LIMITI DI FUNZIONE

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

Sia X un insieme numerico non vuoto ($X \subseteq \mathbb{R}$). Si dice che un punto $x_0 \in \bar{X}$ è un punto di accumulazione per X se ad ogni intorno di x_0 appartiene almeno un punto di X, distinto da x_0 se $x_0 \in X$.

ESEMPIO Sia dato l'insieme $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ si ha che 0 è punto di accumulazione di X e che per ogni $x_0 \in X$ non è punto di accumulazione per X. Infatti, $\forall \delta \in \mathbb{R}_+$, denotato con n un intero $> 1/\delta$, si ha $\frac{1}{n} \in X \cap (0,\delta)$. Pertanto, 0 è un punto di accumulazione per X.

ESEMPIO L'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$ è $+\infty$. Infatti, $\forall \delta \in \mathbb{R}_+$ denotato con n un intero $> \delta$, si ha $n \in \mathbb{N} \cap (\delta, +\infty)$ e quindi $+\infty$ è un punto di accumulazione per $\mathbb{N}$.

ESEMPIO Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a<b$, l'insieme dei punti di accumulazione di ciascuno degli intervalli $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ e (a,b) è l'intervallo chiuso $[a,b]$.

Le principali proprietà del punto di accumulazione si possono riassumere come segue:

- l'estremo inferiore (superiore) di un insieme numerico X se non appartiene a X è un punto di accumulazione per X.

(*)
- Ogni insieme numerico chiuso ed inferiormente limitato (superiormente limitato) è dotato di minimo (massimo)
- Condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme numerico X sia chiuso e limitato è che ogni punto di accumulazione di X appartenga a X.

(*) Un insieme X è chiuso se $DX \subset X$ dove DX: insieme punti di accumulazione di X.

LIMITE DI UNA FUNZIONE REALE DI UNA VARIABILE REALE

Sia f una funzione reale di una variabile reale definita in X e sia x_0 un punto di accumulazione per X.

// Si dice che $f(x)$ tende ad $l \in \mathbb{R}$ al tendere di x a x_0 (o che l è limite di f in x_0) se per ogni intorno I' di l, esiste un intorno I di x_0 tale che:

$$f(x) \in I' \quad \forall x \in I \cap (X - \{x_0\}) \;//$$

Se l è limite di f in x_0, nel caso l è un numero reale finito, si dice che $f(x)$ converge ad l al tendere di x a x_0; nel caso $l = +\infty$ $(-\infty)$ si dice che $f(x)$ diverge positivamente (negativamente) al tendere di x a x_0.

<u>In formule abbiamo</u>:

Se $x_0 \in X$, $f(x)$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ al tendere di x a x_0 <u>se e solo se</u>

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$$

$$\forall x \in X \; | \; 0<|x-x_0| < \delta(\varepsilon) \quad |f(x)-l| < \varepsilon$$

e scriveremo in modo compatto:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$$

Siccome x_0 come anche l possono assumere anche i valori $+\infty$ e $-\infty$ la definizione di limite deve essere modificata (lasciando ovviamente inalterato il suo significato).

Supponiamo ora che $x_0, l \neq +\infty, -\infty$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \begin{array}{l} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+ \\ \forall x \in X \; | \; 0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon) \\ |f(x)-l| < \varepsilon \end{array}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \begin{array}{l} \forall M \in \mathbb{R}_+, \exists \delta(M) \in \mathbb{R}_+ \\ \forall x \in X \; | \; 0<|x-x_0|<\delta(M) \\ f(x) > M \end{array}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \begin{array}{l} \forall M \in \mathbb{R}_+, \exists \delta(M) \in \mathbb{R}_+ \\ \forall x \in X \; | \; 0<|x-x_0|<\delta(M) \\ f(x) < -M \end{array}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \begin{array}{l} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+ \\ \forall x \in X \; | \; x > \delta(\varepsilon) \\ |f(x)-l| < \varepsilon \end{array}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff \begin{array}{l} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+ \\ \forall x \in X \; | \; x < -\delta(\varepsilon) \\ |f(x)-l| < \varepsilon \end{array}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}_+ \ \exists \delta(M) \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in X \mid x > \delta(M) \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}_+ \ \exists \delta(M) \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in X \mid x > \delta(M) \quad f(x) < -M$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}_+ \ \exists \delta(M) \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in X \mid x < -\delta(M) \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}_+, \exists \delta(M) \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in X \mid x < -\delta(M) \quad f(x) < -M.$$

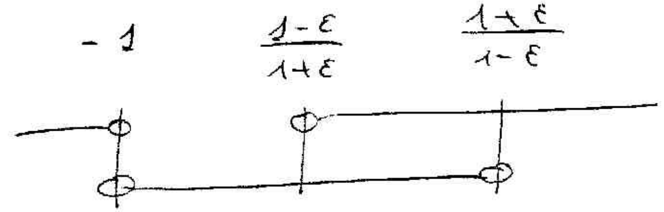
N.B. In tutte le definizioni non è mai richiesto il valore di f in x_0. È importante sottolineare come con il calcolo di limiti non siamo minimamente interessati al comportamento della funzione in x_0, bensì all'andamento della funzione nell'intorno del punto x_0. Infine se non fosse stato vero che x_0 è punto di accumulazione non avrebbe avuto senso calcolare il limite.

ESEMPIO 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x+1} = 2$$

$$\left| \frac{x+3}{x+1} - 2 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{1-x}{x+1} \right| < \varepsilon \iff \begin{cases} \dfrac{1-x}{x+1} < \varepsilon \\[2mm] \dfrac{1-x}{x+1} > -\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(1-\varepsilon) - (1+\varepsilon)x}{x+1} < 0 \\[2mm] \dfrac{(1+\varepsilon) - (1-\varepsilon)x}{x+1} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -1 \ \vee \ x > \dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \\[2mm] -1 < x < \dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \end{cases}$$



$\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} < x < \dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ ma il nostro intorno deve essere $1-\delta < x < 1+\delta$ (cioè $|x-1| < \delta$) quindi:

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = 1 - \delta_1 \implies \delta_1 = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1 + \delta_2 \implies \delta_2 = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

Poniamo $\delta = \min \left\{ \dfrac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}, \dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right\}$ ed abbiamo

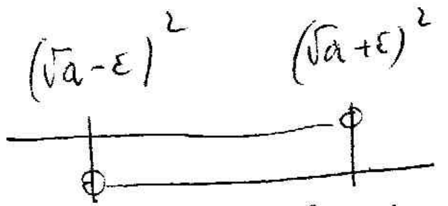
$$|x-1| < \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$$

Abbiamo trovato un intorno di 1 e quindi è verificato il limite.

ESEMPIO 2

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}_+$$

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| < \varepsilon \qquad \begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{a} < \varepsilon \\ \sqrt{x}-\sqrt{a} > -\varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} x < (\sqrt{a}+\varepsilon)^2 \\ x > (\sqrt{a}-\varepsilon)^2 \end{cases}$$



$$(\sqrt{a}-\varepsilon)^2 < x < (\sqrt{a}+\varepsilon)^2$$

ma l'intervallo deve essere $a-\delta < x < a+\delta$

$$(\sqrt{a}-\varepsilon)^2 = a-\delta_1 \implies \delta_1 = 2\sqrt{a}\,\varepsilon - \varepsilon^2$$

$$(\sqrt{a}+\varepsilon)^2 = a+\delta_2 \implies \delta_2 = 2\sqrt{a}\,\varepsilon + \varepsilon^2$$

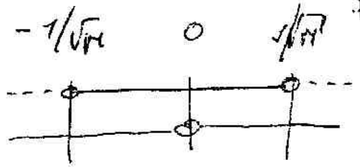
$$\delta = \min\{2\sqrt{a}\,\varepsilon-\varepsilon^2,\ 2\sqrt{a}\,\varepsilon+\varepsilon^2\}$$

$$|x-a| < 2\sqrt{a}\,\varepsilon - \varepsilon^2 = \delta(\varepsilon).$$

ESEMPIO 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\frac{1}{x^2} > M \qquad \frac{1-Mx^2}{x^2} > 0$$



$$-\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}} \qquad |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta(M)$$

ESEMPIO 4

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\left|\frac{x}{x-1} - 1\right| < \varepsilon \qquad \frac{1}{|x-1|} < \varepsilon \qquad |x-1| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$x > \frac{1}{\varepsilon} + 1 = \delta(\varepsilon).$$

ESEMPIO 5

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 \quad \text{con } a > 1.$$

$$|a^x - 1| < \varepsilon \qquad 1-\varepsilon < a^x < 1+\varepsilon$$

$$\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a} < x < \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a} \qquad \delta = \min\left\{\left|\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a}\right|, \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}\right\}$$

$$|x| < \left|\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a}\right| = \delta(\varepsilon).$$

se $0 < a < 1$ si ottiene $\delta = \min\left\{\left|\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}\right|, \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a}\right\}$ e quindi ancora $|x| < \delta$.

DEFINIZIONE ALTERNATIVA DI LIMITE

Sia $f(x)$ una funzione definita in $\bar{X} \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di $\bar{X}$. Si dice

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se per ogni intorno $I_1 \ (= I(l,\varepsilon))$ di l esiste un intorno $I_2 \ (= I(x_0,\delta))$ di x_0 tale che per ogni $x \in \underline{X} \cap I_2 - \{x_0\}$ risulta $f(x) \in I_1$.

TEOREMA UNICITÀ

> Una funzione $f(x)$ non può avere più di un limite per $x \to x_0$.

DIM. Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$

Valutiamo $|l_1 - l_2|$:

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \le |l_1 - f(x)| + |l_2 - f(x)|$$

ma per definizione di limite esistono $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, δ_1 e δ_2 per cui posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

$$|l_1 - l_2| \le \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \le 2\varepsilon \quad \forall x \in I(x_0,\delta_1) \cap I(x_0,\delta_2) - \{x_0\}$$

$$\Rightarrow |l_1 - l_2| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0, \delta) - \{x_0\}$$

$$\Rightarrow l_1 = l_2. \quad \text{C.V.D.}$$

Avremmo potuto dimostrare anche in modo alternativo:

sup. $l_1 > l_2$ e sia $\varepsilon \doteq \frac{l_1 - l_2}{2} > 0$

$\forall x \in I(x_0,\delta_1) - \{x_0\}$ si ha $l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$

$\forall x \in I(x_0,\delta_2) - \{x_0\}$ si ha $l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$

da cui $f(x) < \frac{l_1 + l_2}{2} \quad \forall x \in I(x_0, \delta_1) - \{x_0\}$

$f(x) > \frac{l_1 + l_2}{2} \quad \forall x \in I(x_0, \delta_2) - \{x_0\}$

sia $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ si ottiene:

$$\frac{l_1 + l_2}{2} < f(x) < \frac{l_1 + l_2}{2} \quad \forall x \in I(x_0, \delta) - \{x_0\}$$

che è palesemente assurdo!!

TEOREMA SOMMA

> Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, e supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ si ottiene:
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$$

DIM. Dalla definizione di limite abbiamo:

$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in I(x_0, \delta_1) - \{x_0\} : |f(x) - l_1| <$

$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in I(x_0, \delta_2) - \{x_0\} : |f(x) - l_2| <$

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e sommando membro a membro

$$l_1 + l_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 < f(x) < l_1 + l_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

posto $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ si ottiene

$l_1 + l_2 - 2\varepsilon < f(x) < l_1 + l_2 + 2\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l_1 - l_2| < 2\varepsilon$

c.v.d.

TEOREMA PRODOTTO

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, e supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$

si ottiene:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = l_1 l_2$$

DIM. Innanzitutto notiamo una proprietà del limite:

$\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2 \iff |g(x) - l_2| < \varepsilon_2 \quad \forall x \in I(x_0, \delta_2) - \{x_0\}$

valutiamo $|g(x)|$

$$|g(x)| = |g(x) - l_2 + l_2| \le |g(x) - l_2| + |l_2| \le \varepsilon_2 + |l_2|$$

se $g(x)$ ammette limite ($<\infty$) allora esiste un intorno di x_0 nel quale $g(x)$ è limitata. Costruiamo la disequazione del limite di $f(x)g(x)$:

$$|f(x)g(x) - l_1 l_2| = |f(x)g(x) - l_1 g(x) + l_1 g(x) - l_1 l_2|$$

$$\le |f(x)g(x) - l_1 g(x)| + |l_1 g(x) - l_1 l_2|$$

$$\le |g(x)|\,|f(x) - l_1| + |l_1|\,|g(x) - l_2|$$

$$\le (\varepsilon_2 + |l_2|)\varepsilon_1 + |l_1|\varepsilon_2 \quad \forall x \in I(x_0,\delta_1) \cap I(x_0,\delta_2) - \{x_0\}$$

porre $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ è possibile perché esisteranno sempre δ_1 e δ_2 per cui è vera la posizione. Detto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ otteniamo

$$|f(x)g(x) - l_1 l_2| < (\varepsilon + |l_2| + |l_1|)\varepsilon \quad \forall x \in I(x_0,\delta) - \{x_0\}$$

quindi $f(x)g(x) \to l_1 l_2$. c.v.d.

TEOREMA PERMANENZA SEGNO

Supponiamo che la funzione $f(x)$ abbia limite $l > 0$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l > 0$. Allora esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni x con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) > l/2$ e dunque $f(x) > 0$.

DIM. Dalla definizione di limite abbiamo

$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ e posto $\varepsilon = l/2$

abbiamo $\frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2}$ quindi $f(x) > 0$

N.B. È possibile sempre trovare $\varepsilon = l/2$ perché esiste sempre $\delta = \delta(\varepsilon)$. c.v.d.

TEOREMA RAPPORTO

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni e supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2 \ne 0$

allora si ottiene:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

DIM. Basta dimostrare che esiste il limite della funzione $1/g(x)$. Infatti

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}.$$

Dimostriamo $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_2}$.

Supponendo che $l_2>0$ per la permanenza del segno si ottiene $g(x) > \frac{l_2}{2}$ $\forall x\in I(x_0,\delta_2)-\{x_0\}$ da cui $\frac{1}{g(x)} < \frac{2}{l_2}$. Valutiamo $\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{l_2}\right|$:

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{l_2}\right| = \frac{|l_2-g(x)|}{|g(x)\,l_2|} = \frac{|g(x)-l_2|}{|l_2|\,|g(x)|} \le \frac{\varepsilon_2\cdot 2}{|l_2|\,|l_2|}$$

$\forall x\in I(x_0,\delta_2)-\{x_0\}$. Dunque esiste ε per cui

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{l_2}\right|<\varepsilon. \qquad \text{c.v.d.}$$

TEOREMA CARABINIERI

> Siano $f(x), g(x), h(x)$ tre funzioni e supponendo che $g(x)\le f(x)\le h(x)$ in un intorno di x_0, e che
> $$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$$
> si ottiene
> $$\lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

DIM. Sia $\varepsilon>0$. Poichè $g(x)\to l_2$ esisterà $\delta_1>0$ per cui $l-\varepsilon<g(x)<l+\varepsilon$ ed anche $g(x)>l-\varepsilon$. Analogamente esisterà $\delta_2>0$ per cui

$l-\varepsilon<h(x)<l+\varepsilon$ ed anche $h(x)<l+\varepsilon$.

Esiste $\delta_3>0$ per cui $g(x)\le f(x)\le h(x)$.

Posto $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ si ottiene:

$$l-\varepsilon < g(x)\le f(x)\le h(x) < l+\varepsilon$$

da cui

$$l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \iff |f(x)-l|<\varepsilon$$

c.v.d.

ESEMPIO 6 $\quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

La funzione $\frac{x^2-4}{x-2}$ non è definita per $x=2$, in quanto il denominatore si annulla. D'altro canto per $x\neq 2$ si ha $\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$ e quindi ai fini del calcolo del limite (che esclude in ogni caso la considerazione del valore della funzione per $x=2$), le due funzioni $\frac{x^2-4}{x-2}$ e $x+2$ si comportano allo stesso modo.

Si ha quindi

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4.$$

ESEMPIO 7 $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = 1/2$

Anche in questo caso la funzione non è definita per $x=0$, né si può eliminare questo inconveniente eseguendo la divisione. Per calcolare il limite moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt{1+x}+1$:

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

Quindi,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = 1/2;$$

ESEMPIO 8 $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} \cos 1/x = 0$

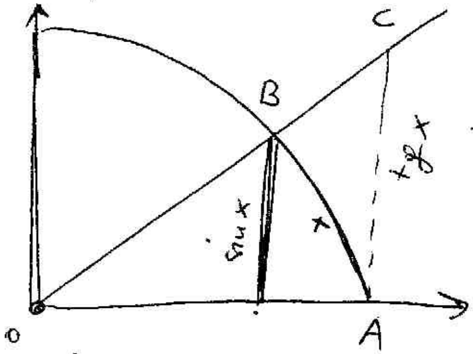
Infatti $-1 \le \cos 1/x \le 1$

quindi $-\sqrt{x} \le \sqrt{x} \cos 1/x \le \sqrt{x}$

ma $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ e per il teorema dei carabinieri $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} \cos 1/x = 0$.

ESEMPIO 9 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (LIMITE NOTEVOLE)

Dalla circonferenza goniometrica abbiamo nel primo quadrante:



Le aree del triangolo OAB, del settore OAB e del triangolo OAC sono rispettivamente $\frac{\sin x}{2}$, $x/2$ e $\operatorname{tg} x/2$. Dunque si ha $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ che dividendo per $\sin x$ (che è maggiore di zero) otteniamo:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

prendendo il reciproco:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

ESEMPIO 10 $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x};$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos x} =;$$

ESEMPIO 11

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 2.$$

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x} = 2.$$

ESEMPIO 12 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \doteq e$ (LIMITE NOTEVOLE)

se $x = 1/y$ $\quad x\to\infty \Rightarrow y\to 0$

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha.$$ Infatti

$\frac{\alpha}{x} = y \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{\alpha}{y}} =$

$$= \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}\right]^\alpha = e^\alpha;$$

LIMITI INFINITI

Valutiamo i limiti del tipo $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, ed in particolare cosa accade quando consideriamo la somma, la differenza, il prodotto ed il quoziente di funzioni divergenti.

SOMMA

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$
a	b	$a+b$
a	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\mp\infty$	FORMA INDETERMINATA

PRODOTTO

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$
a	b	ab
$a>0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$a<0$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	$b>0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$b<0$	$\mp\infty$

QUOZIENTE

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$
a	$b\neq 0$	a/b
a	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$b>0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$b<0$	$\mp\infty$
$a>0$	0	$+\infty$ se $g(x)>$ $-\infty$ se $g(x)<$ NON ESISTE

$a<0$	0	$-\infty$ se $f(x)>0$ $+\infty$ se $f(x)>0$ NON ESISTE

DIFFERENZA

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} f(x)-g(x)$
a	b	$a-b$
a	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	FORMA INDETERMINATA
$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\pm\infty$

Per l'operazione di elevazione a potenza conviene utilizzare le seguenti formule:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

con $f(x)>0$.

POTENZA

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$
$a>0$	b	a^b
$0<a<1$	$+\infty$	0
$0<a<1$	$-\infty$	$+\infty$
$a>1$	$+\infty$	$+\infty$
$a>1$	$-\infty$	0
$+\infty$	$b>0$	$+\infty$
$+\infty$	$b<0$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	0

Come si vede restano esclusi i casi detti "FORME INDETERMINATE": $\infty-\infty$ (nella somma), $0\cdot(\pm\infty)$ (nel prodotto), $0/0$ e $\pm\infty/\pm\infty$ (nel quoziente) e 0^0, $1^{\pm\infty}$, $(+\infty)^0$ (nella potenza).

LIMITI ALL'INFINITO

Qualunque sia l'intero $n\geq 0$ e qualunque siano i numeri reali $a_0, a_1, \dots, a_n$, la funzione

$$p: x\in\mathbb{R} \to a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$$

si chiama polinomio. I numeri $a_0, a_1, \dots, a_n$ si chiamano coefficienti del polinomio. Se i coefficienti di p non sono tutti nulli, denotato con k il più grande degli indici dei coefficienti non nulli, l'intero k si chiama grado del polinomio.
Il polinomio avente tutti i coefficienti nulli si chiama polinomio nullo.
Se p e q sono due polinomi in $\mathbb{R}$ e q non è nullo, posto:

$$X = \{x\in\mathbb{R} \mid q(x)=0\}$$

la funzione:

$$x \in X \to \frac{p(x)}{q(x)}$$

si chiama funzione razionale.
Una funzione razionale, che non sia un polinomio, si chiama anche funzione razionale fratta.

• Se $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \neq 0$ si ha

$$\lim_{x \to \infty} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n = a_n(+\infty)$$

$$\lim_{x \to -\infty} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n = \begin{cases} a_n(+\infty) & n \text{ è pari} \\ a_n(-\infty) & n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Infatti basta notare che $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ha

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n \right)$$

e nel limite per $x \to +\infty$ otteniamo $= +\infty \cdot (a_n)$.

•• Se $n, m \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^{n-m}}{b_m} = \begin{cases} = \frac{a_n}{b_n} & \text{se } n = m \\ = 0 & \text{se } n < m \\ = \frac{a_n}{a_m} \cdot (+\infty) & \text{se } n > m \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^{n-m}}{b_m} = \begin{cases} = a_n/b_m & \text{se } n = m \\ = 0 & \text{se } n < m \\ = \frac{a_n}{b_m}(+\infty) & \text{se } n > m \text{ e } n-m \text{ è pari} \\ = \frac{a_n}{b_m} \cdot (-\infty) & \text{se } n > m \text{ e } n-m \text{ è dispari} \end{cases}$$

Infatti anche in questo caso basta notare che

$$\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} = x^{n-m} \left[\frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} \right]$$

e nel limite $x \to +\infty$ la frazione tra parentesi quadre vale a_n/b_m, quindi è vera la tesi.

ESEMPIO 13 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x-3} = 1$

per le proprietà viste precedentemente. Ma vediamo se giungiamo allo stesso risultato applicando le definizioni di limite.

$\left|\frac{x+2}{x-3}-1\right|<\varepsilon \qquad \frac{5}{|x-3|}<\varepsilon \qquad |x-3|>\frac{5}{\varepsilon}$

$\Rightarrow x>3+5/\varepsilon = M(\varepsilon)$ perché $x\to+\infty$.

Ma anche $x-3<-\frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow x<3-5/\varepsilon$ perché $x\to-\infty$. Infatti $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x-3}=1$.

ESEMPIO 14 $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases}0 & \text{se } 0<a<1\\ 1 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } a>1\end{cases}$

se $a=0$ oppure $a=1$ il risultato è ovvio.

se $0<a<1$ dimostriamo il limite:

$|a^x|<\varepsilon \qquad a^x<\varepsilon \qquad x>\log_a \varepsilon = \frac{\ln\varepsilon}{\ln a}>0$ Quindi $x>\delta(\varepsilon)=\frac{\ln\varepsilon}{\ln a}$.

se $a>1$ otteniamo $a^x>M \qquad x>\log_a M = \frac{\ln M}{\ln a}>0$ Quindi $x>\delta(M)=\frac{\ln M}{\ln a}$

ESEMPIO 15

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = 0$

Infatti $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$= \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.$

ESEMPIO 16

$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right) = 1/2$

Infatti $\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1 = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} =$

$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \frac{\cancel{x}-\cancel{x}+1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$

$x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right) = \frac{x}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)} = \frac{x}{\sqrt{x(x-1)}+(x-1)}$

$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left[\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x}\right]} = \frac{1}{\sqrt{1-1/x}+1-1/x}$.

$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-1/x}+1-1/x} = \frac{1}{2}$

LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO

In molti casi, specie quando una funzione $f(x)$ non ha limite (per $x \to x_0$) può essere interessante chiedersi cosa avviene se ci limitiamo a far tendere x a x_0 da destra (cioè solo per valori di $x > x_0$) o da sinistra (cioè per $x < x_0$). Infatti può avvenire che in presenza i due limiti esistono, pur non essendoci il limite globale.

La definizione di limite sinistro si ottiene:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$$

$$\forall x \in X \text{ e } -\delta < x - x_0 < 0 \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

mentre per il limite destro abbiamo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$$

$$\forall x \in X \text{ e } 0 < x - x_0 < \delta \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

TEOREMA Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme $X \subset \mathbb{R}$, supponendo che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

allora la funzione ha limite per $x \to x_0$ e si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

DIM. Detto che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_+ > 0 \quad \forall x \in X \ 0 < x - x_0 < \delta_+ \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_- > 0 \quad \forall x \in X \ -\delta_- < x - x_0 < 0 \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

supponendo $\delta = \min\{\delta_+, \delta_-\}$

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta.$$

C.V.D.

ESEMPIO 17 $\lim_{x \to 0} 1/x$ non ha limite.

Infatti dovremmo porre $\frac{1}{x} > M \Rightarrow x < \frac{1}{M}$ quindi otteniamo un intorno destro di zero. Se poniamo $\frac{1}{x} < -M \Rightarrow x > -\frac{1}{M}$ ed ora l'intorno è quello sinistro. Dunque

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

I teoremi precedenti possono servire sia per calcolare il limite sia per dimostrare che una funzione non ha limiti. Possiamo infatti calcolare il limite destro e sinistro; se risultano uguali, per il teorema precedente la funzione avrà lo stesso limite; se invece sono diversi, si potrà concludere che il limite non esiste.

ESEMPIO 18 $\lim_{x \to 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ NON ESISTE

Infatti $\lim_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$

verifichiamo:

$e^{\frac{1}{x-1}} > M \qquad \frac{1}{x-1} > \ln M \qquad x-1 < \frac{1}{\ln M}$

$x < 1 + \frac{1}{\ln M} = \delta(M)$ Intorno destro.

$\left| e^{\frac{1}{x-1}} \right| < \varepsilon \qquad e^{\frac{1}{x-1}} < \varepsilon \qquad x-1 > \frac{1}{\ln \varepsilon}$

$x > 1 + \frac{1}{\ln \varepsilon} = \delta(\varepsilon)$ Intorno sinistro poichè $\ln \varepsilon < 0$ quindi siamo a sinistra di 1.

La funzione diverge a destra di 1 ma converge a zero a sinistra di 1.

Siano $f: \overline{X} \to \overline{Y}$ e $g: \overline{Y} \to \mathbb{R}$ due funzioni reali di una variabile reale con x_0 punto di accumulazione per $\overline{X}$ e y_0 punto di accumulazione per $\overline{Y}$.

TEOREMA FUNZIONE COMPOSTA

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se si ha } \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \text{ e} \\ \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell \text{ ed } \exists\, I(x_0, \delta) \text{ tale} \\ \text{che } \forall x \in I(x_0,\delta) \cap \overline{X} - \{x_0\}.\ f(x) \neq y_0 \\ \text{allora } \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell \end{array}}$

DIM.

Se $\lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$ vuol dire che esiste un intorno di ℓ e quindi un intorno di y_0:

$g(y) \in I'(\ell, \varepsilon') \qquad y \in I(y_0, \delta') \cap \overline{Y} - \{y_0\}$

ma se $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ allora

$f(x) \in I''(y_0, \varepsilon'') \qquad x \in I(x_0, \delta'') \cap \overline{X} - \{x_0\}$

posto $\delta' = \varepsilon''$ (troviamo sempre δ'' che soddisfa la richiesta) allora esiste il limite della funzione composta e $g(f(x)) \in I'(\ell, \varepsilon')$:

$g(f(x)) \in I'(\ell, \varepsilon') \qquad x \in I(x_0, \delta'') \cap \overline{X} - \{x_0\}$

c.v.d.

Grazie a questo teorema è stato possibile risolvere il limite dell'esempio 12.

Possiamo a calcolare (grazie al teorema precedente) altri limiti utili.

ESEMPIO 19 $\lim_{x\to 0} \frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e$

Semplicemente

$$\frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a (1+x)^{1/x} \quad \text{quindi}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \lg_a (1+x)^{1/x} =$$

$$= \lg_a \left[\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}\right] = \lg_a e.$$

ESEMPIO 20 $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$

poniamo $a^x - 1 = t \Rightarrow x = \lg_a(t+1)$

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{t}{\lg_a(t+1)} = \frac{1}{\lg_a(1+t)^{1/t}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\lg_a(1+t)^{1/t}} = \frac{1}{\lg_a\left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right]} =$$

$$= \frac{1}{\lg_a e} = \ln a;$$

ASINTOTI

Della teoria fin qui sviluppata ci possiamo servire per studiare gli asintoti alle curve piane. Intuitivamente un asintoto è una retta alla quale la curva va avvicinandosi sempre più. Per dare una definizione più precisa, consideriamo la curva di equazione $y = f(x)$. Può accadere che in qualche punto x_0 si abbia

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \quad (o\ -\infty)$$

Diremo che la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale per la funzione f. Lo stesso avviene se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \quad (o\ -\infty)$$

Un asintoto verticale non è dunque altro che un punto in cui la funzione ha almeno uno dei limiti destro o sinistro uguali a $+\infty$ o $-\infty$. Ad esempio la funzione $1/x$ ha un asintoto verticale $x=0$; lo stesso avviene per $\ln x$ o per $1/x^2$, mentre $\frac{1}{\ln x}$ ha un asintoto verticale $x = 1$.

Più interessante è il caso in cui la retta asintotica non è verticale.

" Sia $f(x)$ una funzione definita in una semiretta $(c,+\infty)$. Diremo che la retta di equazione $y = ax+b$ è un asintoto di f, per $x \to +\infty$, se

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - ax - b\right) = 0$$

Analogamente, se f è definita in $(-\infty,c)$, $y = ax+b$ è un asintoto se

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - ax - b\right) = 0 \quad //$$

L'annullarsi del limite esprime il fatto intuitivo che la retta $y = ax+b$ e la curva $y = f(x)$ vadano avvicinandosi sempre più quando $x \to \pm\infty$. A volte si distinguono i casi $a=0$ e $a \neq 0$. Nel primo caso si parla di asintoto orizzontale, nel secondo di asintoto obliquo.

I coefficienti a e b della retta asintoto possono essere determinati facilmente. Supponiamo infatti che sia verificata la condizione di asintoto. A maggior ragione si avrà

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} = 0$$

da cui

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

mentre per b si ha

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - ax\right)$$

ESEMPIO 21 La funzione $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ha un asintoto verticale in $x=-1$. Calcoliamo l'asintoto obliquo (eventuale)

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - ax\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

L'asintoto è orizzontale $y = 1$.

ESEMPIO 22 $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - ax\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0.$$

l'asintoto obliquo è la bisettrice $y = x$.

ESEMPIO 2.3 $\quad f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

$$a = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1\right)$$

notiamo che

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1 = \frac{\frac{x}{x-1} - 1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} = \frac{\frac{\cancel{x} - \cancel{x} + 1}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1}$$

quindi

$$x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1\right) = x \cdot \frac{1}{x-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} = \frac{x}{x-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} = 1/2$$

l'asintoto obliquo è $y = x + 1/2$ per $x \to +\infty$

calcoliamo per $x \to -\infty$

$$a = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{-x^3}{-x-1}} \cdot \frac{1}{-x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{\frac{x}{x+1}} = -$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{-x^3}{-x-1}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x\right)$$

ma notiamo che

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x = \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} = \frac{\frac{-x^2}{x-1}}{\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1\right)x}$$

$$= -\frac{x}{x-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} \text{;} \quad \text{Quindi}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} = -1$$

l'asintoto obliquo è $y = -x - 1/2$ per $x \to -\infty$.

ESEMPIO 2.4 $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$

con $n \in \mathbb{N}$.

Infatti $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$

Quindi

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = \frac{\cancel{1} + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k - \cancel{1}}{x} =$$

$= n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}$. Notato che $\lim_{x\to 0} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1} = 0$

otteniamo:

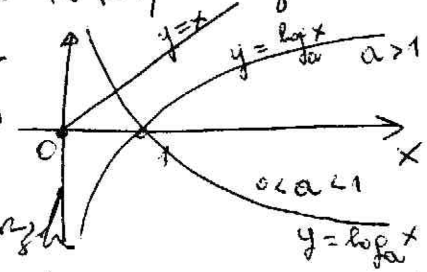
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n + \lim_{x\to 0} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1} = n.$$

Un particolare ruolo rivestono i limiti di rapporti e prodotti di potenze e logaritmi. In particolare:

$$\lim_{x\to 0^+} x \log_a x = 0 \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_a x}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<a<1 \\ -\infty & \text{se } a>1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to\infty} x \log_a x = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ -\infty & 0<a<1 \end{cases}$$

Si può dare una prima interpretazione in termini dei grafici. Successivamente sarà tutto chiaro in termini di successioni e calcolo differenziale.



SUCCESSIONI

Una successione è una particolare funzione a valori reali definita in un insieme che appartiene ai numeri naturali.

SUCCESSIONE $\to f : A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

potremmo definire simbolicamente le successioni con $f(n)$ (come con $f(x)$ una generica funzione), tuttavia preferiamo usare un altro simbolo per non creare confusione.

$$a_n : n \in A \subset \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}$$

Al variare di n possiamo avere tutti i valori della successione

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots$$

Siccome nei numeri naturali l'unico punto di accumulazione è $+\infty$ possiamo definire il limite di a_n solo per $n \to +\infty$. Formalmente scriviamo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \quad \text{(LIMITE SUCCESSIONE)}$$

dato che non vi è ambiguità nel limite usiamo anche la scrittura $a_n \to a$.

Come per i limiti delle funzioni affermiamo che esiste il limite di una successione se è vera una precisa relazione. Infatti:

$$a_n \to a \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists\, \nu(\varepsilon)\in \mathbb{N}$$
$$|a_n-a|<\varepsilon \quad \forall n>\nu(\varepsilon)$$

ovviamente se $a<\infty$.

Se $a_n \to \infty \iff \forall M>0 \ \exists\, \nu(M)\in \mathbb{N}$
$$a_n>M \quad \forall n>\nu(M)$$

Nel primo caso a_n è detta <u>convergente</u>, mentre nel secondo caso è detta <u>divergente</u>.
Una successione (convergente o divergente) è detta <u>regolare</u>, poiché esistono successioni per le quali non è possibile affermare nulla del precedente.
Se $a_n \to 0$ la successione è detta <u>infinitesima</u>.
Per le successioni bisogna definire una serie di teoremi che sono l'esatta estensione dei teoremi sulle funzioni. In particolare sono validi per le successioni i teoremi della somma, prodotto, quoziente, permanenza del segno, oltre che confronto e dell'unicità del limite. Con le opportune differenze simboliche basta di ripercorrere le stesse dimostrazioni.
Sulla stessa linea anche per le definizioni di successione crescente, strettamente crescente, decrescente e strettamente decrescente.
Introduciamo il concetto di <u>successione limitata</u> cioè se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$|a_n| \le M \quad \forall n$$

TEOREMA $\boxed{\text{" Ogni successione convergente è limitata"}}$

DIM. Se è limitata vuol dire che $|a_n|\le M$.
Se è convergente vuol dire che $a_n \to a$.
Quindi:
$$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a|$$
$$\forall n>\nu(\varepsilon) \quad |a_n| \le \varepsilon + |a|$$
Cosa succede per $n=1,\dots,\nu$?
Allora poniamo $M=\max\{a_1,\dots,a_\nu, \varepsilon+|a|\}$
che così $|a_n|\le M \quad \forall n$. c.v.d.

TEOREMA $\boxed{\text{Se } a_n \to a \text{ e } a_n \ge 0 \ \forall n \Rightarrow a\ge 0}$

DIM. Se $a<0$ per il teorema della permanenza del segno deve esserci un intervallo

$n > \nu$ perciò $a_n < 0$ ma questo contraddice l'ipotesi. c.v.d.

TEOREMA $\boxed{\text{Se } a_n \to a,\ b_n \to b \text{ ed } a_n \geq b_n\ \forall n \implies a \geq b}$

DIM. Sia $c_n = a_n - b_n \geq 0\ \forall n$ quindi

$c = a - b \geq 0$ per il teorema precedente.

quindi $a \geq b$. c.v.d.

TEOREMA $\boxed{a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0}$

DIM. Se $|a_n| \to 0$ allora $||a_n|| < \varepsilon\ \forall n > \nu$

ma $||a_n|| = |a_n| \implies |a_n| < \varepsilon\ \forall n > \nu$

quindi $a_n \to 0$. c.v.d.

TEOREMA $\boxed{a_n \text{ è limitata e } b_n \to 0 \quad a_n b_n \to 0}$

DIM. Se $a_n b_n \to 0$ vuol dire che

$|a_n b_n| < \varepsilon \qquad |a_n||b_n| < \varepsilon$

ma a_n è limitata quindi

$|a_n||b_n| \leq M|b_n| \leq M\varepsilon$

quindi $a_n b_n \to 0$. c.v.d.

LIMITI NOTEVOLI PER LE SUCCESSIONI

★ $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & -1 < a < 1 \\ ? & a \leq -1 \end{cases}$$

Utilizzando la relazione di Bernoulli

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

è possibile analizzare la successione a^n. Infatti

$$a^n \geq 1 + n(a-1)$$

se $a > 1$ $\lim_{n\to\infty} a^n \geq \lim_{n\to\infty} 1 + n(a-1) = +\infty$

e quindi $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

se $a = 1$ $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$

se $-1 < a < 1$ cioè $|a| < 1$ otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} |a^n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|1/a^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/|a|)^n}$$

ma $1/|a| > 1$ quindi $\lim_{n\to\infty} |a^n| = 0$

se converge a zero $|a^n|$, converge a zero anche a^n. c.v.d.

★ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ con $a \geq 0$

sia $a \geq 1$ poniamo $b_n = a^{1/n} - 1 \geq 0$

invertendo otteniamo $a = (1 + b_n)^n$

e per Bernoulli $(b_n + 1)^n \geq 1 + n b_n$

$$a \geq 1 + n b_n \qquad b_n \leq \frac{a-1}{n}$$

ma $b_n \geq 0$ quindi per il teorema dei due carabinieri

$0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n}$ e nel limite $n \to \infty$

$b_n \to 0$ e si ottiene $a^{1/n} \to 1$.

se $a < 1$ allora $a^{1/n} = \frac{1}{1/a^{1/n}} = \frac{1}{(1/a)^{1/n}}$

ma ora $1/a > 1$ e si ripete lo stesso discorso.

★ $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^b} = 1$ con $b \in \mathbb{R}$

introduciamo la successione $b_n \doteq \sqrt[n]{n^b} - 1$

$b_n = n^{b/n} - 1$ da cui $(b_n + 1)^n = n^b$

ma ancora per Bernoulli

$n^b \geq 1 + n b_n$ $\qquad b_n \leq n^{b-1} - \frac{1}{n}$

e per il teorema dei due carabinieri

$$0 \leq b_n \leq n^{b-1} - 1/n$$

ma ora se $b < 1$ allora $b_n \to 0$ ed è verificata la tesi. Ma se $b \geq 1$ b_n non è infinitesima. Allora possiamo fare una modifica:

$\sqrt[n]{n^b} = \left(\sqrt[n]{n^{1/2}}\right)^{2b}$ e ritroviamo la successione $\sqrt[n]{n^{1/2}} \to 1$

per quanto visto. ma se $\sqrt[n]{n^{1/2}} \to 1$ anche $\left(\sqrt[n]{n^{1/2}}\right)^{2b} \to 1$.

se b non è razionale possiamo scrivere

$$\sqrt[n]{n^{[b]}} \leq \sqrt[n]{n^b} \leq \sqrt[n]{n^{[b]+1}}$$

$[b]$: parte intera di b. Da cui è immediata la dimostrazione.

TEOREMA Ogni successione monotona ammette limite e se è anche limitata converge.

DIM.

Sia $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Per definizione di estremo superiore abbiamo: $l - \varepsilon < a_\nu$ per $\nu \in \mathbb{N}$

$\forall n > \nu$ abbiamo $l - \varepsilon < a_\nu < a_n \leq l < l + \varepsilon$

$a_n > a_\nu$ poiché a_n è monotona crescente

$\Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > \nu \Rightarrow a_n \to l$

se non è limitata allora $a_\nu > M$ $M \in \mathbb{R}$ ma allora $a_n > a_\nu > M$ quindi $a_n \to \infty$.

c.v.d.

TEOREMA Sia $a_n > 0$. Se $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ è una successione e $b_n \to b$.
Se $b < 1$ $a_n \to 0$

DIM Se $a_n \to a$ $\quad b_n \to \frac{a}{a} = 1$

Se $a_n \to 0$ $\quad a_{n+1} < a_n$ quindi $b_n < 1$

ma per la permanenza del segno deve esserci un intorno in cui $1 - b_n > 0$

ma per il teorema delle successioni monotone il limite esiste e non può che essere zero. C.V.D.

Consideriamo le seguenti successioni:

$$\ln n, \quad n^b, \quad a^n, \quad n!, \quad n^n$$

con $b > 0$ e $a > 1$. tutte le successioni tendono a $+\infty$. Vogliamo calcolare il limite delle successioni ottenute come rapporto tra due successioni. In particolare

$$\frac{\ln n}{n^b}; \quad \frac{n^b}{a^n}; \quad \frac{a^n}{n!}; \quad \frac{n!}{n^n};$$

$$\frac{\ln n}{n^b} = \frac{1}{n^{b-1}} \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{n^{b-1}} \cdot \ln n^{1/n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^b} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{b-1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \ln n^{1/n} = 0$$

Passiamo alla seconda successione:

$a_n = \frac{n^b}{a^n}$ e valutiamo la successione b_n:

$$b_n = \frac{(n+1)^b}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^b} = \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^b = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^b$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{a} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^b = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a} < 1$$

quindi $\frac{n^b}{a^n} \to 0$.

Passiamo alla terza successione:

$$a_n = \frac{a^n}{n!}; \quad b_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

quindi $\frac{a^n}{n!} \to 0$

Passiamo alla quarta successione:

$$a_n = \frac{n!}{n^n}; \quad b_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}\,n^n}{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n\,\cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}; \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} <$$

perché $\frac{n!}{n^n} \to 0$.

Con queste ultime successioni abbiamo dimostrato che essendo infinitesime vuol significare che i denominatori sono <u>infiniti</u> di ordine superiore alle successioni ai numeratori. Ciò vuol dire che possiamo costruire una gerarchia tra le successioni

<u>SUCCESSIONI ESTRATTE</u>

Sia a_n una successione e sia n_k una successione strettamente crescente di numeri naturali:

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n_{k+1} > n_k$$

Dalla successione a_n passiamo alla successione $a_{n_k} : k \in \mathbb{N} \to a_{n_k} \in \mathbb{R}$

a_{n_k} : <u>successione estratta</u> di a_n.

n_k può essere una qualsiasi relazione crescente che associa al variare di $k \in \mathbb{N}$ una successione di numeri naturali.

Per questo motivo n_k può essere qualsiasi ma deve soddisfare la condizione $n_k \geq k$

In maniera rapida si mostra che se a_n converge allora, qualsiasi sia una sua estratta, questa converge. Infatti, se $a_n \to a$ cioè $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$

Scelto $k > \nu$ si ha anche $n_k > k > \nu$ e perciò $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

TEOREMA BOLZANO WEIERSTRASS: Se a_n è limitata $\Rightarrow \exists\, a_{n_k} \to l$

DIM. se a_n è limitata vuol dire $|a_n| \leq M \quad \forall n$. Possiamo anche scrivere

$$A \leq a_n \leq B \quad \forall n$$

Detto $c = \frac{A+B}{2}$ possiamo dividere l'intervallo in due parti $[A,c]$, $[c,B]$. Poiché $a_n \in [A,B]$ avremo un numero finito di valori di a_n in $[A,c]$ (o in $[c,B]$) oppure un numero infinito di valori di a_n in $[A,c]$ (o in $[c,B]$). Scegliendo per esempio $[A,c]$ possiamo continuare con un'ulteriore suddivisione:

$$c_2 = \frac{A+c}{2} = \frac{A+B}{4} = \frac{A+B}{2^2}$$ e via così scegliendo sempre l'intervallo in cui ci sono infiniti

valori di a_n. Ripetuta n volte l'operazione si ottengono due successioni A_k e B_k. La prima è crescente mentre la seconda è decrescente:

$$A \le A_1 \le A_2 \le \dots \le A_n \le A_{n+1} \le B_{n+1} \le B_k \le \dots \le B_2 \le B_1 \le B$$

l'ampiezza del n-ennesimo intervallo è data da $B_n - A_n = \dfrac{B-A}{2^n}$.

Solo nell'intervallo $[A_n, B_n]$ vi sono infiniti valori della successione, mentre in tutti i precedenti ve ne sono un numero finito.

Quindi esiste un primo intero n_1 tale che

$$a_{n_1} \in [A_1, B_1], \quad a_{n_2} \in [A_2, B_2], \dots, a_{n_k} \in [A_k, B_k]$$

Si ottiene una successione crescente

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

Per un generico k abbiamo

$$A_k \le a_{n_k} \le A_k + \frac{B-A}{2^k}$$

che per $k \to \infty$ $\dfrac{B-A}{2^k} \to 0$ ma $A_k \to l$ poiché A_k è una successione monotona limitata ammette limite. Quindi dal teorema dei carabinieri si ha $a_{n_k} \to l$ c.v.d.

FUNZIONI CONTINUE

Come abbiamo visto in precedenza in molti casi (ma non sempre) il limite di una funzione per $x \to x_0$ coincide con il valore della funzione f in x_0. Quando ciò avviene, diremo che la funzione f è <u>continua</u> in x_0.

// Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dice <u>continua</u> in un punto $x_0 \in A$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Diremo poi che la funzione f è continua in un insieme $E \subset A$ se è continua in ogni punto di E. Infine, se una funzione è continua in ogni punto del suo insieme di definizione, diremo semplicemente che è continua. //

Anche per le funzioni continue in formule abbiamo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \mid |x - x_0| < \delta$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Bisogna, per ciò, applicare la definizione di funzione continua a tutte le funzioni e verificare se soddisfano o meno la condizione di continuità. Per esempio verifichiamo per alcune funzioni elementari la continuità.

- $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin\frac{x-x_0}{2} \cos\frac{x+x_0}{2}\right|$$

$$\le \cancel{2}\,\frac{|x-x_0|}{\cancel{2}} = |x-x_0|$$

se $|x-x_0|<\delta$ e $\delta=\varepsilon$ $\quad |\sin x - \sin x_0|<\varepsilon$.

- $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| 2 \sin\frac{x-x_0}{2} \sin\frac{x+x_0}{2}\right|$$

$$\le \cancel{2}\,\frac{|x-x_0|}{\cancel{2}} = |x-x_0|$$

e quindi si ottiene lo stesso risultato.

- $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$

$$|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}\,|a^{x-x_0}-1| \underset{x\to x_0}{=} a^{x_0}\,|x-x_0|$$

posto $\delta = \varepsilon/a^{x_0}$ si ottiene

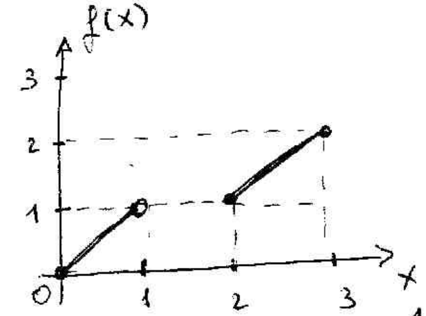
$$\forall x \mid |x-x_0| < \frac{\varepsilon}{e^{x_0}} \qquad |a^x - a^{x_0}| < \varepsilon.$$

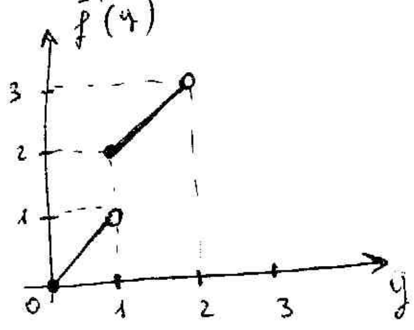
Anche per le funzioni continue (definite con una struttura simile a quella per il limite) sono soddisfatti i teoremi della somma, prodotto, quoziente, funzione composta e permanenza del segno.

È abbastanza intuitivo affermare che se $f(x)$ è continua, sarà continua anche la funzione inversa $f^{-1}(x)$. Unica condizione che quanto affermato è vero: se $f(x)$ è definita in un intervallo.

Infatti consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0\le x<1 \\ x-1 & 2\le x\le 3 \end{cases}, \qquad f^{-1}(y) = \begin{cases} y & 0\le y< \\ y+1 & 1\le y< \end{cases}$$

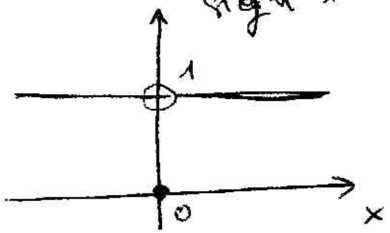




La funzione $f^{-1}(y)$ non è continua in $y=$

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Consideriamo la funzione $\operatorname{sgn} x \doteq \frac{x}{|x|}$ ed in particolare $\operatorname{sgn}^2 x$. Tale funzione vale 1 $\forall x \in \mathbb{R}$ tranne per $x=0$, dove vale 0. Mentre nel valutare il limite troviamo



$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}^2 x = 1$$

che non è uguale al valore della funzione nel punto 0. La funzione non è quindi continua in 0. Se però ridefiniamo la funzione in 0, ponendola uguale al suo limite, la nuova funzione diventa continua. In questo caso si dice che la funzione ha una <u>discontinuità eliminabile</u>: il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ esiste ed è finito, ma la funzione non è continua perchè il valore del limite è diverso da $f(x_0)$. Discontinuità di questo tipo si dicono eliminabili, perchè basta ridefinire il valore della f in x_0 (ponendolo uguale al valore del limite) per ripristinare la continuità che mancava.

Stesso discorso vale per la funzione $\frac{\sin x}{x}$ per cui $\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0$ ma non è definita per $x = 0$. Qui pure definiamo una nuova funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

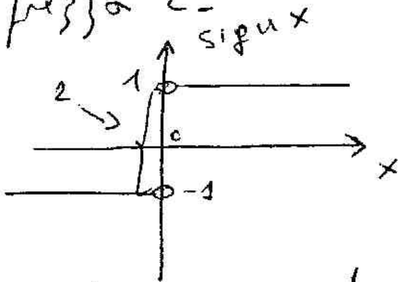
Quindi $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

La situazione è diversa quando il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ non esiste, o non è finito. In questo caso nessun cambiamento del valore di f in x_0 può far diventare continua la nuova funzione, dato che il limite (che non dipende dal valore di $f(x_0)$) continuerà a non esistere o a essere infinito.

Si possono dare comunque vari casi:

A) Esistono finiti i limiti destro e sinistro: $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ma sono diversi. In questo caso diremo che la funzione f ha una discontinuità di prima specie o un salto nel punto x_0, e che l'ampiezza del salto è $S(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Un esempio di questo comportamento è dato dalla funzione sign x, che ha un salto in 0, di ampiezza 2.



B) Esistono i limiti destro e sinistro

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

ma almeno uno di essi è infinito. In questo caso si dirà che $f(x)$ ha una discontinuità di seconda specie.

Una funzione del tipo è $1/x$:

$$\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} 1/x = -\infty$$

Sempre di seconda specie è la discontinuità della funzione $1/x^2$ che ha entrambi i limiti $+\infty$ e di $e^{1/x}$, dato che risulta

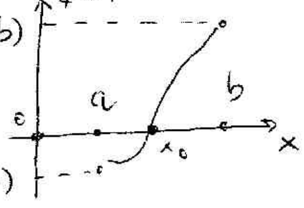
$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$$

c) Infine, può avvenire che uno o entrambi i limiti destro e sinistro non esistono, come accade per esempio per la funzione $\sin 1/x$. In questo caso diremo che la discontinuità è di terza specie.

TEOREMA ZERI FUNZIONI CONTINUE

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sia } f(x) \text{ una funzione continua in } [a,b] \text{ se } f(a)f(b) < 0 \\ \exists\, x_0 \in (a,b) \text{ tale che } f(x_0) = 0 \end{array}}$$

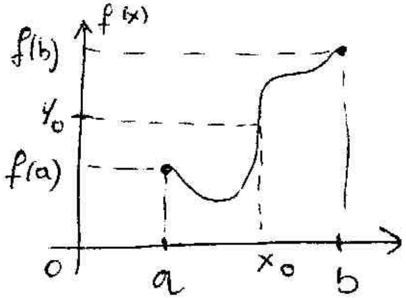
DIM. La dimostrazione si basa nella logica e nel calcolo sul teorema di Bolzano - Weierstrass. Si consideri la suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ in intervalli sempre più piccoli finché si costruisca una successione estratta che converge e quindi deve esistere x_0 tale che $f(x_0) = 0$ - c.v.d.



TEOREMA VALORI INTERMEDI

$\boxed{\text{Una funzione } f(x) \text{ continua in } [a,b] \text{ assume tutti i valori compresi tra } f(a) \text{ e } f(b).}$

DIM. Sia $y_0 \in [f(a), f(b)]$



costruiamo la funzione

$g(x) = y_0 - f(x)$

$g(a) = y_0 - f(a) > 0$, $g(b) = y_0 - f(b) < 0$

$g(x)$ deve avere almeno un x_0 tale che

$g(x_0) = 0 \qquad y_0 - f(x_0) = 0 \qquad y_0 = f(x_0)$

c.v.d.

TEOREMA WEIERSTRASS

$\boxed{\text{Sia } f(x) \text{ una funzione continua in } [a,b]. \text{ Allora } f(x) \text{ assume massimo e minimo.}}$

DIM. Sia $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ basta dimostrare che esiste una successione x_n tale che

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = M$.

Per la definizione di estremo superiore necessariamente esiste un x_n (cioè funzione di n) per cui accade

$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$

e se $n \to \infty$ $f(x_n) \to M$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass deve esistere un'estratta x_{n_k} che converge: $x_{n_k} \to x_0$ e quindi $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ ed allora

$M = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$

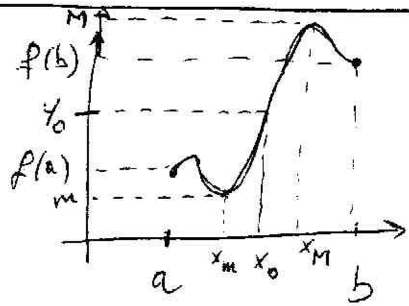
quindi $M = f(x_0)$.

c.v.d.

TEOREMA VALORI INTERMEDI

$\boxed{\text{Una funzione } f(x) \text{ continua in } [a,b] \text{ assume tutti i valori compresi tra massimo e minimo.}}$

DIM. Sia $y_0 \in [f(x_m), f(x_M)]$



costruiamo la funzione

$g(x) = y_0 - f(x)$

$g(x_m) = y_0 - f(x_m) > 0$

$g(x_M) = y_0 - f(x_M) < 0$

$g(x)$ deve avere almeno un x_0 tale che

$g(x_0) \qquad y_0 - f(x_0) = 0 \qquad y_0 = f(x_0)$

c.v.d.