

Così come abbiamo definito l'operazione di esponenziale $\forall x \in \mathbf{R}$

definiamo l'operazione $\log_b(x) \qquad \forall x \in \left]0, +\infty\right[\qquad b > 0$

$\downarrow$

l'esponenziale può assumere solo valori positivi

Esempi:

$$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3 \qquad \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \qquad \log_{\frac{1}{2}}(8) = -3 \qquad \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2$$

Funzioni Reali

Funzione logaritmo di base a

Fissato un numero reale $a > 0 \quad a \neq 1$

Si definisce *funzione logaritmo di base a* la funzione

$$f :]0,+\infty[\to \mathbf{R} \quad \textit{tale che} \quad \forall x \in]0,+\infty[: f(x) = \log_a(x)$$

La funzione logaritmo di *base* ***e*** (*numero di Nepero*) è detta semplicemente *funzione logaritmo naturale* senza specificare la base

Funzioni Reali

Funzione logaritmo di base a

Le ***proprietà*** della *funzione logaritmo* si deducono dalla sua *definizione* e dalle *proprietà della funzione esponenziale*

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

$$\forall x \in \mathbf{R}: \qquad \log_a \left(a^x\right) = x$$

$$\forall x > 0: \qquad \mathrm{a}^{\log_a(x)} = x$$

$$\forall x, y > 0: \qquad \log_a (x \cdot y) = \log_a (x) + \log_a (y)$$

$$\forall x, y > 0: \qquad \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a (x) - \log_a (y)$$

$$\forall x > 0 \quad \forall \mathrm{b}>0 \quad \mathrm{b} \neq 1: \qquad \log_b (x) = \frac{\log_a (x)}{\log_a (b)}$$

Funzioni Reali

Funzione logaritmo di base a

Le ***proprietà*** della *funzione logaritmo* si deducono dalla sua *definizione* e dalle *proprietà della funzione esponenziale*

$$\forall x > 0: \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

Sia $s = \log_a \left(x^y \right) \longrightarrow a^s = x^y \longrightarrow$

$$\longrightarrow \quad a^{\frac{s}{y}} = x \quad \longrightarrow \quad \log_a (x) = \frac{s}{y} \quad \longrightarrow \quad s = y \log_a (x)$$

Funzioni Reali

Funzione logaritmo di base a

Le ***proprietà*** della *funzione logaritmo* si deducono dalla sua *definizione* e dalle *proprietà della funzione esponenziale*

$$\forall x, y > 0: \qquad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

dim:

Sia $r = \log_a(x)$ e $s = \log_a(y)$

$$a^r = x \ \wedge \ a^s = y \ \Rightarrow \ a^{r+s} = x \cdot y \ \Rightarrow \log_a(x \cdot y) = r + s$$

In conclusione $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Funzioni Reali

Funzione logaritmo di base a

Le ***proprietà*** della *funzione logaritmo* si deducono dalla sua *definizione* e dalle *proprietà della funzione esponenziale*

$$\forall x, y > 0: \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

dim:

Sia $r = \log_a(x)$ e $s = \log_a(y) \longrightarrow -s = \log_a\left(\frac{1}{y}\right)$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a(x) + \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = r - s$$

Funzioni Reali

Funzione logaritmo di base a

Le ***proprietà*** della *funzione logaritmo* si deducono dalla sua *definizione* e dalle *proprietà della funzione esponenziale*

$$\forall x > 0 \quad \forall b > 0 \quad b \neq 1: \qquad \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

dim:

Sia $s = \log_b(x)$

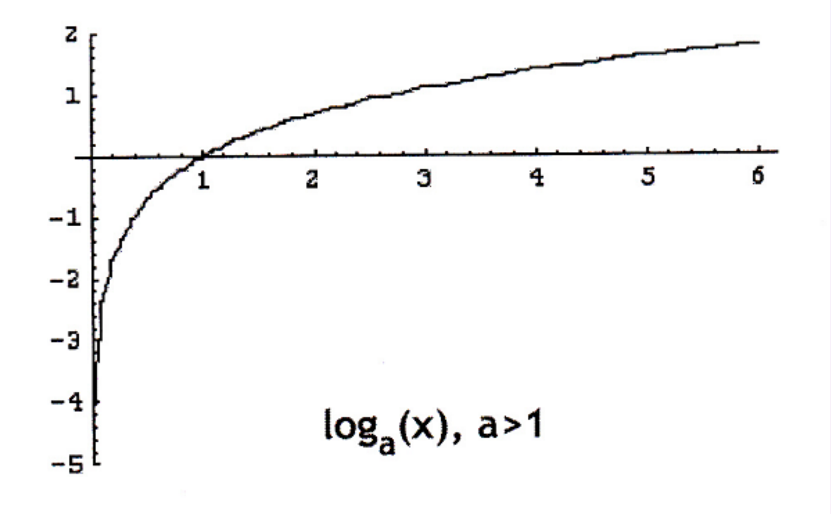
$$b^s = x \longrightarrow \log_a(b^s) = \log_a(x) \longrightarrow$$

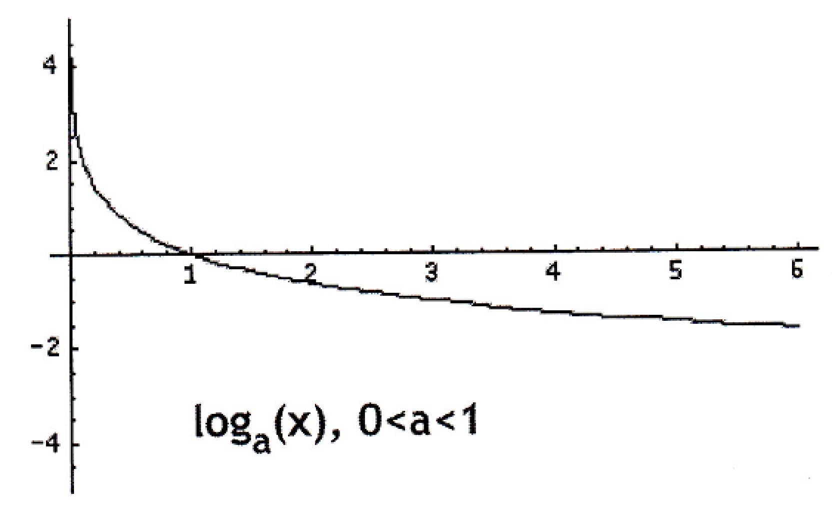
$$\longrightarrow s \cdot \log_a(b) = \log_a(x) \longrightarrow s = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Funzioni Reali

Funzione logaritmo di base a

La funzione logaritmo di base a è *strettamente crescente* se *a>1*, *strettamente decrescente* se *0<a<1*





Equazioni esponenziali e logaritmiche

Siano $a > 0 \quad a \neq 1 \quad b \in \mathbf{R}$

Risolvere l'equazione

$$a^x = b$$

Significa *determinare* tutti gli elementi *x* dell'insieme di definizione della funzione f_a (cioè tutto l'insieme dei numeri reali) tali che il corrispondente valore della funzione f_a *soddisfi l'equazione*

$$y = f_a(x) = b$$

Ovvero tutte le *ascisse* dei *punti di intersezione* del grafico **G** di f_a con la retta di equazione $y=b$

Equazioni esponenziali e logaritmiche

$$a > 0 \quad a \neq 1 \quad b \in \mathbf{R}$$

Risolvere l'equazione

$$a^x = b$$

Poiché $f_a(\mathbf{R}) =]0, +\infty[$

l'equazione non ammette soluzione se $b \leq 0$

Se $b > 0$ allora G_{f_a} ha un unico punto di intersezione con la retta $y = b$

tale punto ha ascissa $x = \log_a(b)$ (log è la funzione inversa di f_a)

$$\forall b > 0 \qquad a^x = b \Leftrightarrow \log_a(b) = x$$

Equazioni esponenziali e logaritmiche

Risolvere l'equazione

$$\log_a(x) = b$$

significa *determinare* tutti gli elementi *x* dell'insieme di definizione della funzione *log_a* (cioè tutto l'insieme dei numeri reali maggiori di 0) tali che il corrispondente valore della funzione $\log_a$ *soddisfi l'equazione*

$$y = \log_a(x) = b$$

Vogliamo quindi determinare tutte le *ascisse* dei *punti di intersezione* del grafico ***G*** di *log_a* con la retta di equazione *y=b*

$$\forall x > 0 \qquad \log_a(x) = b \Leftrightarrow x = a^b$$

Equazioni esponenziali e logaritmiche

Esercizi

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = -1$$ Non ammette soluzioni

$$\log_2(x) = -3 \longrightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$\log(x) = 8 \longrightarrow x = e^8$$

$$3^x = 2 \cdot 7^x \longrightarrow 2 = \left(\frac{3}{7}\right)^x \longrightarrow x = \log_{\frac{3}{7}}(2)$$

$$5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = 4 \longrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{5} \longrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{5}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}}(4) - \log_{\frac{3}{2}}(5)$$

Equazioni esponenziali e logaritmiche

Esercizi

$$2\cdot\log_5(x)=9 \longrightarrow \log_5 x^2=9 \longrightarrow x^2=5^9 \longrightarrow x=\sqrt[2]{5^9}=5^4\sqrt{5}$$

$$-\log_{\frac{2}{3}}(x)=4 \longrightarrow \log_{\frac{2}{3}}(x)=-4 \longrightarrow x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4}$$

$$8\cdot 2^{x-1}-2^{x+1}=16 \longrightarrow 8\frac{2^x}{2}-2\cdot 2^x=16 \longrightarrow 2^x=8 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x=\log_2(8)=3$$

$$5\cdot 3^x=7 \longrightarrow 3^x=\frac{7}{5} \longrightarrow x=\log_3\left(\frac{7}{5}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x=\frac{\log 7-\log 5}{\log 3}$$

Equazioni esponenziali e logaritmiche

Esercizi

$$2^x + 2^{3-x} = 6 \longrightarrow 2^x + \frac{2^3}{2^x} = 6 \longrightarrow 2^{2x} + 2^3 = 6 \cdot 2^x \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(2^x\right)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

ponendo $2^x = y$ si ha

$$y^2 - 6y + 8 = 0 \qquad y_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$$

nella variabile *x*

$$2^x = \begin{cases} 2 \longrightarrow x = 1 \\ 4 \longrightarrow x = \log_2(4) = 2 \end{cases}$$

Equazioni esponenziali e logaritmiche

Esercizi

$$\log_3(x+1)-\log_3(x-2)=\log_3(x)-2$$

Tale equazione può ammettere soluzione se

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \quad \Rightarrow \quad x>2 \\ x>0 \end{cases}$$

Per *x>2* l'equazione può essere riscritta come

$$\log_3\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\log_3(x)-\log_3\left(3^2\right)=\log_3\left(\frac{x}{9}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{x+1}{x-2}-\frac{x}{9}=0 \longrightarrow \frac{-x^2+11x+9}{9(x-2)}=0 \longrightarrow x^2-11x-9=0$$

$$x_{1/2}=\frac{11\pm\sqrt{157}}{2}=\begin{cases} \dfrac{11+\sqrt{157}}{2} \\ \cancel{\dfrac{11-\sqrt{157}}{2}<2} \end{cases}$$

Equazioni esponenziali e logaritmiche

Esercizi

$$2\log_2(x) = 2 + \log_2(x+3)$$

Tale equazione può ammettere soluzione se

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

Per *x>0* l'equazione può essere riscritta come

$$\log_2\left(\frac{x^2}{x+3}\right) = \log_2(4) \longrightarrow \frac{x^2}{x+3} - 4 = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{x^2 - 4x - 12}{x+3} = 0 \longrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \begin{cases} 6 \\ \cancel{-2 < 0} \end{cases}$$

Equazioni esponenziali e logaritmiche

Esercizi

$$\log_3(x-1) = \frac{1}{2}\log_3(x)$$

Tale equazione può ammettere soluzione se

$$\begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

Per *x>1* l'equazione può essere riscritta come

$$x-1 = x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow (x-1)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x \longrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \cancel{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}} < 1 \end{cases}$$

Equazioni esponenziali e logaritmiche

Esercizi

$$\log(x-2)+\log(5)=\log(x)$$

Tale equazione può ammettere soluzione se

$$\begin{cases} x>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow x>2$$

Per *x>2* l'equazione può essere riscritta come

$$\log(5x-10)=\log(x) \longrightarrow 5x-10=x \longrightarrow x=\frac{5}{2}$$

$$\log(x-2)-\log(x-1)=\log(5)$$

Tale equazione può ammettere soluzione se

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow x>2$$

Per *x>2* l'equazione può essere riscritta come

$$\log\left(\frac{x-2}{x-1}\right)=\log(5) \longrightarrow \frac{x-2}{x-1}=5 \longrightarrow x=\frac{3}{4}<2$$

Equazione impossibile

Equazioni esponenziali e logaritmiche

Esercizi

$$3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = 3^{x-1} \longrightarrow \left(3^x\right)^2 - 9\left(3^x\right) - \frac{3^x}{3} + 3 = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \frac{3\left(3^x\right)^2 - 28\left(3^x\right) + 9}{3} = 0$$

ponendo $3^x = y$ si ha

$$3y^2 - 28y + 9 = 0 \qquad y_{1/2} = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 108}}{6} = \frac{28 \pm 26}{6} \begin{cases} 1/3 \\ 9 \end{cases}$$

nella variabile *x*

$$3^x = \begin{cases} 1/3 \longrightarrow x = -1 \\ 9 \longrightarrow x = 2 \end{cases}$$