NOZIONI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

INSIEMISTICA

INSIEME è sinonimo di classe, collezione, aggregato, ecc. di oggetti. Gli **ELEMENTI** di un insieme sono gli oggetti che costituiscono l'insieme. **PROPRIETÀ** è sinonimo di relazione, nesso, legame, ecc.

Sia X un insieme. Per denotare che x è un elemento di X, si usa la scrittura:

$$x \in X$$

che si legge "x appartiene ad X". Per denotare che x non appartiene ad X, si usa la scrittura

$$x \notin X$$

che si legge "x non appartiene ad X".

Siano X e Y due insiemi. Per denotare che ogni elemento di X è anche elemento di Y, si scrive:

$$X \subset Y \quad \text{oppure} \quad Y \supset X$$

e si dice che "X è contenuto (o incluso) in Y".
Per denotare che X non è contenuto in Y si scrive

$$X \not\subset Y \quad \text{oppure} \quad Y \not\supset X$$

Se $X \subset Y$ ed $Y \subset X$ allora X ed Y hanno gli stessi elementi. Quindi per deno-tare tale condizione abbiamo

$$X = Y$$

La scrittura $X \neq Y$ sta a denotare che X e Y non hanno gli stessi elementi e cioè che esiste almeno un elemento di uno dei due insiemi che non appartiene all'altro.

Se $X \subset Y$ e $X \neq Y$ si dice che X è contenuto strettamente in Y oppure che X è un sottoinsieme di Y.

Si vuole denotare con $\{x\}$ l'insieme costituito dal solo elemento x, mentre con

$$\{x_1, \dots, x_n\}$$

l'insieme costituito dagli elementi $x_1, \dots, x_n$. Risulta utile introdurre anche un insieme privo di elementi, detto INSIEME VUOTO: $\emptyset$. È ovvio che qualunque sia X abbiamo

$$\emptyset \subset X$$

Sia X un insieme e sia P una proprietà definita in X, tale che per ogni $x \in X$ si sappia che x ne gode oppure no. Esiste evidentemente un sottoinsieme di X i cui elementi sono tutti gli $x \in X$ per i quali la proprietà P è vera. Tale sottoinsieme di X si denota con la scrittura:

$$\{x \in X \mid P\}.$$

Ovviamente $\{x \in X \mid P\} \subset X$.

Siano A e B due proposizioni o affermazioni generiche. La scrittura

$$A \Rightarrow B$$

che si legge "A implica B" sta ad indicare se A è vera allora è vera anche B (quindi abbiamo che A è la IPOTESI e B è la TESI). Ovviamente si può anche avere che A è falsa (ma in tal caso tale scrittura vuole indicare che una proposizione falsa implica una qualsiasi proposizione, vera o falsa).

Se $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$ si dice che A e B sono <u>equivalenti</u> e si scrive:

$$A \Leftrightarrow B$$

Avendo $A \Rightarrow B$ si dice che A è condizione sufficiente per il verificarsi di B. Quando $A \Leftrightarrow B$ si dice che il verificarsi di A è <u>condizione necessaria e sufficiente</u> per il verificarsi di B o che A è vera <u>se e solo se</u> è vera B.

Ovviamente con ovvio significato abbiamo anche:

$$A \not\Rightarrow B \quad , \quad A \not\Leftrightarrow B$$

Altri strumenti utili sono:

$$\forall \; , \; \exists \; , \; \exists! \; , \; :$$

che si leggono rispettivamente "<u>per ogni</u>", "esiste almeno uno", "<u>esiste un unico</u>", <u>risulta</u>. Una rapida interpretazione è data dal seguente esempio:

$$\forall y \in \mathbb{R}_+ , \; \exists \, x \in \mathbb{R} \mid x^2 = y$$

cioè per ogni numero reale positivo y, esiste almeno un numero reale x tale che $x^2 = y$.

Ma anche

$$\forall y \in \mathbb{R}_+ , \; \exists! \, x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 = y$$

cioè per ogni numero reale positivo y, esiste un unico numero reale positivo x tale che $x^2 = y$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0$$

per ogni numero reale x risulta $x^2 \geq 0$.

<u>CONCETTO DI FUNZIONE</u>

Siano E ed F due insiemi.

Si chiama <u>funzione definita in E ed a valori in F</u> o <u>applicazione di E in F</u>, una legge f la quale ad ogni elemento di E fa corrispondere uno ed uno solo elemento di F. Per denotare che f è un'applicazione di E in F, si usa la scrittura:

$$f : E \to F$$

L'insieme E prende il nome di <u>insieme di definizione</u> di f. L'elemento di F che la funzione f fa corrispondere all'elemento di

$x \in E$ si denota abitualmente con $f(x)$ e si chiama immagine di x mediante f o valore di f in x. La funzione $f: E \to F$ si denota anche con la scrittura

$$x \in E \to f(x) \in F$$

o, più semplicemente, quando non vi sia possibilità di equivoci, con la scrittura

$$x \to f(x)$$

Sia assegnata la funzione $f: E \to F$

Per ogni sottoinsieme $A \subset E$ si chiama immagine di A mediante f, e si denota con $f(A)$, il sottoinsieme di F costituito dagli elementi che sono immagini mediante f di elementi di A cioè:

$$f(A) = \{ y \in F \mid \exists x \in A \mid : f(x) = y \}$$

Brevemente possiamo anche scrivere

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

L'insieme $f(E)$ si chiama immagine (o codominio) di f.

L'applicazione f si dice suriettiva se la sua immagine è tutto F, ovvero se:

$f: E \to F$ è suriettiva se $\forall y \in F, \exists x \in E : f(x)$

Esempio $x \in \mathbb{Z} \to |x| + 1 \in \mathbb{N}$ è suriettiva

poiché $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists \; x \in \mathbb{Z} \mid |x|+1 = n$

mentre
$$x \in \mathbb{R} \to x^2 + 2 \in \mathbb{R}_+ \text{ non è suriet}$$

poiché $1 \in \mathbb{R}_+$ ma $\nexists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 1$

Quindi la scelta del dominio e del codominio è fondamentale per le proprietà delle funzioni.

Per ogni sottoinsieme B di F ($B \subset F$), si chiama immagine inversa di B mediante f, e si denota con $f^{-1}(B)$, il sottoinsieme di E costituito dagli elementi $x \in E$ tali che $f(x) \in B$

In formule:

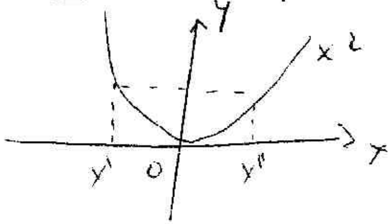
$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \} \subset E$$

Siano ora E, F due insiemi e $A \subset E$.
Per ogni applicazione $f: E \to F$, l'applicazione di A in F che ad ogni $x \in A$ associa $f(x)$ si chiama <u>restrizione di f ad A</u> e si denota con $f_{/A}$. Inoltre assegnata la applicazione $f: A \to F$, ogni applicazione $g: E \to F$ tale che $g_{/A} = f$ si dice che è un <u>prolungamento di f in E</u>.

Un'applicazione $f: E \to F$ si dice <u>iniettiva</u> o <u>invertibile</u> se per ogni $y \in F$ esiste al più un elemento $x \in E$ tale che $f(x) = y$, ossia se:

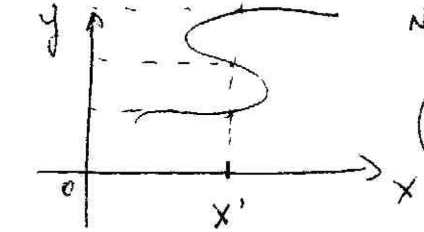
$$\forall x', x'' \in E : x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')$$

<u>ESEMPIO</u> La parabola non è iniettiva. Infatti

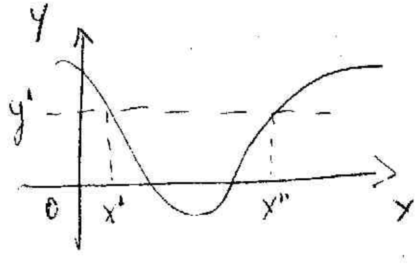


Quindi bisogna restringersi da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}_+$ oppure $\mathbb{R}_-$.

Se $f: E \to F$ è iniettiva, l'applicazione di $f(E)$ in E che ad $y \in f(E)$ fa corrispondere quell'unico $x \in E$ tale che $f(x) = y$ si chiama <u>applicazione inversa di f</u> e si denota con f^{-1}.
È ovvio, quindi, che per invertire una funzione quest'ultima deve essere iniettiva altrimenti per un dato y vi sono due valori $x \in E$ che possono essere associati.
Da notare inoltre, che la funzione è definita come applicazione che per ogni $x \in E$ associa uno ed uno solo elemento $y \in F$. Se vogliamo che questo sia vero anche per l'inversa allora f deve essere iniettiva.



NON È UNA FUNZIONE
$\left(y^3 = f(x)\right)$



È UNA FUNZIONE MA NON È INIETTIVA QUINDI L'INVERSA PRESENTA LO STESSO PROBLEMA DELLA PRECEDENTE.

È intuitivo notare quindi che

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

Una funzione $f: E \to F$ si dice <u>biettiva</u> se è iniettiva e suriettiva, ovvero se

$$\forall y \in F, \exists! x \in E \quad f(x) = y$$

Siano tre insiemi E, F, G e due applicazioni

$$f: E \to F \quad , \quad g: F \to G$$

si chiama <u>applicazione (o funzione) composta</u> di f e g, e si denota con $g \circ f$, l'applicazione di E in G che ad ogni $x \in E$ fa corrispondere l'elemento $g(f(x)) \in G$, ovvero l'applicazione $g \circ f: E \to G$ definita da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in E$$

Osserviamo che qualunque siano le funzioni

$$f: E \to F, \; g: F \to G, \; h: G \to H$$

si ha la proprietà (associativa):

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

<u>N.B.</u> mentre $h \circ f \circ g \neq h \circ g \circ f$.

<u>OPERAZIONE TRA INSIEMI</u>

Siano A, B due sottoinsiemi di E $(A, B \subset E)$ abbiamo:

UNIONE DI A e B

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

INTERSEZIONE DI A e B

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

se $A \cap B = \emptyset$ A, B sono disgiunti.

COMPLEMENTO DI A

$$\complement A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

COMPLEMENTO DI A RISPETTO A B

$$B - A = \{x \in E / x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

INOLTRE SONO VERE LE SEGUENTI PROPRIETÀ

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ SONO ABBASTANZA INTUITIVE
$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$
$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

Siano $x, y \in X$ oppure $x \in X$ e $y \in Y$ si chiama <u>coppia ordinata</u> (x, y) l'insieme $\{x, y\}$ con l'ordine che pone in $(,)$ prima x e poi y.
Pertanto $(x, y) \neq (y, x)$ per $x \neq y$. In maniera analoga si introduce per $\forall n \geq 2$, la nozione di <u>n-pla ordinata</u> $\{x_1, ---, x_n\}$.

Siano E, F due insiemi. Si chiama <u>prodotto cartesiano</u> di E e F e si denota con $E \times F$ l'insieme delle coppie ordinate (x, y) con $x \in E$ e $y \in F$.

Per ogni applicazione $f: E \to F$ il sottoinsieme di $E \times F$:

$$G = \{\{x, y\} \in E \times F \mid x \in E,\ y = f(x) \in F\}$$

è detto <u>grafico</u> di f

I NUMERI REALI

I numeri reali sono un insieme ($\mathbb{R}$) con le seguenti strutture:

A) ORDINAMENTO TOTALE, cioè una relazione $\leq$ (si legge minore uguale) tra coppie di elementi di $\mathbb{R}$, che gode delle seguenti proprietà:

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha $a \leq b$ oppure $a \geq b$ (DICOTOMIA)
- $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (TRANSITIVA)
- $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$ (ANTISIMMETRICA)
- $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha $a \leq a$ (RIFLESSIVA)

B) ADDIZIONE, cioè un'applicazione che ad ogni coppia di numeri reali a, b fa corrispondere un numero reale, che si indica, con $a + b$ con le seguenti proprietà:

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha $a + b = b + a$ (COMMUTATIVA DELLA SOMMA)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ASSOCIATIVA DELLA SOMMA) e perciò si può scrivere senza ambiguità $a + b + c$.

- Esiste un elemento nullo 0 (zero) tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ $\quad 0 + a = a + 0 = a$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists!$ elemento opposto $\in \mathbb{R}$, denotato con $-a$, tale che $a + (-a) = 0$.

 In generale si scrive $b - a$ e non $b + (-a)$

(C) MOLTIPLICAZIONE, che ad $a, b \in \mathbb{R}$ fa corrispondere un elemento di $\mathbb{R}$, indicato con $a \times b$, o più brevemente con ab, e che verifica

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha $ab = ba$ (COMMUTATIVA DEL PRODOTTO)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha $a(bc) = (ab)c$ (ASSOCIATIVA DEL PRODOTTO)
- $\exists!$ elemento, 1 (uno), diverso da zero, tale che
 $$1a = a1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists!$ elemento $\in \mathbb{R}$, denotato con a^{-1} (inverso di a), tale che $a a^{-1} = a^{-1} a = 1$

 a^{-1} si indica anche con $1/a$

Per quanto riguarda i rapporti fra le strutture A, B, C si ottengono le seguenti proprietà:

(A+B) $\quad a \leq b \iff a + c \leq b + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

(A+C) $\quad 0 \leq a, 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

(B+C) $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a(b+c) = ab + ac$ (DISTRIB.)

Sia $a \in \mathbb{R}$, si definisce VALORE ASSOLUTO (o MODULO) di a il massimo tra i due numeri a e $-a$:

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Si deduce immediatamente dalla definizione che $|a| \geq 0$, e che $|a| = 0 \iff a = 0$.

Inoltre si ha

$$a \leq |a| \quad e \quad -a \leq |a|$$

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, dalla (A+B) e dalla relazione $b \leq |b|$ segue che

$$a + b \leq a + |b| \leq |a| + |b|$$

$$-(a+b) = -a + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$$

Ma $|a+b| = \max\{a+b, -(a+b)\}$ si deduce pure

$|a+b| \le |a|+|b|$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

poniamo $a+b=-c$ (questo è sempre possibile $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, quindi $b=-c-a$ otteniamo

$|a-c\cancel{-a}| \le |a|+|-c-a|$

$|-c| \le |a|+|-(c+a)|$

$|c| \le |a|+|c+a|$

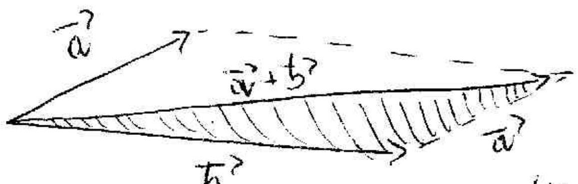
$|a+c| \ge |c|-|a|$

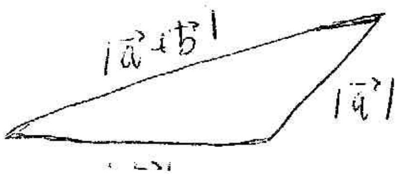
Quindi possiamo riassumere che $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ sono sempre valide le relazioni

$$|a+b| \le |a|+|b| \quad e \quad |a+b| \ge |a|-|c|$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori:





- Un lato è inferiore alla somma degli altri due
- Un lato è maggiore della differenza degli altri due

Le proprietà A, B, C riguardano solo la struttura algebrica di $\mathbb{R}$, e sono ancora insufficienti a descrivere completamente il sistema dei numeri reali. Ciò che manca è un'assioma che renda conto di una delle più importanti proprietà dei numeri reali: la CONTINUITÀ, una proprietà che li distingue da altri classi di numeri e che li rende lo strumento più adatto per la necessità dell'analisi non appena si passi dalle operazioni algebriche elementari allo studio di relazioni più complesse.

Cominciamo con l'osservare come sia possibile considerare i numeri interi ($\mathbb{N}$) come una sottoclasse dei numeri reali ($\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$).

Infatti poiché $1 \in \mathbb{R}$ anche $1+1$, $2+1$, ... appartengono ad $\mathbb{R}$.

L'insieme dei numeri $\mathbb{N}$ con l'aggiunta dello zero e dei loro opposti $-1, -2, -3, \ldots$ costituiscono l'insieme dei numeri relativi ($\mathbb{Z}$)

Da notare che sia in $\mathbb{N}$ che $\mathbb{Z}$ sono definiti sia un ordinamento che una somma e un prodotto, ma che essi non godono di tutte le proprietà.

Un numero $a \in \mathbb{R}$ si dice razionale se è proporzionale di due interi $p, q \in \mathbb{Z}$ cioè:

$$\mathbb{Q} = \{ a \in \mathbb{R} \mid a = p/q \ , \ p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \}$$

$\sqrt{2}$ è razionale? NO

Supponiamo che $\exists\, a \in \mathbb{Z}$ tale che $a^2 = 2$

Dunque

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \iff p^2 = 2q^2$$

dove p e q sono due numeri interi primi tra loro.

Dato che $2q^2$ è divisibile per 2 allora p^2 è pari, ma sarà pari anche p.

$$p = 2m \implies 4m^2 = 2q^2 \iff q^2 = 2m^2$$

per lo stesso discorso anche q è pari. Ma allora q e p non sono primi (essendo divisibili per 2). Quindi non esiste nessun numero razionale il cui quadrato è pari a 2.

Ecco l'esigenza dell'ASSIOMA DI DEDEKIND

Introduciamo prima il concetto di sezione di un insieme.

Sia $A, B \subset \mathbb{R}$ non $A, B \neq \emptyset$ tali che

$$A \cup B = \mathbb{R} \qquad A \cap B = \emptyset$$

la coppia (A, B) è detta SEZIONE DI $\mathbb{R}$.

Per esempio

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \}$$

può essere una sezione di $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{ASSIOMA DI DEDEKIND: } \forall\, (A,B) \text{ di } \mathbb{R} \ \exists!\, L \in \mathbb{R} \text{ tale che } a \leq L \leq b \quad \forall\, a \in A,\ b \in B.}$$

$L \in \mathbb{R}$ è detto elemento separatore delle classi A, B.

Riprendendo il caso di $a^2 = 2$ costruiamo una sezione di $\mathbb{Q}$ come segue:

$$\mathbb{Q} = A \cup B \quad \text{con} \quad A \cap B = \emptyset$$

$$A = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q < 0 \} \cup \{ q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0 \text{ e } q^2 < 2 \}$$

$B = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0 \text{ e } q^2 \geq 2 \}$

Notiamo però che non vi è nessun elemento separatore in $\mathbb{Q}$. Supponiamo che $L \in A$.

Ovviamente $L^2 \leq 2$ ($L<0$ è da escludere) ma anche l'uguaglianza è da escludere (non esiste L tale che $L^2 = 2$). Quindi $L^2 < 2$.

Sia ora $n \in \mathbb{N}$ tale che $L + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$

$$\left(L+\frac{1}{n}\right)^2 = L^2 + \frac{2L}{n} + \frac{1}{n^2} \leq L^2 + \frac{2L}{n} + \frac{1}{n} = L^2 + \frac{2L+1}{n}$$

la scelta di n (che è arbitraria) è tale che $\left(L+\frac{1}{n}\right)^2 < 2$ (Infatti ponendo $L^2 + \frac{2L+1}{n} < 2$ si ottiene $n > \frac{2L+1}{2-L^2}$)

Dunque anche $L + 1/n \in A$ ma allora $L + \frac{1}{n} > L$ ed è violata l'ipotesi che L sia l'elemento separatore. Dunque $\mathbb{Q}$ non è dotato dell'ASSIOMA DI DEDEKIND.

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e supponiamo che esista il <u>**MASSIMO**</u> di A, cioè che ci sia un numero $L \in A$ tale che per ogni elemento di A ($a \in A$) si abbia $L \geq a$.

Le proprietà che caratterizzano L sono:

$\forall a \in A$ si ha $a \leq L$ (OSSIA L è un MAGGIORANTE di A)

$L \in A$ quindi in particolare non esistono maggioranti di A che sono più piccoli di L.

In altre parole il <u>massimo di A</u>, se esiste, è <u>il più piccolo dei maggioranti di A</u>. Analogamente il <u>minimo di A</u>, se esiste, è <u>il più grande dei minoranti di A</u>.

Si noti che non tutti gli insiemi hanno massimo; ad esempio un intervallo del tipo

$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad a<b$

non ha né massimo né minimo.

D'altra parte per ogni insieme limitato A esiste il <u>minimo dei maggioranti</u> ed il massimo dei minoranti. Questi vengono definiti ESTREMO SUPERIORE ed ESTREMO INFERIORE di A e coincidono il massimo ed il minimo quando questi esistono.

In simboli abbiamo

$$\sup A \qquad \inf A$$

e godono della proprietà $\inf A \leq \sup A$

PROPRIETÀ CHE CARATTERIZZANO IL SUP E L'INF

Sia $A \subset \mathbb{R}$ A insieme limitato superiormente

Sia $L = \sup A \in \mathbb{R}$. Abbiamo:

- $\forall a \in A$ si ha $a \leq L$
- $\forall \lambda < L \quad \exists a \in A$ tale che $\lambda < a$

In maniera analoga abbiamo per l'INF

Sia $A \subset \mathbb{R}$ A insieme limitato inferiormente

Sia $L = \inf A \in \mathbb{R}$ Abbiamo

$\forall a \in A$ si ha $L \leq a$

$\forall \lambda > L \quad \exists a \in A$ tale che $a < \lambda$

Per uniformità di linguaggio risulta comodo dare la nozione di estremo superiore ed inferiore anche per insiemi numerici non limitati.

Se $A \subset \mathbb{R}$ per il quale abbiamo

$$\forall a \in A \quad \exists x \in A \mid x < a$$

si dice che A ha estremo inferiore "$-\infty$"

$$\inf A = -\infty$$

Se $A \subset \mathbb{R}$ per il quale abbiamo

$$\forall a \in A \quad \exists x \in A \mid x > a$$

si dice che A ha estremo superiore "$+\infty$"

$$\sup A = +\infty$$

PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE: $\mathbb{N}$ è un insieme numerico non limitato superiormente.

ASSURDO: Se $\sup \mathbb{N} < \infty$ allora $\exists n$ tale che

$$n > (\sup \mathbb{N}) - 1 \implies n+1 > \sup \mathbb{N}$$

ma se $n \in \mathbb{N}$ anche $n+1 \in \mathbb{N}$ quindi

$\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Un insieme numerico $X \subset \mathbb{R}$ è detto essere <u>DENSO</u> in $\mathbb{R}$ se $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ esiste ($\exists$) $x \in X$ tale che

$$a < x < b$$

$$\boxed{\text{Si dimostra che gli insiemi } \mathbb{Q} \text{ e } \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ sono densi in } \mathbb{R}}$$

RADICE n-ESIMA DI UN NUMERO REALE POSITIVO.

$\forall a \in \mathbb{R}_+$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ il numero reale $b \in \mathbb{R}_+$ soluzione dell'equazione

$$b^n = a$$

è detto <u>radice n-ma aritmetica</u> di a e si denota con il simbolo

$$\sqrt[n]{a}$$

Si pone $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{0} = 0$$

Le proprietà che caratterizzano le radici sono le seguenti:

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{a'} = \sqrt[n]{a a'} \qquad \forall a, a' \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \forall a \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a} \qquad \forall a \geq 0 \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$$

RAPPRESENTAZIONE DEGLI INTERVALLI DI $\mathbb{R}$

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

Dati gli insiemi numerici

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $\quad$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ $\quad$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

si dicono <u>intervallo limitato</u> (di $\mathbb{R}$) <u>di estremi a e b</u>, rispettivamente, <u>chiuso</u>, <u>semiaperto a destra</u>, <u>semiaperto a sinistra</u>, <u>aperto</u>. Essi possono essere denotati anche con i simboli:

$[a, b]$ $\quad$ $[a, b)$

$(a, b]$ $\quad$ (a, b)

Evidentemente ogni intervallo limitato di estremi a e b è un insieme numerico limitato, di cui a e b sono l'estremo inferiore e superiore.

$\forall a \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ si chiamano rispettivamente intervallo chiuso non limitato superiormente di estremi a e $+\infty$, intervallo aperto non limitato superiormente di estremi a e $+\infty$, e si denotano in simboli:

$$[a, +\infty) \quad e \quad (a, +\infty)$$

In maniera analoga abbiamo

$$(-\infty, a] \quad e \quad (-\infty, a)$$

Infine l'insieme $\mathbb{R}$ può essere rappresentato come

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Ogni numero di un intervallo distinto dagli estremi si dice interno all'intervallo

Sia I un intervallo di estremi a e b 14
i numeri:

$$b-a, \quad \frac{b-a}{2}, \quad \frac{a+b}{2}$$

si chiamano rispettivamente ampiezza, semiampiezza e centro di I.

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ si chiama intorno di x_0 ogni intervallo aperto di centro x_0. Evidentemente I è un intorno di x_0 se e solo se esiste $\delta \in \mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ tale che

$$I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

L'intervallo (a, b) può essere anche riscritto come segue:

$$\left(\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{CENTRO di } I}, \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{\text{SEMIAMPIEZZA}} \right)$$

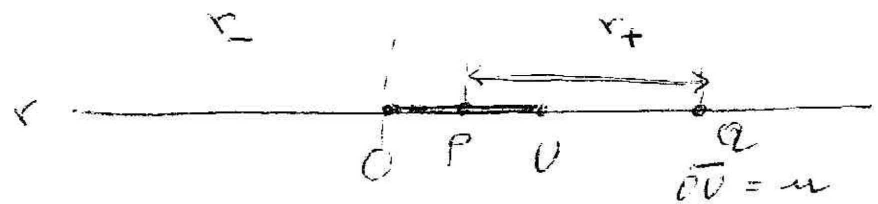
Sarà, tuttavia, fondamentale ogni volta specificare cosa si vuol rappresentare.

RAPPRESENTAZIONE IN $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$

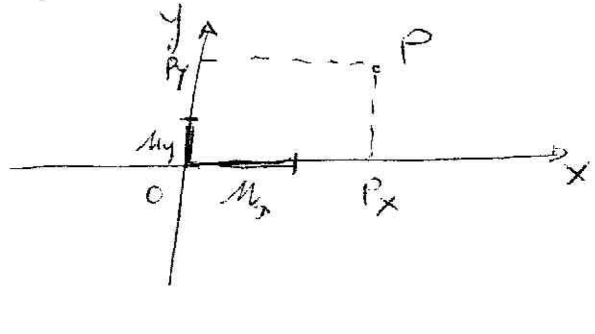
Sia r una retta. Fissiamo in r due punti distinti O, U ed indichiamo con r_+ la semiretta di origine O e cui appartiene U, con r_- l'altra semiretta di sostegno r.
Scelta come unità di misura dei segmenti il segmento u di estremi O ed U, per ogni coppia di punti P e Q di r indichiamo con $\overline{PQ}$ la misura del segmento di estremi P e Q se $P \neq Q$, lo zero se $P = Q$.
Poniamo quindi $\forall P \in r$

$$a_P = \begin{cases} = \overline{OP} & \text{se } P \in r_+ \\ = -\overline{OP} & \text{se } P \in r_- \end{cases}$$

Si dice allora che si è fissato in r un riferimento cartesiano di origine O e punto unità U. La retta r si chiama <u>retta cartesiana</u> o <u>asse cartesiano</u>: tale asse si intende orientato nel verso che porta da O a U. Le semirette r_+ e r_- si chiamano rispettivamente <u>semiasse positivo</u> e <u>semiasse negativo</u>.



$\forall P \in r$, il numero $a_P \in \mathbb{R}$ si chiama ascissa di P (rispetto al riferimento cartesiano).
Evidente che l'ascissa di O è 0 (zero) ed U è 1 (uno).
Assegniamo in un piano Π, due rette ortogonali x e y; indichiamo con O il loro punto di intersezione e fissiamo in ciascuna di esse un riferimento cartesiano di origine O.
Si dice che si è fissato sul piano Π un riferimento cartesiano ortogonale (x, y).
Per ogni punto $P \in \Pi$ indichiamo con P_x (e P_y) la proiezione ortogonale di P su x (e su y) e con a (e b) l'ascissa di P_x (P_y) rispetto al riferimento cartesiano x (y).



Il numero reale a si chiama ascissa (o prima coordinata) di P, il numero reale b si chiama ordinata (o seconda coordinata) di P. Resta così un'applicazione $P \to (P_x, P_y) \in \Pi$ in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Per ogni coppia $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il punto $P \in \Pi$ si chiama immagine in Π di (a,b).
Per il resto degli argomenti trattati supporremo sempre $u_x = u_y$ (SISTEMA MONOMETRICO).

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Uno strumento efficace per lo studio di molte questioni matematiche è il seguente teorema:

Sia $A \subset \mathbb{N}$ tale che

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ 1 \in A \\ \cdot\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \in A \Rightarrow n+1 \in A \end{array}\right\} \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

DIM Sia $\complement A$ il complemento di A. Basta dimostrare che $\complement A = \emptyset$.
Supponiamo per assurdo che $\complement A \neq \emptyset$ ed indichiamo con m il più piccolo numero di $\complement A$:
cioè in formule
Sia $m \in \complement A$ tale che $\forall p \in \complement A \quad m \leq p$
Siccome $1 \in A \Rightarrow m > 1$ per cui abbiamo che $n = m-1 \in \mathbb{N}$ (cioè n non sarà negativo), quindi $m = n+1 \in A$.
m apparterrebbe contemporaneamente ad A e $\complement A$ che sono disgiunti per costruzione.
Quindi $\complement A = \emptyset$. CVD
Altra variante del principio può essere la seguente affermazione:

Supponiamo che una proposizione dipendente da un indice $n \in \mathbb{N}$ sia vera per $n=1$ e che inoltre, supposta vera per n, sia vera anche per il successivo $n+1$. Allora la proposizione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

APPLICAZIONI PRINCIPIO D'INDUZIONE

Dunque la procedura da seguire può essere riassunta come segue

[Sia $\{P_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ una famiglia di proposizioni
Se P_1 è vera e $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n implica P_{n+1}
allora P_n è vera $\forall\, n \in \mathbb{N}$.]

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

o anche $1+2+3+\dots+(n-1)+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

se $n=1$ $\quad 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ è vera.

Sia $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$S_{n+1} = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{ip. ind.}} + n+1 = \frac{n(n+1)+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = S_{n+1} \quad \text{ok!}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ con $a \geq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \text{(DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI)}$$

se $n=1$ $\quad (1+a) \geq 1+a$ è vera.

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+a)(1+na)$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a \quad \text{ok!}$$

Notiamo che posto $b = 1+a$ otteniamo

$$b^n \geq 1+n(b-1) \quad \forall b \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ $0 \leq a \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(1-a)^n \leq \frac{1}{1+na}$$

se $n=1$ $\quad 1-a \leq \dfrac{1}{1+a}$ $\quad \dfrac{-a^2}{1+a} \leq 0$ $\quad \dfrac{a^2}{1+a} \geq 0$ è vera

$$(1-a)^{n+1} = (1-a)^n(1-a) \leq \frac{1}{1+na} \cdot \frac{1}{1+a}$$

$$(1-a)^{n+1} \leq \frac{1}{1+(n+1)a+na^2} < \frac{1}{1+(n+1)a} \quad \text{ok!}$$

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$ si ha

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

N.B. È la generalizzazione della differenza di quadrati e di cubi.

se $n=2$ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ è vera

$$a^{n+1}-b^{n+1} = a\,a^n - b\,b^n = a\,a^n - ab^n + ab^n - bb^n =$$

$$= a(a^n-b^n)+b^n(a-b)$$

$$= a(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})+b^n(a-b)$$

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\dots+ab^{n-1}+b^n)$$

ok!

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{p=0}^{n} x^p = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$ (SOMMA DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA)

se $n=1$ $\sum_{p=0}^{1} x^p = 1+x = \frac{1-x^2}{1-x}$ è vera

Sia $S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \Rightarrow S_{n+1} = S_n + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$

$1-x^{n+2}$ ok!

CALCOLO COMBINATORIO

Sia A un insieme costituito da n elementi

$$A = \{a_1, \dots, a_n\} \quad n \in \mathbb{N}$$

Sia k un numero naturale minore o uguale di n.

Una disposizione di k elementi tra gli n elementi $\in A$ è un sottoinsieme ordinato di A che ha k elementi. Per esempio $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ e scegliendo solo 2 dei tre elementi di A otteniamo:

$\{a_1,a_2\}$, $\{a_2,a_1\}$, $\{a_1,a_3\}$
$\{a_3,a_1\}$, $\{a_2,a_3\}$, $\{a_3,a_2\}$

$\{\cdot,\cdot\} \subset A$, quindi abbiamo 6 disposizioni differenti tra esse.

La generalizzazione della precedente affermazione consiste nel valutare $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$.

NUMERO DI DISPOSIZIONI DI k OGGETTI SU n POSTI

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

La giustificazione della precedente relazione è semplice. Scelto il primo elemento possiamo posizionarlo in n posizioni. Scelto il secondo elemento abbiamo a disposizione $(n-1)$ posizioni. Per il terzo solo $(n-2)$, ..., e per il k-mo elemento solo $(n-k+1)$. Quindi tutte le disposizioni sono il prodotto di $n, n-1, \dots, n-k+1$.

PERMUTAZIONI è il numero di disposizioni possibili quando $k=n$. Quindi il numero totale è

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \doteq n!$$

$n!$ è detto fattoriale di n.

Dunque il numero di disposizioni può essere riscritto come segue

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots}{(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

COMBINAZIONI di n oggetti in k posti si ottiene dal numero di disposizioni senza considerare le configurazioni che differiscono delle sole posizioni. Torniamo a considerare l'esempio di $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ composto soltanto 3 combinazioni diverse. Ed in generale partendo da $\frac{n!}{(n-k)!}$ disposizioni quante combinazioni otteniamo? Basta considerare che avendo k elementi avremo $k!$ permutazioni che corrispondono alla stessa situazione in cui abbiamo solo cambiato di posto. Quindi il numero di combinazioni è dato da

$$\binom{n}{k} \doteq \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{COEFFICIENTE}\\ \text{BINOMIALE}\end{array}\right)$$

e si legge "n su k" $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall k \in \{0,\dots,n\}$

Da notare alcune proprietà di $\binom{n}{k}$. Innanzitutto si pone $\boxed{0! = 1}$.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \left(\begin{array}{c}\text{HAI } n \text{ OGGETTI}\\ \text{DA DISPORRE IN}\\ \text{0 POSTI}\end{array}\right)$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1 \quad \left(\begin{array}{c}\text{HAI } n \text{ OGGETTI}\\ \text{DA DISPORRE IN}\\ n \text{ POSTI}\end{array}\right)$$

Per quanto detto precedentemente è ovvio che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$: Rappresentano la stessa configurazione.

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\,\cancel{(n-1)!}}{1!\,\cancel{(n-1)!}} = n \quad \left(\begin{matrix}\text{un oggetto}\\ \text{su } n \text{ posti}\end{matrix}\right)$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-n+1)!} = n \quad \left(\begin{matrix}n-1 \text{ oggetti}\\ \text{su } n \text{ posti}\end{matrix}\right)$$

anche in questo caso le due configurazioni sono simili. In generale abbiamo

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \iff \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!}}_{\text{ovvio}}$$

Sono degne di rilievo anche

• $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

infatti

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!\,k + n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!\,(n\cancel{-k}+1\cancel{+k})}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$= \binom{n+1}{k} \quad \text{ok!}$$

•• $$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

infatti

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{\cancel{k} + n - \cancel{k}}{k\,(n-k)} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \text{ok!}$$

BINOMIO DI NEWTON

$\forall\, a,b \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

cioè

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-2}a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

per $n=2$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k$$

$$= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2$$

$$= 1\cdot a^2 + 2ab + 1\cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k$$

$$= \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3$$

$$= 1\cdot a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

e così via.... Dimostriamo la formula del binomio utilizzando il processo di induzione.
per $n=1$ è vera.

$$(a+b)^n \cdot a = \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \dots + \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} a b^n$$

$$(a+b)^n \cdot b = \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^n b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \dots + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

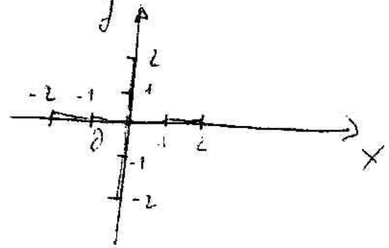
Sommando membro a membro si ottiene.

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] a^n b + \dots + \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^{n+1-k} b^k + \dots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

[illegible]

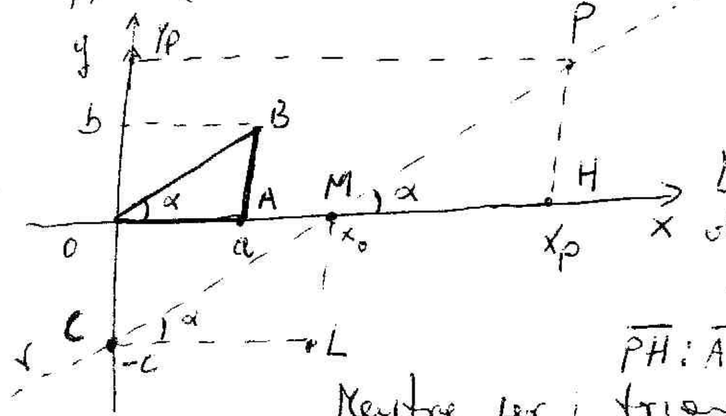
GEOMETRIA ANALITICA

Sia π un piano $\mathbb{R}^2$ ed un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico



RETTA

Analizziamo il luogo geometrico "retta" costituito dai punti $P \equiv (x,y) \in \mathbb{R}^2$ che godono di appartenere ad una retta. Ricaviamo la condizione matematica che devono soddisfare le coppie (x,y) affinché appartengano alla retta "r".



$r \parallel \overline{OB}$

Dalle similitudini dei triangoli OBA e MHP

$$\overline{PH} : \overline{AB} = \overline{MH} : \overline{OA}$$

Mentre per i triangoli OBA e CML

$$\overline{CL} : \overline{OA} = \overline{ML} : \overline{AB}$$

Da cui otteniamo

$$\overline{CL} = \frac{\overline{HL}}{\overline{AB}}\,\overline{OA} \quad e \quad \overline{PH} = \frac{\overline{HH}}{\overline{OA}}\cdot\overline{AB}$$

Sostituendo ai seguenti le grandezze algebriche:

$$x_0 = \frac{c}{b}a \qquad y_p = \frac{x_p - x_0}{a}b$$

da cui $a y_p = \left(x_p - \frac{c}{b}a\right) b$

$$\Rightarrow \quad a y_p - b x_p + c a = 0 \quad (\circ)$$

Quindi affinché $P \equiv (x_p, y_p)$ appartenga alla retta r che taglia l'asse y nel punto $(0,-c)$ con angolo α rispetto all'asse x (basta dare il rapporto b/a per individuare l'angolo), le coordinate x_p e y_p devono soddisfare l'equazione di primo grado $(\circ)$.

Poiché i valori di a, b, c sono del tutto arbitrari e al loro variare otteniamo infinite rette diverse possiamo scrivere:

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{EQUAZIONE RETTA}$$

quale equazione generica di una retta nel piano.

Volendo riscrivere in termini insiemistici, otteniamo che una retta è un luogo geometrico $\infty \in \Pi$ tale che i punti sono tutti allineati. 22

La sua rappresentazione in un piano $\mathbb{R}^2$ è una linea rettilinea, ed il grafico corrispondente:

$$G_{rette} = \left\{ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall a, b, c \in \mathbb{R} : ax + by + c = 0 \right\}$$

CALCOLO EQUAZIONE RETTA passante per due punti dati di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) - Affinché i punti P_1 e P_2 appartengano alla retta deve essere soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{cases} a x_1 + b y_1 + c = 0 \\ a x_2 + b y_2 + c = 0 \end{cases}$$

tale sistema non è risolvibile poiché abbiamo tre incognite (a, b, c) in due equazioni. Mentre dividendo per b (ipotizzando che $b \neq 0$) otteniamo

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{a}{b} x_1 - \frac{c}{b} \\ y_2 = -\frac{a}{b} x_2 - \frac{c}{b} \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = m x_1 + q \\ y_2 = m x_2 + q \end{cases}$$

Avendo definito $m \doteq -a/b$ e $q = -c/b$.

Ora il sistema è risolvibile rispetto alla coppia (m, q). Le soluzioni sono

$$\begin{cases} m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{con } x_1 \neq x_2 \\[2ex] q = \dfrac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2} \end{cases}$$

Supponendo $x_1 \neq x_2$ escludiamo rette perpendicolari all'asse x ($q \to \infty$). Il tutto è coerente, infatti $q \to \infty$ vorrebbe dire che l'asse y e la retta sono parallele. Da notare ancora che $q \to \infty$ implica che $b \to 0$, perché l'equazione della retta è priva del termine in y.
Inserendo le espressioni di m e q nella retta di equazione $y = mx + q$ abbiamo:

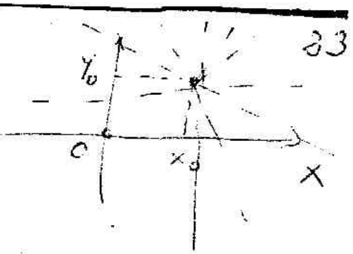
$$\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

m: coefficiente angolare
q: intercetta.
La loro interpretazione è semplice osservando il disegno di pagina 21: $m = -b/a$ e $q = -c$.
Nel caso si conosce un solo punto (x_0, y_0) si ottiene il cosiddetto fascio di rette passanti per (x_0, y_0).
Imponendo la condizione di appartenenza

$$y_0 = m x_0 + q$$

$\Rightarrow q = y_0 - m x_0$ per cui l'equazione della retta diviene:

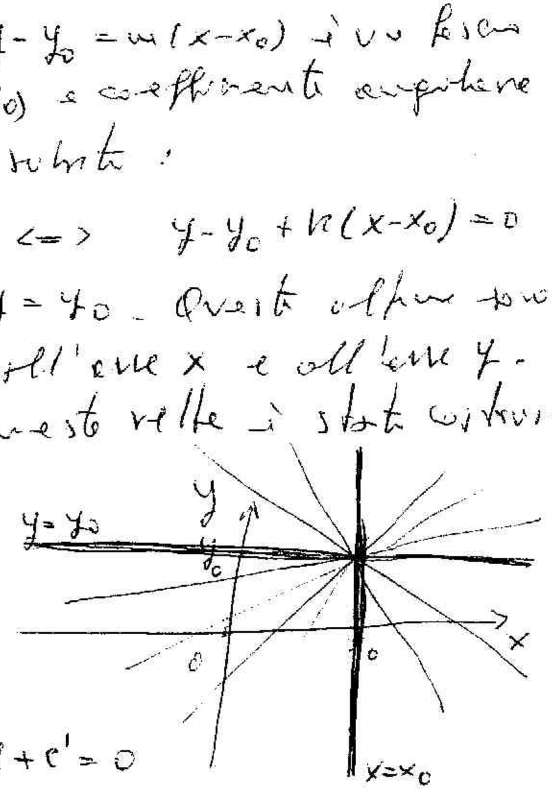
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



FASCIO DI RETTE: composto dalla sovrapposizione di due rette. In altre parole considerando due rette fondamentali r, r' il fascio è ottenuto considerando la combinazione $r + kr'$ con $k \in \mathbb{R}$.
Infatti la relazione $y - y_0 = m(x - x_0)$ è un fascio di rette passanti per (x_0, y_0) e coefficiente angolare generico m. Notiamo subito:

$$y - y_0 - m(x - x_0) = 0 \iff y - y_0 + k(x - x_0) = 0$$

da cui $x = x_0$ e $y = y_0$. Queste allora sono le rette perpendicolari all'asse x e all'asse y. Quindi si potrebbe che queste rette si sta costruito il fascio.



In generale basta considerare due rette generiche
$ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$
ed ottenere:

$$(a + ka')x + (b + kb')y + c + kc' = 0$$

da cui

$$A(k)x + B(k)y + C(k) = 0 \quad \left(\text{FASCIO RETTE GENERICHE}\right)$$

Da notare che se $A(u) = M\,B(u)$ con $M \in \mathbb{R}$ il fascio rappresenta un fascio di rette parallele di coefficiente angolare M ed intercetta generica.

Nel caso in cui $A(u)$, $B(u)$ sono generici basta riscrivere il fascio di rette generico come $r + u r'$ e si individuano le due rette generatrici del fascio.

INTERSEZIONE DI RETTE basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

e si individua la coppia (x_0, y_0) soluzione del sistema che rappresenta il punto in comune tra le due rette.

È ovvio che geometricamente le soluzioni del sistema può presentare tre tipologie:

nessuna soluzione (rette parallele)

una soluzione (rette sghembe)

infinite soluzioni (rette coincidenti).

POSIZIONE RECIPROCA TRA RETTE

Dallo studio del fascio si deduce che rette con coefficienti angolari uguali sono rette parallele. Quindi possiamo affermare che due rette sono parallele se

$$m = m' \iff \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \iff ab' - a'b = 0$$

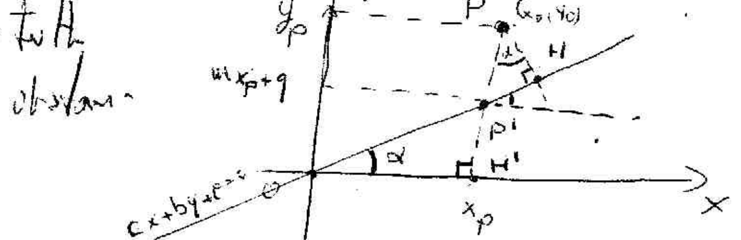
Due rette sono perpendicolari se i coefficienti angolari soddisfano la condizione

$$m = -\frac{1}{m'} \iff \frac{a}{b} = -\frac{b'}{a'} \iff aa' + bb' = 0$$

Tale relazione sarà dimostrata in seguito ( )

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

Supponiamo una retta di equazione $ax+by+c=0$ ed un punto (x_0, y_0). Calcoliamo la distanza $\overline{PH}$. Innanzitutto valutiamo la distanza $\overline{PP'}$



$$\overline{PP'} = |y_P - y_{P'}| = |y_p - m x_p - q| = \begin{cases} y_p - m x_p - q \\ -(y_p - m x_p - q) \end{cases}$$

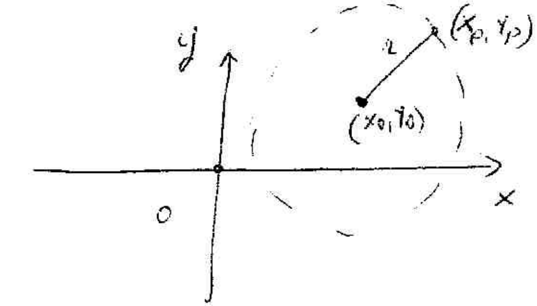
a seconda se P si trova "sopra" o "sotto" la retta $ax+by+c=0$.

Per i triangoli $OP'H'$ e PHP' otteniamo:

$$\overline{PH} : \overline{OH'} = \overline{PP'} : \overline{OP'} \iff \overline{PH} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}}\,\overline{OH'}$$

$$\overline{PH} = \frac{|y_p - m x_p - q|}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot b = \frac{|a x_p + b y_p + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ (DISTANZA PUNTO RETTA)

CIRCONFERENZA $C = \{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2, r\in\mathbb{R} \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2\}$



Quindi

$$(x_p-x_0)^2+(y_p-y_0)^2=r^2$$

$$x_p^2+y_p^2-2x_0x_p-2y_0y_p+x_0^2+y_0^2-r^2=0 \quad (\bigstar)$$

Affinché (x_p,y_p) appartenga alla circonferenza di centro (x_0,y_0) e raggio r deve essere soddisfatta la relazione $(\bigstar)$.

Senza perdere di generalità possiamo porre

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad \text{(EQUAZIONE CIRCONFERENZA)}$$

dove

$$\begin{cases} a=-2x_0 \\ b=-2y_0 \\ c=x_0^2+y_0^2-r^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0=-a/2 \\ y_0=-b/2 \\ r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} \end{cases}$$

Quindi i coefficienti a, b, c corrispondono geometricamente alle informazioni su centro e raggio circonferenza.

Inoltre affinché l'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ sia una circonferenza bisogna avere $a^2+b^2-c>0$. Possiamo riassumere, quindi, la circonferenza come quel luogo geometrico $\in \pi$ tale che i punti sono equidistanti da un punto fisso detto centro, ed il grafico corrispondente:

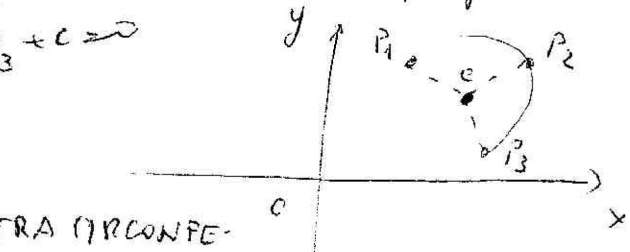
$$C_{circonf} = \{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \forall a,b,c\in\mathbb{R}\ \ a^2+b^2-c>0 : x^2+y^2+ax+by+c=0\}$$

In maniera analoga a quanto fatto per la retta l'equazione della circonferenza si ottiene imponendo la condizione di appartenenza di tre punti (condizione minima) alla circonferenza.

$P_1\equiv(x_1,y_1)$, $P_2\equiv(x_2,y_2)$, $P_3\equiv(x_3,y_3)$

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c=0 \\ x_2^2+y_2^2+ax_2+by_2+c=0 \\ x_3^2+y_3^2+ax_3+by_3+c=0 \end{cases}$$

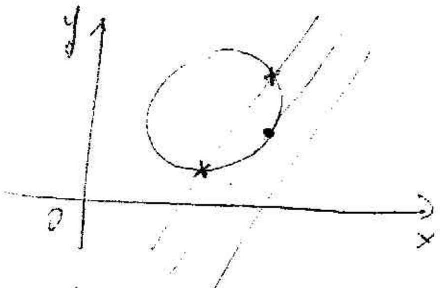
tre incognite (a,b,c) in tre equazioni



POSIZIONE RECIPROCA TRA CIRCONFERENZA E RETTA

Geometricamente sappiamo che la posizione di una retta rispetto ad una circonferenza può assumere tre tipologie: secante, tangente o esterna. Lo studio della posizione avviene valutando il sistema tra circonferenza e retta:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ y=mx+q \end{cases}$$



$$\Downarrow$$

$$(1+m^2)x^2+(2mq+a+bm)x+q^2+bq+c=0$$

Questa equazione può ammettere due soluzioni ($\Delta>0$) per cui vi saranno due distinti punti d'intersezione, una soluzione ($\Delta=0$) per cui vi sarà una radice doppia per il punto di tangenza ed infine nessuna soluzione ($\Delta<0$) per cui la retta è esterna alla circonferenza.

È cruciale, quindi, valutare Δ:

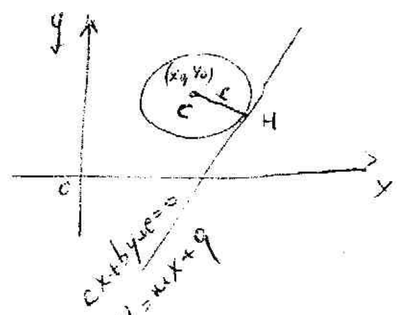
$$\Delta=\left[(2q+b)m+a\right]^2-4(1+m^2)\left[(q+b)q+c\right] \gtreqless 0$$

Da notare che in questa relazione abbiamo soltanto i parametri a, b, c ed m, q che identificano in maniera completa i nostri luoghi geometrici. Molto utile per il calcolo delle rette tangenti è notare che la distanza dal centro della circonferenza dalla retta deve essere pari al raggio.

Quindi:

$$\overline{CH}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

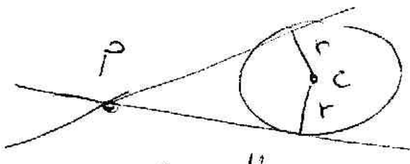
$$\overline{CH}=\frac{|y_0-mx_0-q|}{\sqrt{1+m^2}}$$



ma $\overline{CH}$ come raggio è pari a $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ per cui otteniamo:

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{\left|-\frac{b}{2}+m\frac{a}{2}-q\right|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Equazione che determina i due possibili valori di m quando il punto da cui devono condursi le tangenti è esterno alla circonferenza



FASCIO DI CIRCONFERENZE come per le rette è possibile anche per le circonferenze ottenere un fascio a partire da due circonferenze di base. Infatti:

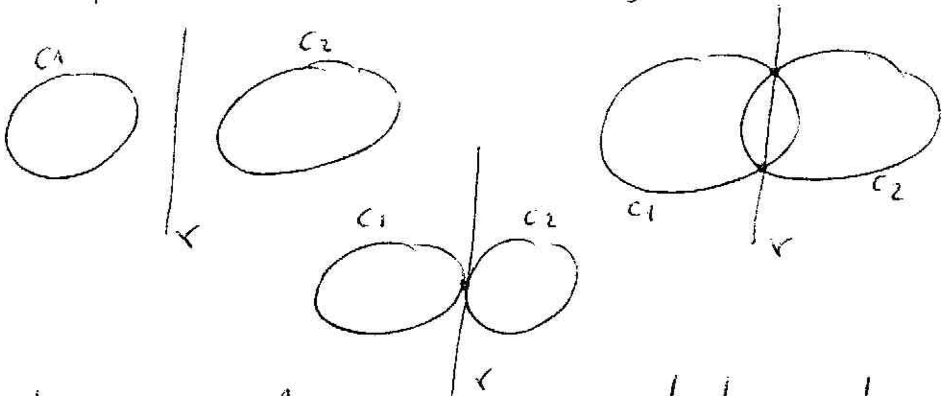
$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad e \quad x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$$

$$(1+k)[x^2+y^2]+(a+ka')x+(b+kb')y+c+kc'=0$$

ponendo $k=-1$ si ottiene

$$(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0 \quad \begin{pmatrix}\text{ASSE}\\ \text{RADICALE}\end{pmatrix}$$

che è l'equazione della retta del fascio (luogo geometrico dei punti che hanno la stessa potenza rispetto a tutte le circonferenze del fascio).

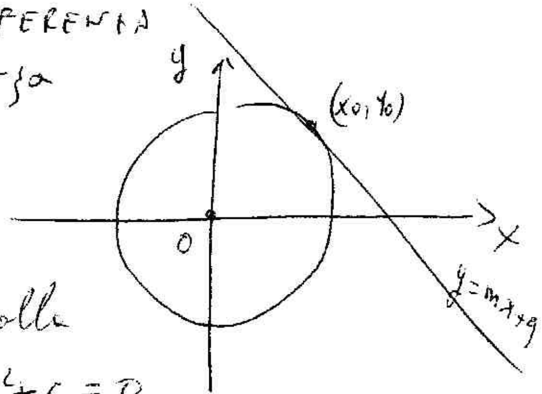


L'asse radicale può essere secante, tangente o esterno a tutte le circonferenze del fascio.
L'equazione del fascio di circonferenze può anche essere determinata da una circonferenza e dall'asse radicale (o in generale da una retta).
Quindi in generale otteniamo

$$x^2+y^2+A(k)x+B(k)y+C(k)=0 \quad \left(\text{FASCIO CIRCONFERENZE}\right)$$

RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA

Supponiamo una circonferenza del tipo $x^2+y^2+c=0$ (centro nell'origine).
Se (x_0,y_0) appartenente alla circonferenza: $x_0^2+y_0^2+c=0$



La retta tangente è del tipo $y-y_0=m(x-x_0)$.
Quindi

$$\begin{cases} x^2+y^2+c=0 \\ y-y_0=m(x-x_0) \end{cases} \Rightarrow \Delta=0$$

si ottiene $-(c+x_0^2)m^2+2x_0y_0m-y_0^2-c^2=0$

$$\Rightarrow y_0^2m^2+2x_0y_0m+x_0^2=0$$

$$(y_0m+x_0)^2=0 \Rightarrow m=-x_0/y_0$$

La retta è dunque:

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0) \Rightarrow yy_0-y_0^2=-xx_0+x_0^2$$

$$x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2 \Rightarrow \boxed{x_0x+y_0y+c=0}$$

Ricapitolando abbiamo costruito una retta tangente alla circonferenza $x^2+y^2+c=0$ nel $(x_0,y_0)\in$ circonf.

$$x^2+y^2+c=0 \qquad x_0x+y_0y+c=0$$

oppure

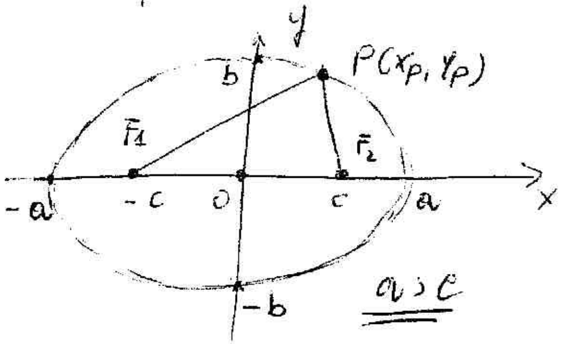
$$x^2+y^2=r^2 \qquad x_0x+y_0y-r^2=0$$

Questa struttura sarà presente anche per altri luoghi geometrici.

ELLISSE è il luogo geometrico dei punti $P \equiv (x,y) \in \mathbb{R}^2$ per i quali è costante la somma delle loro distanze da due punti fissi F_1 e F_2 dello stesso piano, detti fuochi.

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = cost.$

poniamo $cost = 2a$ con $a \in \mathbb{R}_+$



$$\sqrt{(x_p+c)^2+y_p^2} + \sqrt{(x_p-c)^2+y_p^2} = 2a$$

$$(x_p+c)^2+y_p^2 = (x_p-c)^2+y_p^2+4a^2-4a\sqrt{(x_p-c)^2+y_p^2}$$

$$\cancel{x_p^2}+2cx_p+\cancel{c^2}+\cancel{y_p^2} = \cancel{x_p^2}-2cx_p+\cancel{c^2}+\cancel{y_p^2}+4a^2-4a\sqrt{(x_p-c)^2+y_p^2}$$

$$4cx_p-4a^2 = -4a\sqrt{(x_p-c)^2+y_p^2}$$

$$(cx_p-a^2)^2 = a^2[(x_p-c)^2+y_p^2]$$

$$c^2x_p^2+a^4-\cancel{2ca^2x_p} = a^2x_p^2+c^2a^2-\cancel{2ca^2x_p}+a^2y_p^2$$

$$(c^2-a^2)x_p^2-a^2y_p^2 = c^2a^2-a^4$$

$$(a^2-c^2)x_p^2+a^2y_p^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$\frac{x_p^2}{a^2}+\frac{y_p^2}{a^2-c^2} = 1 \quad ; \quad b \doteq \sqrt{a^2-c^2} < a$$

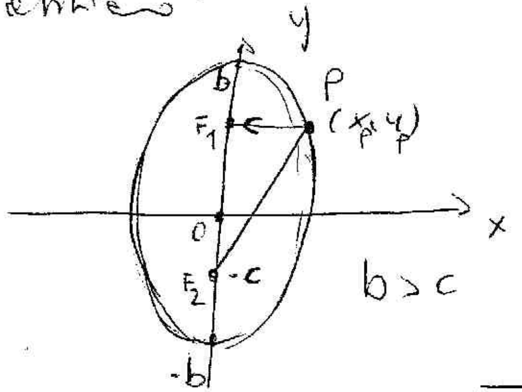
otteniamo $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (EQUAZIONE ELLISSE)

Per l'ellisse si introduce il concetto di eccentricità

$$e \doteq \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

quindi $0 \leq e < 1$. $e=0$ per la circonferenza.

L'equazione ricavata è per un'ellisse centrata nell'origine e "schiacciata" lungo l'asse y. Nel caso in cui $b>a$ avremmo uno schiacciamento lungo l'asse x. Infatti in questo caso abbiamo



$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$$

$$\sqrt{x_p^2+(y_p+c)^2}+\sqrt{x_p^2+(y_p-c)^2} = 2b$$

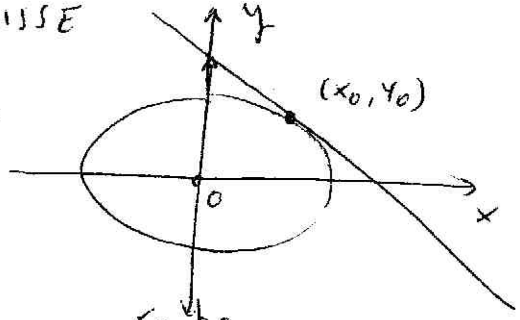
con passaggi simili al caso precedente si ottiene: $\frac{x_p^2}{b^2-c^2}+\frac{y_p^2}{b^2}=1$

Introducendo $c \doteq \sqrt{b^2-a^2}$ otteniamo

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ma con $b>a$.

Da notare che nel caso in cui $a=b$ otteniamo l'equazione della circonferenza di raggio b: $x^2+y^2=b^2$

RETTA TANGENTE ALL'ELLISSE



$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = 0 \implies m = -\frac{x_0 y_0}{a^2 - x_0^2}$$

avendo sfruttato la condizione $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$ ne otteniamo ancora

$$m = -\frac{x_0 y_0}{a^2 - \left(a^2 - \frac{y_0^2}{b^2} a^2\right)} = -\frac{x_0 y_0}{y_0^2 \, a^2 / b^2}$$

$$m = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$$. la retta tangente diviene

$$y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0} x + \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0^2}{y_0} + y_0$$

$$a^2 y_0 y + b^2 x_0 x - a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2 = 0$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2}{a^2 b^2} = 0$$

infine

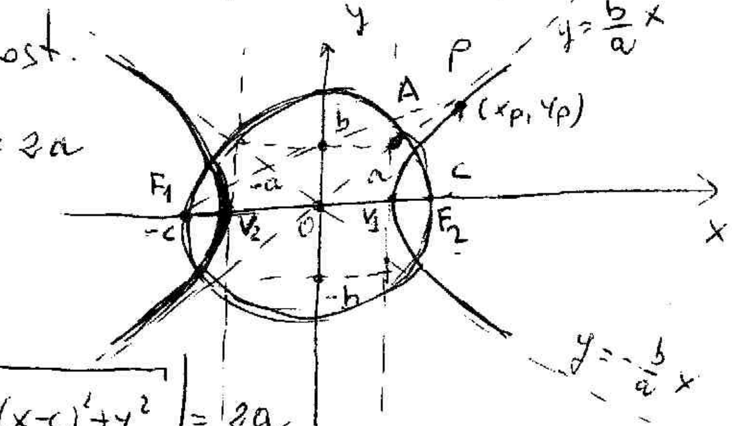
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$$

Equazione ottenuta formalmente simile a quella trovata per la circonferenza.

IPERBOLE è il luogo geometrico dei punti $P \equiv (x, y) \in \mathbb{R}^2$ per i quali è costante la differenza delle loro distanze da due punti fissi F_1 e F_2 dello stesso piano, detti fuochi:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \text{cost.}$$

poniamo cost $= 2a$ con $a \in \mathbb{R}_+$



$$\left|\sqrt{(x_P + c)^2 + y_P^2} - \sqrt{(x_P - c)^2 + y_P^2}\right| = 2a$$

ripetendo calcoli analoghi all'ellisse otteniamo:

$$\frac{x_P^2}{a^2} - \frac{y_P^2}{c^2 - a^2} = 1 \quad ; \quad b \doteq \sqrt{c^2 - a^2} < c$$

(EQUAZIONE IPERBOLE) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$ (Forma esplicita)

nel caso in cui $x \to +\infty$ $\quad y = \pm \frac{b}{a} x$ (ASINTOTI IPERBOLE

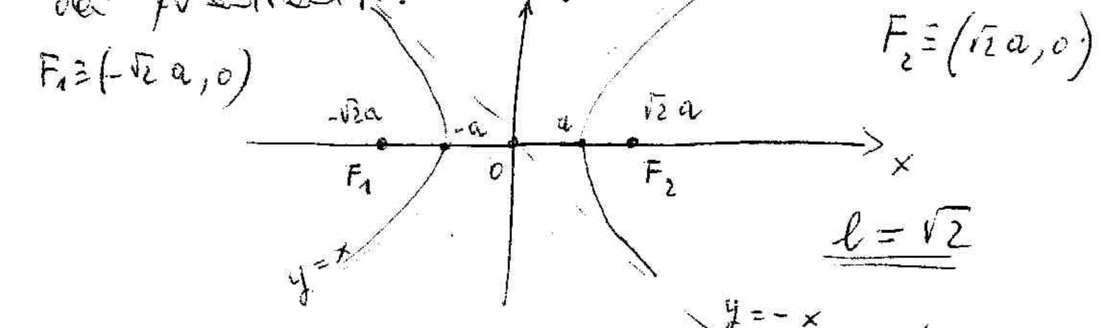
$A \equiv (a, b)$ punto appartenente alla circonferenza, all'iperbole e al vertice del rettangolo.

L'equazione della circonferenza è $x^2+y^2=a^2+b^2$ dato che $a+b=c$; la circonferenza passa anche per il fuoco. L'eccentricità $e \doteq \frac{c}{a} \doteq \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} > 1$

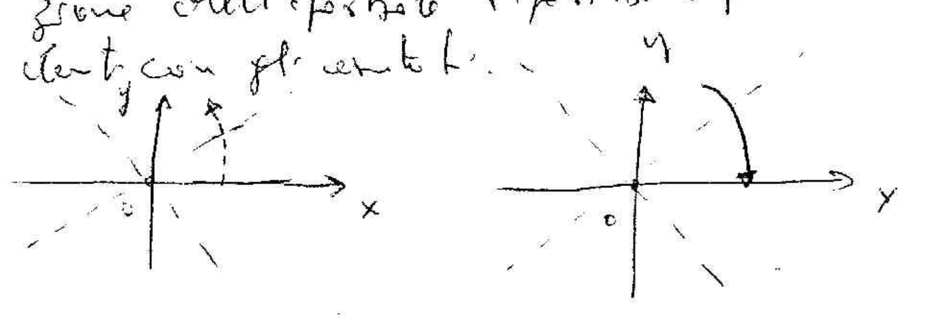
Nel caso in cui $a=b$ si ottiene l'<u>IPERBOLE EQUILATERA</u>

$$x^2-y^2=a^2$$

con $c=\sqrt{2}\,a$ e gli asintoti sono le bisettrici dei quadranti.

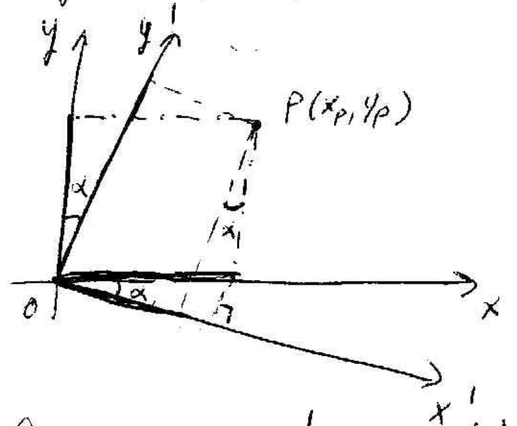


ROTAZIONE DEGLI ASSI per riscrivere l'equazione dell'iperbole in maniera più semplice, in modo che sovrapporre gli asintoti dell'iperbole con gli assi coordinati x, y. Un discorso analogo può essere anche quello di riscrivere l'equazione dell'iperbole riferita agli assi corrispondenti con gli asintoti.



In entrambi i casi la rotazione è di $\pi/4$ una volta in senso antiorario, nell'altro nel senso orario.

In generale si ha



$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

che in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nel caso in questione abbiamo $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

In forma matriciale l'equazione di iperbole è esprimibile

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff (x \;\; y)\begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & -b^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad R(\theta): \text{matrice della rotazione}$$

Invertendo l'ordine $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(-\theta)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$(x \;\; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T = \left[R(-\theta)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right]^T = (x' \; y')\, R(-\theta)^T$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies (x' \; y')\, R(-\theta)^T \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & -b^{-2} \end{pmatrix} R(\theta)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

Sviluppando i prodotti righe per colonne tra le matrici otteniamo:

$$R(-\vartheta)^T \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & -b^{-2} \end{pmatrix} R(-\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & -b^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} a^{-2} - (a^{-2}+b^{-2})\sin^2\vartheta & \frac{a^{-2}+b^{-2}}{2}\sin 2\vartheta \\ \frac{a^{-2}+b^{-2}}{2}\sin 2\vartheta & -b^{-2}+(a^{-2}+b^{-2})\sin^2\vartheta \end{pmatrix} =$$

che per $\vartheta = \pi/4$ diviene

$$= \begin{pmatrix} \frac{a^{-2}-b^{-2}}{2} & \frac{a^{-2}+b^{-2}}{2} \\ \frac{a^{-2}+b^{-2}}{2} & \frac{a^{-2}-b^{-2}}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(x' \ y') \begin{pmatrix} \frac{a^{-2}-b^{-2}}{2} & \frac{a^{-2}+b^{-2}}{2} \\ \frac{a^{-2}+b^{-2}}{2} & \frac{a^{-2}-b^{-2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

Nel caso dell'iperbole equilatera $a = b$

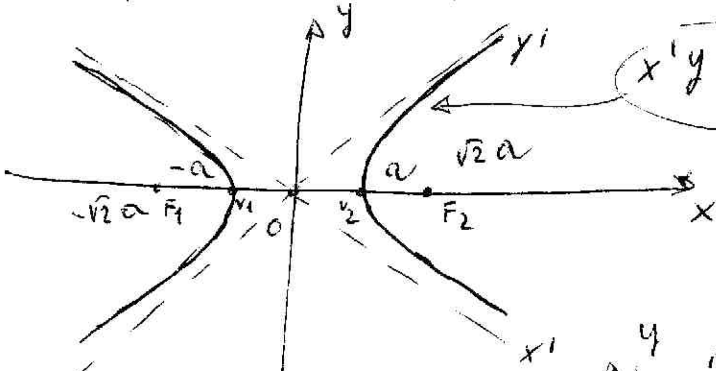
$$(x' \ y') \begin{pmatrix} 0 & a^{-2} \\ a^{-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

$$(x' \ y') \begin{pmatrix} a^{-2} y' \\ a^{-2} x' \end{pmatrix} = 1 \implies a^{-2}x'y' + a^{-2}y'x' = 1$$

ed infine $x'y' = a^2/2$. Data la generalità degli assi coordinati possiamo riscrivere ed ottenere

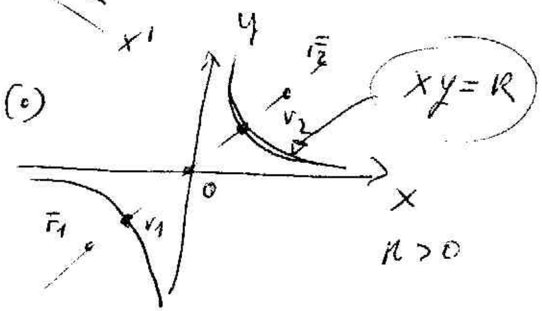
$$(\circ) \qquad xy = a^2/2$$ (IPERBOLE EQUILATERA RISPETTO AGLI ASSI COORDINATI)

Confrontando le due espressioni, che algebricamente sono diverse ma rappresentano lo stesso luogo geometrico, otteniamo



Altrimenti nel caso di $(\circ)$

$xy = k$ con $k \in \mathbb{R}$



$k = a^2/2 \implies a = \sqrt{2k}$

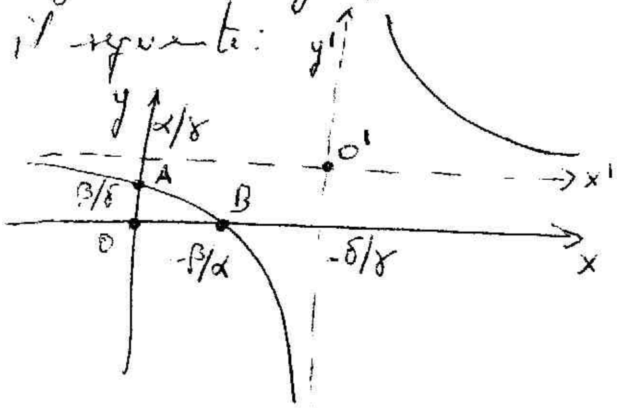
$V_2 \equiv (\sqrt{2k}, \sqrt{2k}) \qquad V_1 \equiv (-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$

$F_2 \equiv (2\sqrt{k}, 2\sqrt{k}) \qquad F_1 \equiv (-2\sqrt{k}, -2\sqrt{k})$

Altra espressione che rappresenta ancora un'iperbole è la cosiddetta funzione omografica

$y = \underline{\alpha x + \beta}$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

Il grafico della funzione omografica è qualitativamente il seguente:



ASINTOTO ORIZZONTALE

$$y = \alpha/\gamma$$

ASINTOTO VERTICALE

$$x = -\delta/\gamma$$

INTERSEZIONE ASSE Y

$$A \equiv (0, \beta/\delta)$$

INTERSEZIONE ASSE X

$$B \equiv (-\delta/\gamma, 0)$$

Vogliamo riscrivere l'equazione $y = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ rispetto agli assi $x'y'$ di origine $O' \equiv (-\delta/\gamma, \alpha/\gamma)$

Il cambio di coordinate è il seguente:

$$\begin{cases} x = x' - \delta/\gamma \\ y = y' + \alpha/\gamma \end{cases} \qquad y' + \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha\left(x' - \delta/\gamma\right) + \beta}{\gamma\left(x' - \delta/\gamma\right) + \delta}$$

$$y' + \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha x' - \frac{\alpha\delta}{\gamma} + \beta}{\gamma x' \cancel{- \delta} \cancel{+ \delta}}$$

$$y' + \cancel{\frac{\alpha}{\gamma}} = \cancel{\frac{\alpha}{\gamma}} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 x'}$$

$$y'x' = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} \quad \Longleftrightarrow \quad y'x' = k$$

abbiamo ottenuto le stesse espressioni algebriche del caso precedente. Le forme algebriche cambiano ma il luogo geometrico è lo stesso.

Concludiamo lo studio dell'iperbole calcolando i punti d'intersezione tra iperbole e circonferenza $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\cancel{1} + \frac{y^2}{b^2}\right)a^2 + y^2 = \cancel{a^2} + b^2$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) y^2 = b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y_A = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2 + a^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} + a^2$$

$x_A = \pm a \sqrt{\dfrac{a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}}$. Quindi i punti d'intersezione sono

$$\left(\pm a \sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

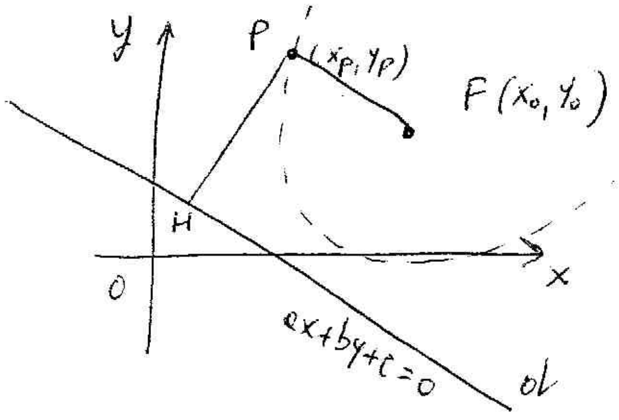
e se $a = b$

$$\left(\pm a\sqrt{3/2}, \pm a/2\right)$$

PARABOLA è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto F (detto fuoco) e da una retta data d (detta direttrice).

$\overline{PF} = \overline{PH}$

$$\sqrt{(x_p-x_0)^2+(y_p-y_0)^2} = \frac{|ax_p+by_p+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



dopo qualche passaggio algebrico si ottiene l'equazione generale di parabola:

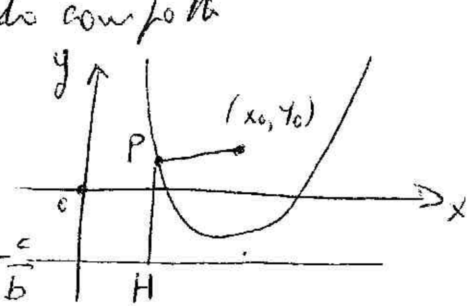
$$b^2x_p^2 + a^2y_p^2 - 2abx_py_p - 2[ac + x_0(a^2+b^2)]x_p +$$
$$- 2[bc + y_0(a^2+b^2)]y_p + (a^2+b^2)(x_0^2+y_0^2) - c^2 = 0$$

se $a = 0$ (direttrice parallela all'asse x) si ottiene una forma più familiare

$$y_p = \frac{1}{2(c/b+y_0)}x_p^2 - \frac{x_0 x_p}{c/b+y_0} + \frac{x_0^2+y_0^2-c^2/b^2}{2(c/b+y_0)}$$

che è esprimibile in modo compatto

$$y_p = \alpha x_p^2+\beta x_p+\gamma$$

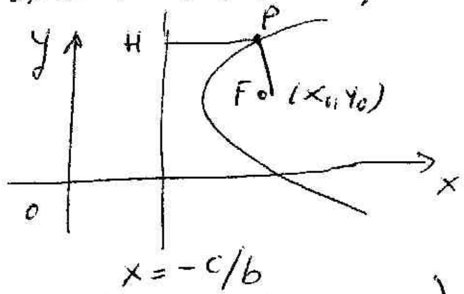


se $b = 0$ (direttrice parallela all'asse y) si ottiene:

$$x_p = \frac{1}{2(\frac{c}{a}+x_0)} y_p^2 - \frac{y_0 y_p}{c/a+x_0} + \frac{x_0^2+y_0^2-c^2/a^2}{2(c/a+x_0)}$$

che anch'esso è esprimibile in modo compatto.

$$x_p = \alpha y_p^2 + \beta y_p + \gamma$$

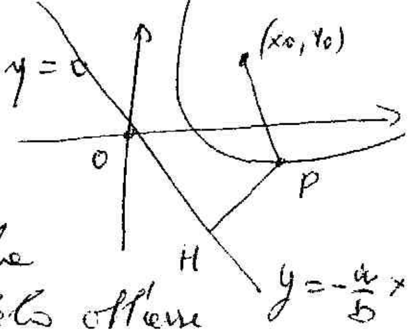


se $c = 0$ (direttrice passante per l'origine) si ottiene

$$x_p^2 + \frac{a^2}{b^2}y_p^2 - 2\frac{a}{b}x_py_p - 2x_0\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x_p +$$
$$- 2y_0(1+a^2/b^2)y_p + (1+a^2/b^2)(x_0^2+y_0^2) = 0$$

che in forma compatta diviene

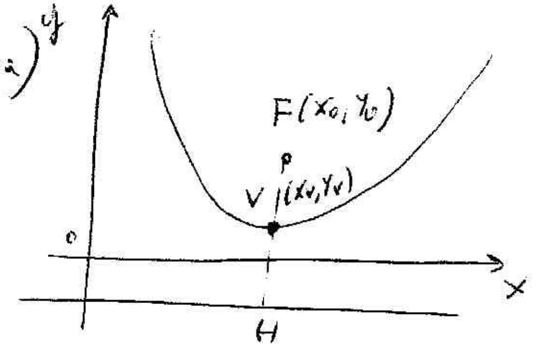
$$\alpha x_p^2+\beta y_p^2+\gamma x_py_p+\delta x_p+\varepsilon y_p + \eta = 0$$



Analizziamo il caso di parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y la cui equazione è quindi $y_p=\alpha x_p^2+\beta x_p+\gamma$.

$X_V = x_0$ (per simmetria)

Y_V è tale che $\overline{FV} = \overline{VH}$



$$y_0 - y_V = y_V + c/b$$

$$y_V = \frac{y_0 - c/b}{2}$$

Coordinate del vertice sono $V \equiv \left(x_0, \frac{y_0 - c/b}{2}\right)$

I punti di intersezione con l'asse x sono

$$y_P = 0 \qquad x_{P\,1,2} = \frac{\frac{x_0}{c/b+y_0} \pm \sqrt{\frac{c/b - y_0}{c/b+y_0}}}{\frac{1}{c/b+y_0}} = x_0 \pm \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - y_0^2}$$

quindi x_1 e x_2 sono simmetrici rispetto a x_0.
Quindi x_0 è la semisomma delle radici

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad x_0 = -\beta/2\alpha$$

Calcoliamo l'ordinata del vertice in termini di α, β, γ

$$Y_V = \alpha\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = \dots = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = -\frac{\Delta}{4\alpha}$$

Risulta

$$V \equiv \left(x_0, \frac{y_0 - c/b}{2}\right) = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$$

Finora abbiamo visto le coordinate del vertice della parabola $\left(x_0, \frac{y_0 - c/b}{2}\right)$ in termini di α, β, γ. Lo stesso bisogna fare per le coordinate del fuoco e per l'equazione della direttrice.
Basta risolvere il sistema rispetto a $x_0, y_0, c/b$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2(c/b + y_0)} \\ \beta = -\dfrac{x_0}{c/b + y_0} \\ \gamma = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 - c^2/b^2}{2(c/b + y_0)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\beta/2\alpha \\ y_0 = \dfrac{1 - \Delta}{4\alpha} \\ c/b = \dfrac{1 + \Delta}{4\alpha} \end{cases}$$

Ricapitolando abbiamo:

$$y = \alpha x^2 + \beta x + c \qquad V \equiv \left(-\beta/2\alpha;\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$$

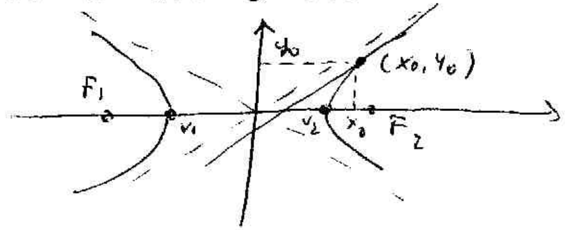
$$F \equiv \left(-\beta/2\alpha;\ \frac{1 - \Delta}{4\alpha}\right)$$

$$y = -\frac{1 + \Delta}{4\alpha}$$

che sono le note formule della parabola.

PARENTESI IPERBOLE: RETTA TANGENTE ALL'IPERBOLE

$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$$



$$\Updownarrow$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m = -\frac{x_0 y_0}{a^2 - x_0^2}$$

avendo sfruttato la condizione $bx_0^2 - ay_0^2 - a^2b \leq 0$ abbiamo ancora:

$$m = -\frac{x_0 y_0}{a^2 - \left(a^2 + \frac{y_0^2 a^2}{b^2}\right)} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$$

la retta tangente diviene:

$$y = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}x - \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}x_0 + y_0$$

$$a^2 y_0 y - b^2 x_0 x + b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = 0$$

$$a^2 y_0 y - b^2 x_0 x + a^2 b^2 = 0$$

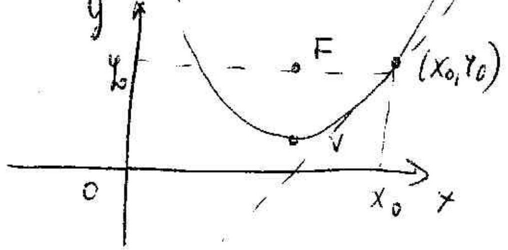
$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} - 1 = 0$$

Espressione ottenuta parallelamente anche a quella per circonferenza ed ellisse.

RETTA TANGENTE ALLA PARABOLA

$$\begin{cases} y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$



$$\Delta = 0 \implies m = 2\alpha x_0 + \beta$$

avendo sfruttato la condizione $y_0 - \alpha x_0^2 - \beta x_0 - \gamma = 0$ quindi la retta tangente diviene:

$$y = (2\alpha x_0 + \beta)(x - x_0) + y_0$$

$$y = (2\alpha x_0 + \beta)x - 2\alpha x_0^2 - \beta x_0 + y_0$$

$$y = (2\alpha x_0 + \beta)x - \alpha x_0^2 + \gamma$$

FASCIO DI PARABOLE è ottenuto come sovrapposizione di due parabole: $y = ax^2 + bx + c$ e $y = a'x^2 + b'x + c'$

$$(\lambda + \mu)y = (\lambda a + \mu a')x^2 + (\lambda b + \mu b')x + (\lambda c + \mu c')$$

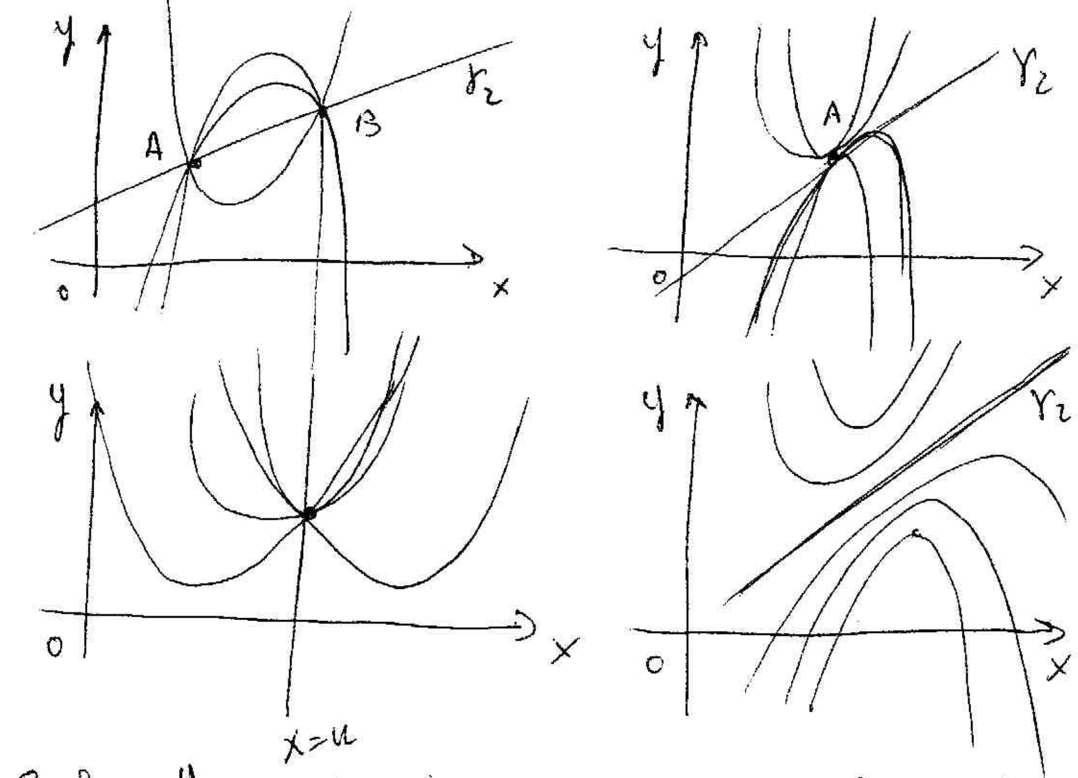
quindi

$$y = \frac{\lambda a + \mu a'}{\lambda + \mu}x^2 + \frac{\lambda b + \mu b'}{\lambda + \mu}x + \frac{\lambda c + \mu c'}{\lambda + \mu}$$

facendo $\lambda = -\mu a'/a$ si ottiene l'unica retta appartenente al fascio

$$y = \left[\frac{ab' - a'b}{a - a'}\right]x + \left[\frac{ac' - a'c}{a - a'}\right]$$

Un fascio di parabole può essere ottenuto anche da una parabola γ_1 e da una retta γ_2. A seconda che la retta γ_2 sia secante, tangente o esterna alla parabola γ_1, si avrà un fascio di parabole passanti tutte per due punti distinti, o per un singolo punto di tangenza oppure tutte disgiunte (cioè nessuna coppia di parabole ha un punto in comune).



Se la retta γ_2 ha per equazione $x=k$ (parallela all'asse della parabola) l'equazione del fascio è

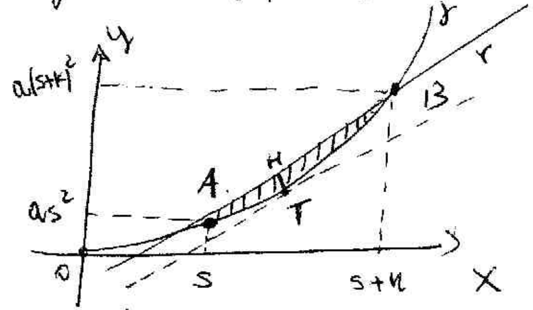
$$y = ax^2 + (b-t)\,x + (c+tk)$$

Tutte le parabole del fascio hanno lo stesso parametro $1/2a$, cioè hanno la stessa apertura, sono sovrapponibili per traslazione ed hanno in comune il punto (k, ak^2+bk+c).
Quindi la famiglia di parabole può essere scritta come segue:

$$y = A(k)\,x^2 + B(k)\,x + C$$

SEGMENTO PARABOLICO (FORMULA DI ARCHIMEDE)

Calcoliamo l'area compresa tra una parabola ed una retta secante. Per semplicità poniamo $y = ax^2$ (poi generalizzeremo).



$\gamma:\ y = ax^2$

$$r:\ \frac{y - a(s+k)^2}{as^2 - a(s+k)^2} = \frac{x-(s+k)}{s-(s+k)}$$

la retta diventa: $y = a(2s+k)x - as(s+k)$

L'area è

$$A = \int_s^{s+k} dx\,\left\{a(2s+k)x - as(s+k) - ax^2\right\} =$$

$$= a\left[\frac{2s+k}{2}x^2 - s(s+k)\,x - \frac{x^3}{3}\right]_s^{s+k} = a \cdot \frac{1}{6}k^3$$

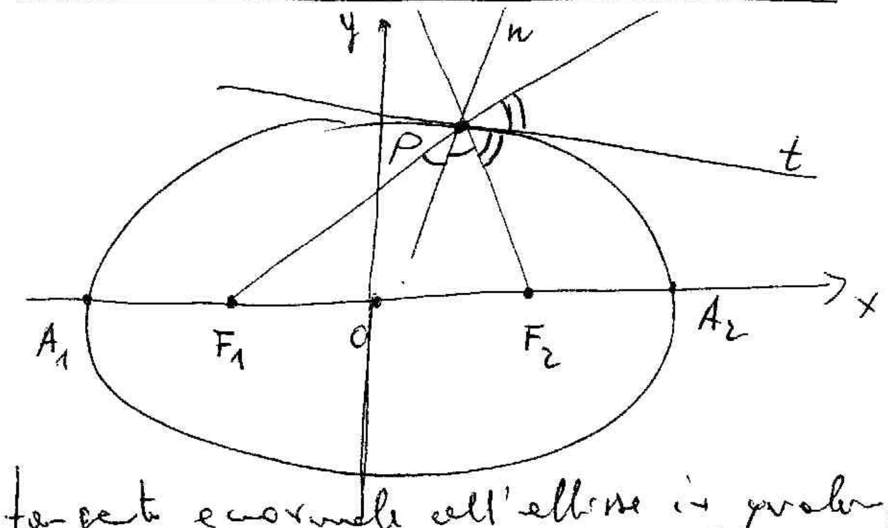
L'area è funzione solo di a (apertura della parabola) e di k (distanza tra le ascisse dei due punti d'intersezione)
Se avessimo avuto la parabola $y = ax^2+bx+c$ grazie ad un cambio di coordinate (traslazione)

$$\begin{cases} x = X - b/2a \\ y = Y - \dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$$ avremmo avuto $Y = aX^2$

ma le due parabole avendo lo stesso parametro e apertura di conseguenza non varia l'area del segmento parabolico a patto di mantenere costante la proiezione delle corde sull'asse x. Dopo qualche calcolo si ottiene:

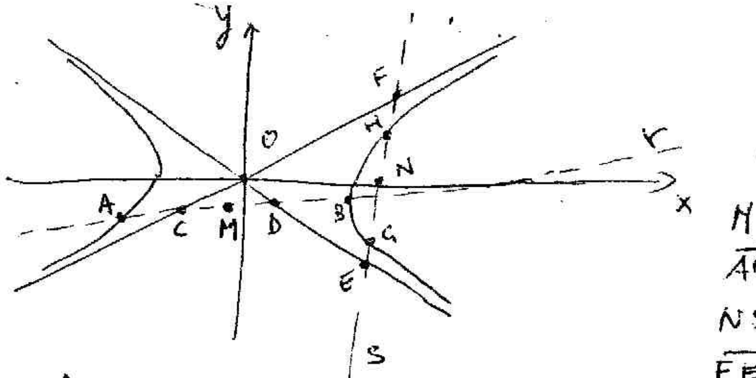
$$\ell = \frac{1}{6} a k^3 = \frac{2}{3} \overline{AB} \cdot \overline{TH}$$

TANGENTI E NORMALI AD ELLISSE/IPERBOLE



tangente e normale all'ellisse in qualunque punto sono bisettrici degli angoli formati dalle rette passanti per un fuoco ed il punto di tangenza.

In un'iperbole il punto medio del segmento staccato dagli asintoti su di una retta secante è anche punto medio della relativa corda.



$\overline{AC} = \overline{BD}$

$\overline{FH} = \overline{GE}$

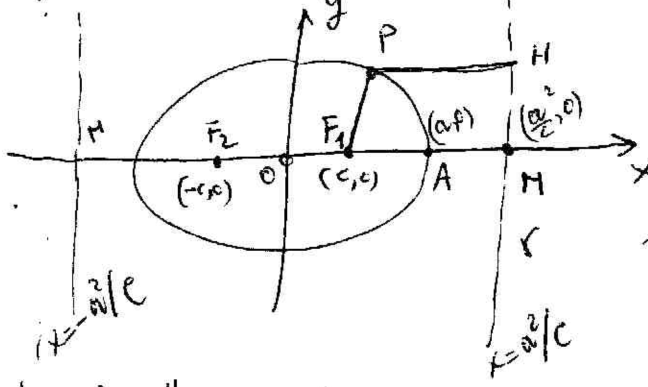
M: punto medio di $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

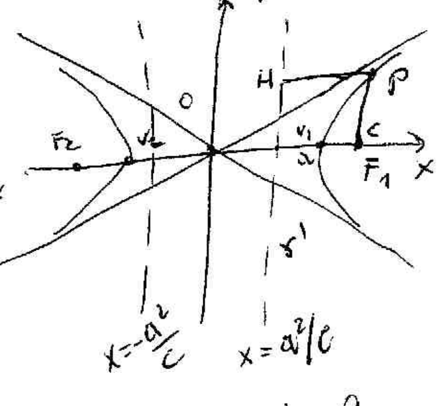
N: punto medio di $\overline{FE}$ e $\overline{GH}$.

Nel caso in cui la retta s è tangente all'iperbole allora il punto di tangenza è anche punto medio del segmento staccato dall'iperbole sulla retta tangente.

DIRETTRICI DELL'ELLISSE ED IPERBOLE

La direttrice dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$) relativa al fuoco $F(c,0)$ è la retta r (r') perpendicolare all'asse dei fuochi passante per il punto $M \equiv (a^2/c, 0)$.





La direttrice di equazione $x = a^2/c$ è tale che per i punti dell'ellisse (dell'iperbole) è costante il rapporto delle distanze che uno dei fuochi F e della relativa direttrice r (r'):

$$\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PH}} = \frac{c}{a} = e < 1 \quad \left(\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PH}} = \frac{c}{a} = e > 1\right)$$

per cui si ottiene:

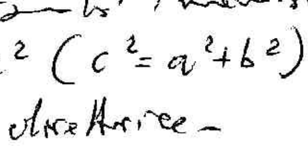
$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{x-a^2/c^2} = \frac{c}{a}$$

ed elevando al quadrato entrambi i membri e tenendo conto che $a^2=b^2+c^2$ ($c^2=a^2+b^2$) si ottiene l'equazione della direttrice.

TANGENTE ALL'IPERBOLE EQUILATERA $yx = k$

la tangente all'iperbole equilatera (riferita agli asintoti) incontra gli assi cartesiani nei punti

$A \equiv (2x_0, 0)$ e $B \equiv (0, 2y_0)$



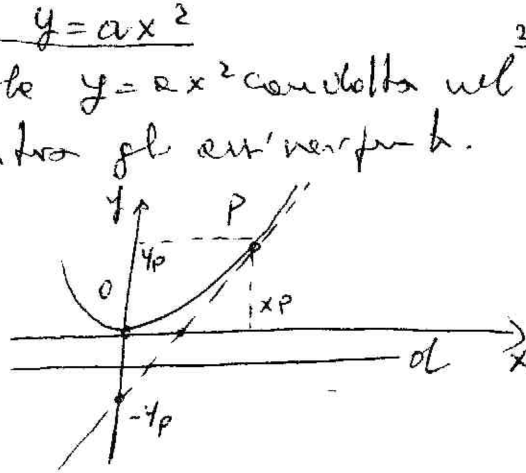
dove (x_0,y_0) è il punto di tangenza.
L'equazione della retta tangente diviene:

$$\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1$$

TANGENTE ALLA PARABOLA $y=ax^2$

La tangente alla parabola $y=ax^2$ condotta nel suo punto (x_P, y_P) incontra gli assi nei punti

$(x_P/2, 0)$ e $(0, -y_P)$



e l'equazione della retta tangente diviene

$$\frac{x}{x_P/2} + \frac{y}{-y_P} = 1$$

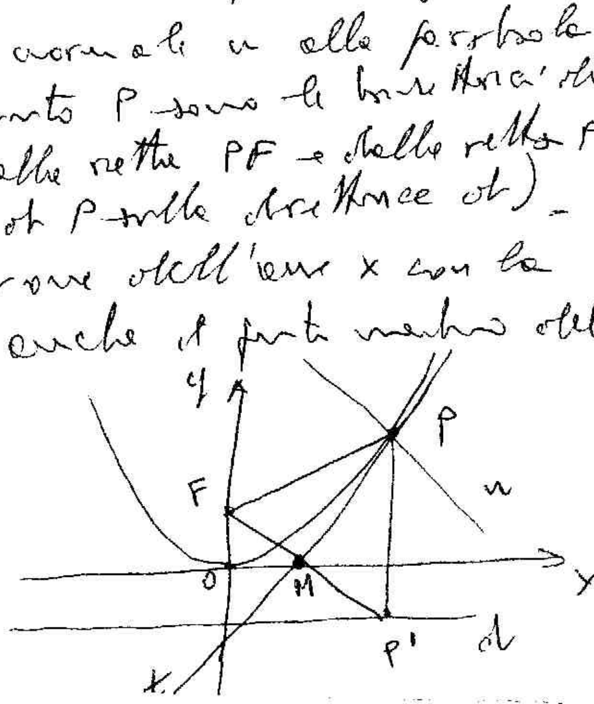
Infatti la tangente è data da $y - y_P = 2ax_P(x-x_P)$

$y = 2ax_P x - ax_P^2$ $\quad \begin{cases} x=0 \\ y=-ax_P^2=-y_P \end{cases}$ e $\begin{cases} y=0 \\ x=x_P/2 \end{cases}$

Questa proprietà richiama un'analogia con la proprietà dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti.

La tangente t e la normale n alla parabola $y=ax^2$ in un suo punto P sono le bisettrici degli angoli formati dalla retta PF e dalla retta PP' (dove P' è proiezione di P sulla direttrice d).

Il punto M, intersezione dell'asse x con la tangente in P, è anche il punto medio del segmento $\overline{P'F}$.



FUNZIONI REALI

Sia E un insieme.
Si chiama *funzione reale* definita in E ogni funzione in E ed a valori nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali:

$$f : E \to \mathbb{R}$$

se $E \subset \mathbb{R}$ allora parliamo di *funzioni reali di una variabile reale*.

Siano f ed g due funzioni reali definite in E_1 ed E_2.
Se $E = E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ le funzioni:

$$f+g : \forall x \in E \to f(x)+g(x) \in \mathbb{R}$$

$$f-g : \forall x \in E \to f(x)-g(x) \in \mathbb{R}$$

$$f \cdot g : \forall x \in E \to f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{R}$$

sono dette rispettivamente *somma*, *differenza*, *prodotto* di f e g.
Infine se esiste $E' = \{x \in E_1 \cap E_2 \mid g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$
la funzione $\frac{f}{g} : \forall x \in E' \to \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$
è chiamata *rapporto* di f e g.

Inoltre se esiste $E'' = \{x \in E_2 \mid g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$
la funzione

$$1/g : \forall x \in E'' \to \frac{1}{g(x)} \in \mathbb{R}$$

è chiamata *reciproca* di g.

Sia ancora f una funzione reale definita in un insieme E. $\forall a \in \mathbb{R}$ si pone:

$$a+f : \forall x \in E \to a + f(x) \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot f : \forall x \in E \to a \cdot f(x) \in \mathbb{R}$$

La funzione $(-1)\cdot f$ si denota con la scrittura $-f$ ed è detta *opposta* di f.

La funzione

$$|f| : \forall x \in E \to |f(x)| \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

è detta *valore assoluto* di f.

$\forall a \in \mathbb{R}$ useremo le scritture

$$f \geq a, \quad f > a, \quad f = a, \quad f \leq a, \quad f < a$$

per denotare rispettivamente che $\forall x \in E$ risulta

$$f(x) \geq a, \quad f(x) > a, \quad f(x) = a, \quad f(x) \leq a, \quad f(x) < a$$

ESTREMI DI UNA FUNZIONE REALE

Sia $f: E \to \mathbb{R}$ e sia $A \subset E$

ovviamente $f(A) \neq \emptyset$ e deve accadere $f(A) \subset \mathbb{R}$

Se $f(A)$ è dotato di minimo (di massimo) allora diremo che f è dotata di minimo (di massimo) in A, inoltre il minimo (il massimo) di $f(A)$ si chiama minimo (massimo) di f in A e si denota

$$\min_{x \in A} f(x) \qquad \left(\max_{x \in A} f(x) \right)$$

Se $f(A)$ è limitato inferiormente (limitato superiormente) si dice che f è limitata inferiormente (limitata superiormente) in A. Inoltre l'estremo inferiore (superiore) di $f(A)$ si chiama estremo inferiore (superiore) di f in A e si denota

$$\inf_{x \in A} f(x) \qquad \left(\sup_{x \in A} f(x) \right)$$

In formule quanto introdotto viene formalizzato come segue:

f limitata inferiormente in A $\iff \exists\, a \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq a \quad \forall x \in A$

f limitata superiormente in A $\iff \exists\, a \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq a \quad \forall x \in A$

f limitata in $A \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R} \mid a \leq f(x) \leq b \quad \forall x \in A$

f limitata in $A \iff \exists\, c \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq c \quad \forall x \in A$

f dotata di minimo in $A \iff \exists\, x_1 \in A \mid f(x) \geq f(x_1) \quad \forall x \in A$

f dotata di massimo in $A \iff \exists\, x_2 \in A \mid f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in A$

A proposito della limitatezza di una funzione possiamo notare anche che se f è limitata inferiormente in A, allora $\inf_{x \in A} f(x)$ è l'unico numero reale e_1 che soddisfa le seguenti proprietà:

•) $f(x) \geq e_1 \quad \forall x \in A$

••) $\forall \alpha > e_1, \ \exists\, x \in A \mid f(x) < \alpha$

(scaturiscono dalla definizione di inf)

In maniera analoga si ottiene per $e_2 = \sup_{x \in A} f(x)$ se $f(x)$ è limitata superiormente:

•) $f(x) \leq l_2 \quad \forall x \in A$

••) $\forall \beta < l_2 \ \exists x \in A \mid f(x) > \beta$

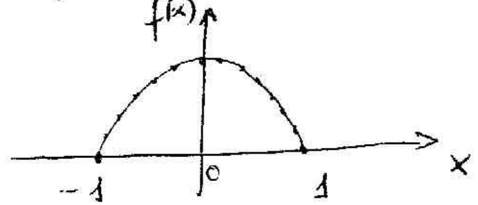
<u>GRAFICO DI UNA FUNZIONE REALE DI UNA VARIABILE REALE</u>

Sia $f: E \to \mathbb{R}$ e $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

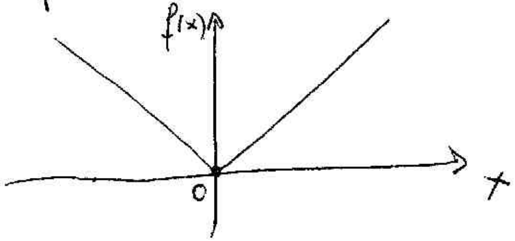
Il grafico G di f è definito come un sottoinsieme di Π.

$$G: \{ \forall (x,y) \in \Pi \mid y = f(x) \} \subset \Pi$$

<u>ESEMPIO</u>: $f: x \in [-1,1] \to \sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$



<u>ESEMPIO</u>: $f: x \in \mathbb{R} \to |x| \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

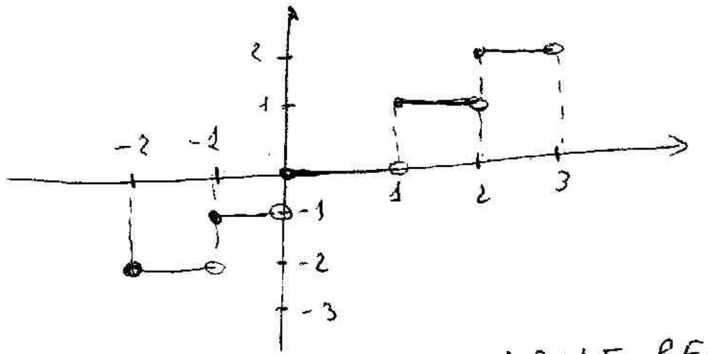


<u>ESEMPIO</u>: $f: x \in \mathbb{R} \to [x] \in \mathbb{Z}$

dove, $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x]$ denota il più grande numero intero $\leq x$.

$\forall m \in \mathbb{Z}$ se $x \in [m, m+1)$ si ha $[x] = m$

→ pertanto il grafico della restrizione di f all'intervallo $[m, m+1)$ è il segmento parallelo all'asse x di estremi (m,m) e $(m+1, m)$ privo del punto $(m+1, m)$. Cioè:



<u>FUNZIONE REALE DI UNA VARIABILE REALE MONOTONA</u>

Sia $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f <u>crescente</u> $\forall x_1, x_2 \in E$ con $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$

f <u>decrescente</u> $\forall x_1, x_2 \in E$ con $x_1 < x_2$ $f(x_1) \geq f(x_2)$

inoltre si aggiunge il termine <u>strettamente</u> se otteniamo solo il segno $<$ o $>$.

<u>FUNZIONE MONOTONA</u> è una funzione crescente oppure decrescente in E.

IMPORTANTE ANALISI! Una funzione strettamente crescente (decrescente) è invertibile, e la sua inversa è una funzione strettamente crescente (decrescente).

Infatti se $x', x'' \in E$ e $x' \neq x''$ abbiamo $f(x') \neq f(x'')$ quindi è invertibile.

Sia $f^{-1} : f(E) \to E$

se $y', y'' \in f(E)$ e sia $y' < y''$ ora abbiamo due cose:

$$f^{-1}(y') \leq f^{-1}(y'') \text{ oppure } f^{-1}(y') \geq f^{-1}(y'')$$

applicando f che è crescente.

$$f(f^{-1}(y')) \leq f(f^{-1}(y'')) \text{ oppure } f(f^{-1}(y')) \geq f(f^{-1}(y''))$$

$$y' \leq y'' \qquad \text{oppure} \quad y' \geq y''$$

ma $y' \geq y''$ contraddice l'ipotesi che $y' \leq y''$. quindi f^{-1} è crescente. Lo stesso vale se f è decrescente.

Siano $f: E \to \mathbb{R}$ e $g: E \to \mathbb{R}$ entrambe crescenti (decrescenti) si ha:

$\forall a \in \mathbb{R}_+$, $a \cdot f$ è crescente (decrescente)

$\forall a \in \mathbb{R}_-$, $a f$ è decrescente (crescente)

$\forall a \in \mathbb{R}$, $a + f$ è crescente (decrescente)

se $f > 0$ oppure $f < 0$, $1/f$ è decrescente (crescente)

$f + g$ è crescente (decrescente)

se $f \geq 0$ e $g \geq 0$, $f \cdot g$ è crescente (decrescente)

se $f \leq 0$ e $g \leq 0$, $f \cdot g$ è decrescente (crescente)

$f \circ g$ e $g \circ f$ sono crescenti

Da aggiungere che anche se f e g sono decrescenti $f \circ g$ e $g \circ f$ sono crescenti.

FUNZIONI CRESCENTI/DECRESCENTI IN UN PUNTO

Sia $f: E \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in E$

f è crescente (decrescente) nel punto $x_0 \in E$ se $\exists$ un intorno I di x_0 tale che

$$\forall x \in I \cap (E - \{x_0\}) : \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \ (f(x) \geq \\ x > x_0 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \ (f(x_0) \geq \end{cases}$$

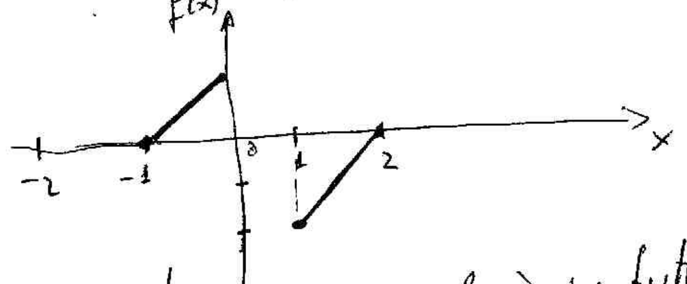
in questo caso abbiamo un'informazione locale sulla crescenza/decrescenza.

Ovviamente la crescenza/decrescenza in $A \subset E$ implica la crescenza/decrescenza in un intorno di un qualsiasi punto $x_0 \in A$ ma il contrario non è vero.

In maniera analoga possiamo definire la strettamente crescenza/decrescenza nel punto x_0 eliminando il segno d'uguaglianza.

Infatti

$$f: x \in [-1,0] \cup [1,2] \longrightarrow \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x-2 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$$



è crescente in ogni punto ma non lo è in tutto l'insieme di definizione.

MASSIMO E MINIMO RELATIVO

Sia $f: E \to \mathbb{R}$

Si dice che $x_0 \in E$ è un punto di minimo relativo (massimo relativo) per f se $\exists$ intorno I di

x_0 ... $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) $\forall x \in I \cap E$

Se f è dotata di massimo (minimo) in E, denotato con $x_0 \in E$ tale che $f(x_0)$ sia il massimo (minimo) di f in E, si dice che x_0 è un punto di massimo assoluto (minimo assoluto) per f.

Evidentemente ogni punto di massimo assoluto (minimo assoluto) per f è anche un punto di massimo relativo (minimo relativo) per f.

FUNZIONE PARI/DISPARI/PERIODICA

Sia $f: E \to \mathbb{R}$

Si dice che f è una funzione pari (dispari) se

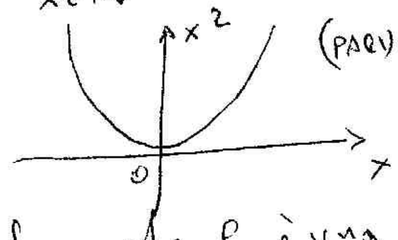
i) $x \in E \Rightarrow -x \in E$

ii) $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) $\forall x \in E$

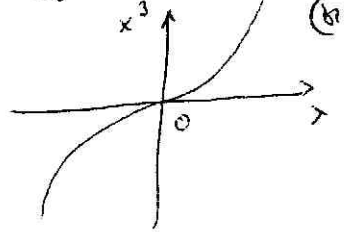
Evidentemente il grafico di una funzione pari (dispari) è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (all'origine delle coordinate).

ESEMPIO

$x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}$ (PARI)



$x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^3 \in \mathbb{R}$ (DISPARI)



Si dice che f è una funzione periodica se esiste un numero reale $\omega \neq 0$ tale che

i) $x \in E \Rightarrow x+\omega \in E,\ x-\omega \in E$

ii) $f(x+\omega) = f(x) \quad \forall x \in E$

Se f è periodica, ogni numero reale ω che soddisfa le due proprietà si chiama periodo di f.

SUCCESSIONI REALI

Sia $f: A \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

una funzione f di valori naturali a valori reali. Tale caratteristica di funzioni vengono definite successioni. Insomma una successione di valori reali è una funzione definita in un sottoinsieme dei numeri naturali, che ha valori in $\mathbb{R}$. Indichiamo una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fatte queste osservazioni anche per le successioni è possibile definire le operazioni di somma, differenza, prodotto e rapporto di successioni, ecc. In particolare una successione è limitata inferiormente (superiormente) se e solo se

$$\exists a \in \mathbb{R} \mid y_n \geq a \ (y_n \leq a) \quad \forall n \in A \subset \mathbb{N}.$$

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata se e solo se

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \mid a \leq y_n \leq b \quad \forall n \in A \in \mathbb{N}$$

Se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata inferiormente, l'estremo inferiore di $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è l'unico numero reale l_1 caratterizzato dalle proprietà

i) $y_n \geq l_1$

ii) $\forall \alpha > l_1,\ \exists \nu \in \mathbb{N} \mid y_\nu < \alpha$

Se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata superiormente, l'estremo superiore di $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è l'unico numero reale l_2 caratterizzato dalle proprietà.

i) $y_n \leq l_2$

ii) $\forall \beta < l_2,\ \exists \nu \in \mathbb{N} \mid y_\nu > \beta$

(Noto come concettualmente non cambia nulla rispetto alle funzioni).

In maniera analoga possiamo definire successioni crescenti/decrescenti e strettamente crescenti/strettamente decrescenti.

L'estremo sup, inf, il minimo ed il massimo di una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono indicati

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} y_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n, \quad \min_{n\in\mathbb{N}} y_n, \quad \max_{n\in\mathbb{N}} y_n$$

SUCCESSIONE $(1+1/n)^n$ con $n \in \mathbb{N}$

Formalmente abbiamo

$$y_n : n \in \mathbb{N} \to \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{R}_+$$

Analizziamo le principali proprietà. Dalla formula del binomio abbiamo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\, \frac{n}{n}\, \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} = 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

notiamo che se consideriamo $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ si ottiene una relazione analoga per la quale abbiamo

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

quindi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente ed assume valori maggiori di 2. Inoltre per $n=1$ è vero, quindi la successione è crescente

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Osserviamo che

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1 \quad \forall n,k \in \mathbb{N}-\{1\}$$

Quindi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \le 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

infatti basta notare

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2} + \dots \\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \le \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

ma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (1/2)^{k-1} = \sum_{m=0}^{n-1} (1/2)^m = \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}$

quindi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 1 + \frac{1-1/2^n}{1/2} =$$

$$= 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - 1/2^{n-1}$$

In conclusione $(1+1/n)^n$ è limitata

$$2 < (1+1/n)^n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (1+1/n)^n \doteq e \quad \text{(NUMERO DI NEPERO)}$$

$e \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ è irrazionale.

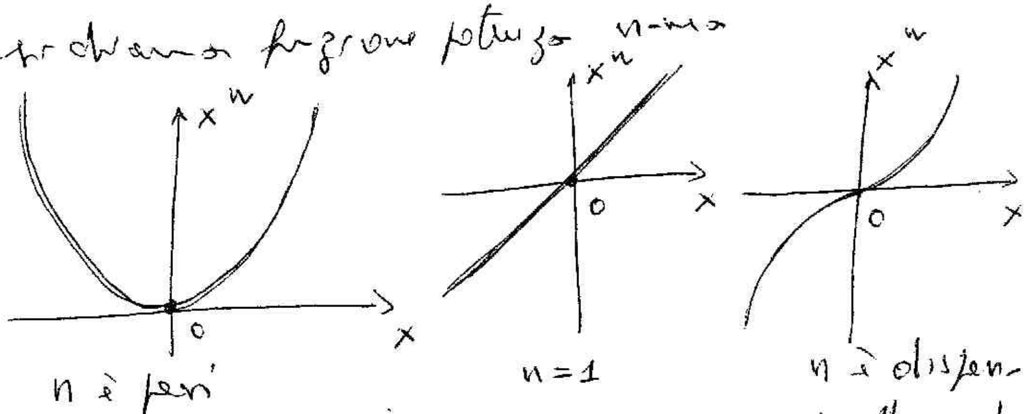
FUNZIONI ELEMENTARI

FUNZIONE POTENZA N-MA / RADICE N-MA

$\forall n \in \mathbb{N}$ la funzione

$$x \in \mathbb{R} \to x^n \in \mathbb{R}$$

si chiama funzione potenza n-ma



Se n è dispari la funzione x^n è strettamente crescente.

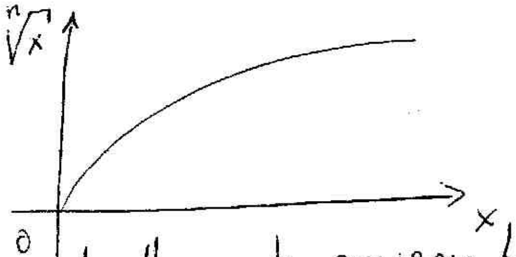
Se n è pari la funzione x^n è strettamente crescente $\forall x \in [0,+\infty)$, mentre è strettamente decrescente $\forall x \in (-\infty, 0]$.

Quindi se n è pari x^n non è invertibile in tutto $\mathbb{R}$ ma bisogna costruire la restrizione. Infatti

$$x^n : x \in \mathbb{R}_+ \to x^n \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

è invertibile $\forall n \in \mathbb{N}$. La sua inversa è detta radice n-ma:

$$\sqrt[n]{x} : x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$



Anche $\sqrt[n]{x}$ è strettamente crescente.

FUNZIONE ESPONENZIALE

$\forall a \in \mathbb{R}_+$ $\forall x \in \mathbb{R}$ la funzione

$$a^x : x \in \mathbb{R} \to a^x \in \mathbb{R}$$

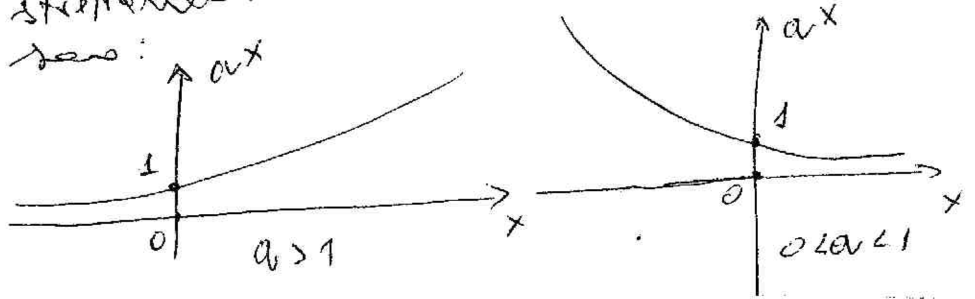
si chiama funzione esponenziale di base a

se $a = e$ (numero di Nepero)

$$e^x : x \in \mathbb{R} \to e^x \in \mathbb{R}.$$

si chiama funzione esponenziale.

$\forall a \in \mathbb{R}_+$ la funzione esponenziale di base a è strettamente crescente se $a > 1$ ed è strettamente decrescente se $0 < a < 1$. I grafici sono:



Sono note le seguenti proprietà dell'esponenziale di base a:

$\forall a,b \in \mathbb{R}_+$ e $\forall x,y \in \mathbb{R}$ si ha

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Queste relazioni restano valide anche nel caso in cui $a = e$.

FUNZIONE LOGARITMO

Sia $a \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$

Siccome a^x è una funzione biettiva di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}_+$, qualunque sia $x \in \mathbb{R}_+$ esiste un unico $y \in \mathbb{R}$ per cui $a^y = x$: tale numero y si chiama logaritmo di x in base a e si denota con il simbolo

$$\log_a x$$

$$\log_a x : x \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \log_a x \in \mathbb{R}$$

Utilizzando le proprietà della funzione esponenziale di base a di riflesso, si ottengono le proprietà del logaritmo in base a. Infatti:

$$\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0$$

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

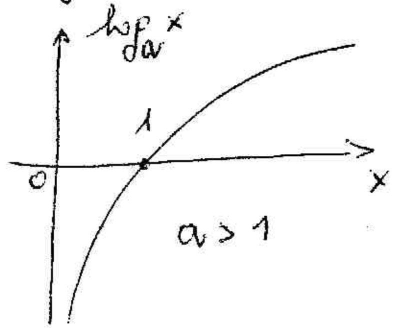
$$\log_a a^y = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

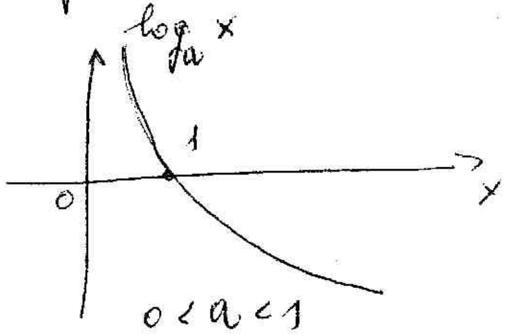
Nel caso in cui $a = e$ (numero di Nepero) si ottiene il logaritmo naturale e si indica:

$$\log_e x \doteq \ln x$$

Evidentemente, la funzione logaritmo di base a è l'inversa della funzione esponenziale di base a. Quindi abbiamo che $\forall a \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$ la funzione logaritmo di base a ha per immagine $\mathbb{R}$ ed è strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

I grafici sono i seguenti





Sussistono le seguenti relazioni:

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \forall x,y\in\mathbb{R}_+$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad \forall x,y\in\mathbb{R}_+$$

$$\log_a x^y = y\log_a x \quad \forall x\in\mathbb{R}_+, \forall y\in\mathbb{R}$$

$$\odot \quad \log_a x = \log_b x \log_a b \quad \forall x\in\mathbb{R}_+, \forall b\in\mathbb{R}_+-\{1\}$$

Infatti

$$a^{\log_a(x\cdot y)} = x\cdot y = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_b y}$$

$$a^{\log_a \frac{x}{y}} = \frac{x}{y} = a^{\log_a x} a^{-\log_a y} = a^{\log_a x - \log_b y}$$

$$a^{\log_a(x^y)} = x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y\log_a x}$$

$$a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = a^{\log_a b \log_b x}$$

Notiamo che se $x=a$ nella $\odot$ otteniamo

$$1 = \log_b a \log_a b \iff \log_a b = \frac{1}{\log_a b}$$

FUNZIONE POTENZA

$\forall \alpha\in\mathbb{R}$ e $\forall x\in\mathbb{R}_+$ abbiamo definito x^α. Se $\alpha>0$ la potenza x^α si definisce anche per $x=0$ ponendo

$$0^\alpha = 0$$

$\forall \alpha\in\mathbb{R}_+$ $(\alpha\in\mathbb{R}_-)$ la funzione

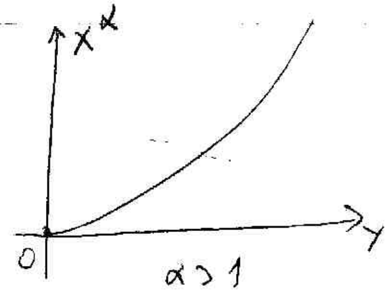
$$x\in[0,+\infty) \longrightarrow x^\alpha \quad \left(x\in(0,+\infty)\longrightarrow x^\alpha\right)$$

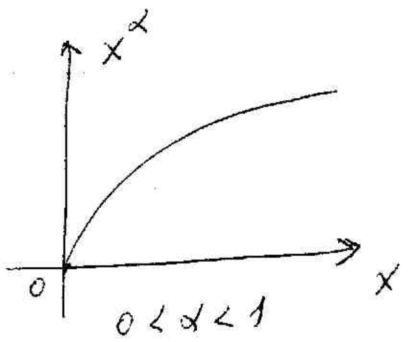
si chiama funzione potenza con esponente α. C'è da osservare che $\forall n\in\mathbb{N}$, la funzione potenza con esponente n è la restrizione a $[0,+\infty)$ della funzione n-ma e la funzione con esponente $1/n$ è la funzione radice n-ma. Quindi, la funzione potenza con esponente α è

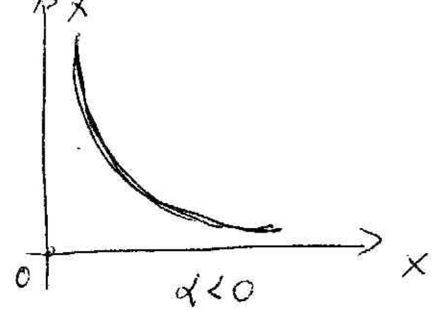
$$x^\alpha : x\in\mathbb{R}_+\cup\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}_+\cup\{0\} \quad \forall\alpha>0$$

$$x^\alpha : x\in\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \forall\alpha<0$$

La funzione potenza con esponente α è strettamente crescente se $\alpha > 0$ e strettamente decrescente se $\alpha < 0$. Infatti i grafici sono

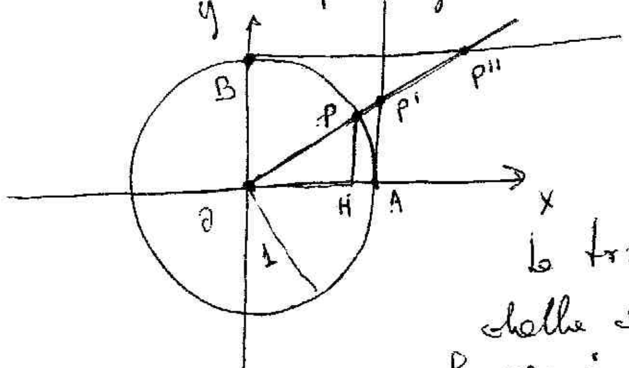






TRIGONOMETRIA

Sia una circonferenza di raggio unitario $x^2+y^2=1$



$\widehat{AP} \doteq x$

$\overline{OH} = \cos x$

$\overline{PH} \doteq \sin x$

La trigonometria nasce dalla definizione di altre funzioni dell'arco

Ovviamente, poiché $\cos x$ e $\sin x$ sono le componenti del punto P che appartiene alla circonferenza, deve essere sempre valida la seguente proprietà:

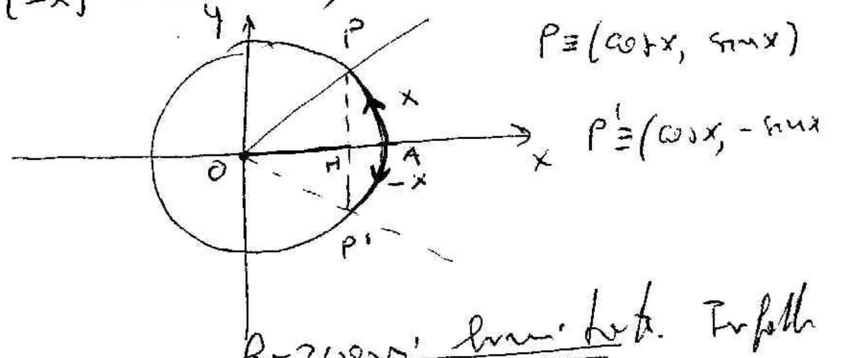
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{PROPRIETÀ} \\ \text{FONDAMENTALE} \\ \text{TRIGONOMETRICA} \end{array} \right.$$

quindi $\cos x$ e $\sin x$ non sono indipendenti fra loro ma nota una delle due si può ricavare l'altra

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}\ , \quad \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

Dalla loro definizione geometrica si nota che il coseno è una funzione pari, mentre il seno è dispari:

$$\cos(-x) = \cos x\ , \quad \sin(-x) = -\sin x$$



$\cos x$ e $\sin x$ sono funzioni limitate. Infatti

$$|\cos x| \le 1\ , \quad |\sin x| \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

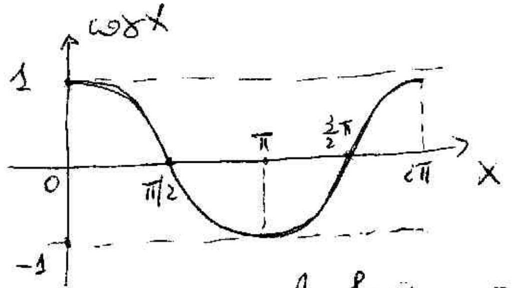
$\cos x$ e $\sin x$ sono funzioni periodiche. Infatti il punto P può "ruotare" sulla circonferenza in maniera indefinita. Quindi ogni giro completo $\sin x$ e $\cos x$ devono assumere gli stessi valori, oppure ogni numero di volte (intero) di giri completi.

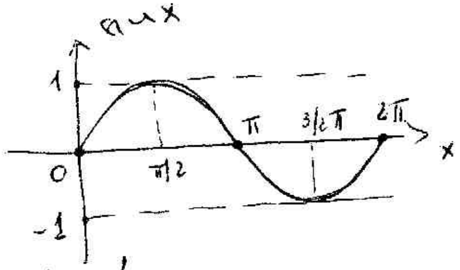
$$\cos(x + k2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + k2\pi) = \sin x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

<u>N.B.</u> Il giro completo nella circonferenza è 2π poiché il raggio è 1.

Essendo periodiche le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ basta analizzarle nell'intervallo $[0, 2\pi]$. I grafici sono:

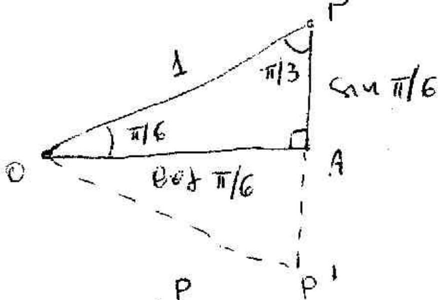




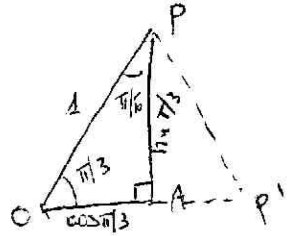
Possiamo concludere quindi che

$$\left\{\begin{array}{l}\cos x \\ \sin x\end{array}\right. : \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \subset \mathbb{R}$$

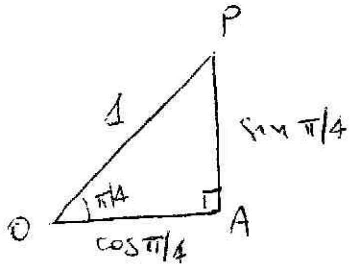
Per valori di $x = \{0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2\}$ è possibile calcolare immediatamente i corrispondenti valori di $\cos x$ e $\sin x$.



$$\sin \pi/6 = 1/2$$
$$\cos^2 \pi/6 + \sin^2 \pi/6 = 1$$
$$\cos \pi/6 = \pm\sqrt{1 - (1/2)^2}$$
$$\cos \pi/6 = \pm \sqrt{3}/2$$



$$\cos \pi/3 = 1/2$$
$$\cos^2 \pi/3 + \sin^2 \pi/3 = 1$$
$$\sin \pi/3 = \pm \sqrt{3}/2$$



$$\cos \pi/4 = \sin \pi/4$$
$$\cos^2 \pi/4 + \sin^2 \pi/4 = 1$$
$$\cos \pi/4 = \sin \pi/4 = \pm \sqrt{2}/2$$

Considerando i triangoli OPH e OP'A (che sono simili) possiamo stimare il segmento $\overline{AP'}$. Infatti

$$\overline{OH} : \overline{OA} = \overline{PH} : \overline{AP'} \iff \overline{AP'} = \frac{\overline{PH} \cdot \overline{OA}}{\overline{OH}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\overline{AP'}$ è detto tangente dell'arco x

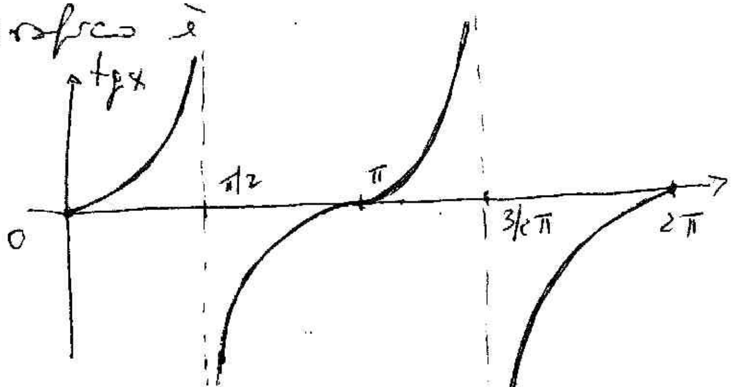
$$tg\, x \doteq \frac{\sin x}{\cos x}$$

ovviamente quanto introdotto ha senso se $\cos x \neq 0$ quindi $x \neq \pi/2$. Si calcolano, quindi, i valori della funzione tangente per gli angoli fondamentali: $tg\, 0 = 0$; $tg\, \pi/6 = \sqrt{3}/3$; $tg\, \pi/4 = 1$;

$\operatorname{tg} \pi/6 = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg} \pi/2$ non esiste. Notiamo che la funzione $\operatorname{tg} x$ non è limitata ed assume valori maggiori di uno. In particolare per valori $x \in [0, \pi/2)$, $\operatorname{tg} x \in [0, +\infty)$. La periodicità della funzione $\operatorname{tg} x$ è diversa da quella delle funzioni $\cos x$ e $\sin x$. Infatti nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la funzione $\operatorname{tg} x$ assume per ben due volte gli stessi valori. Si conclude che il periodo è pari a π.

$$\operatorname{tg}(x + n\pi) = \operatorname{tg} x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

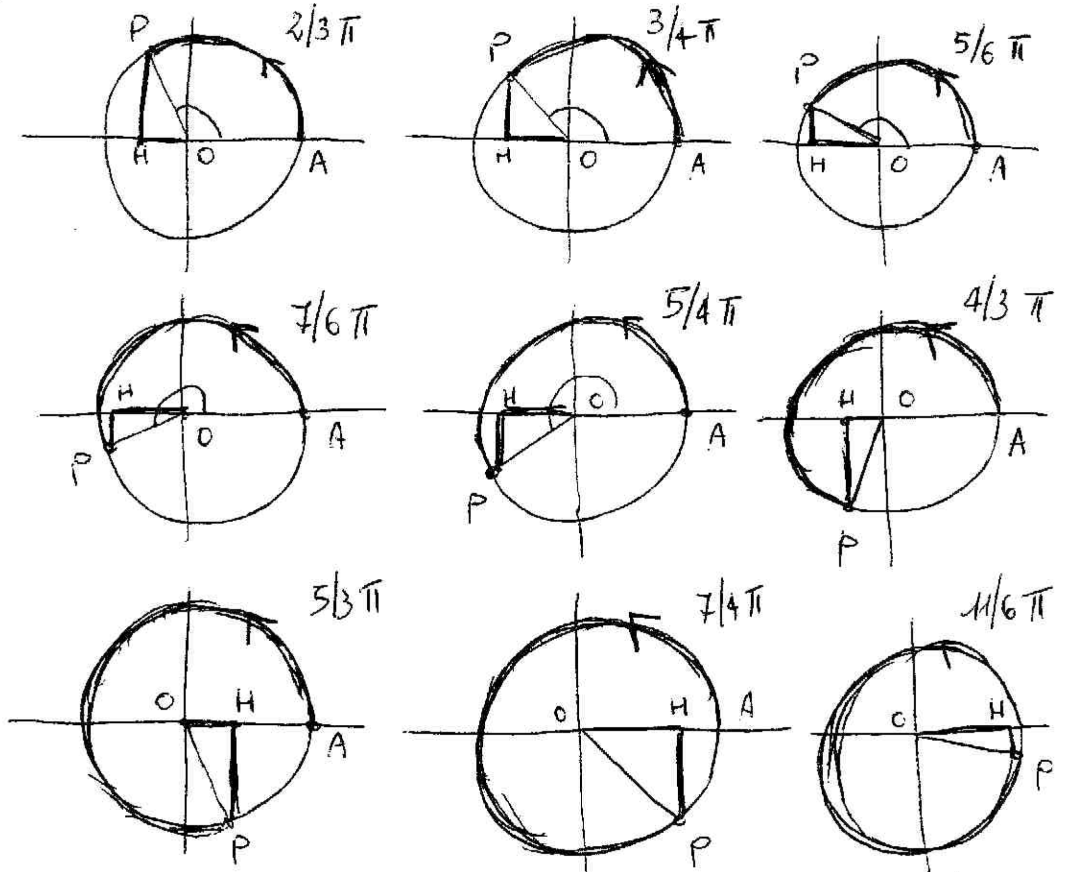
Il grafico è



La funzione $\operatorname{tg} x$ è <u>dispari</u>. Infatti

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

Avendo valutato i valori delle funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ nel primo quadrante, possiamo passare agli altri quadranti. Infatti



Ragionando sui triangoli simili ottenuti rispetto a quello nel primo quadrante si ottengono i seguenti valori:

x	cos x	sin x	tg x
0	1	0	0
π/6	√3/2	1/2	√3/3
π/4	√2/2	√2/2	1
π/3	1/2	√3/2	√3
π/2	0	1	/

x	cos x	sin x	tg x
2/3 π			
3/4 π			
5/6 π			
π	−1	0	0

X	cos x	sin x	tg x
7/6 π			√3/3
5/4 π			1
4/3 π			√3
3/2 π	0	−1	—

X	cos x	sin x	tg x
5/3 π			
7/4 π			
11/6 π			
2 π	1	0	0

Altra funzione trigonometrica importante è la cosiddetta cotangente: cotg x. Il segmento corrispondente alla cotg x è $\overline{BP''}$:

$$\overline{BP''} \doteq \text{cotg}\, x$$

Dai triangoli OPH e OBP'' abbiamo:

$$\overline{OH} : \overline{BP''} = \overline{PH} : \overline{OB}$$

$$\overline{BP''} = \frac{\overline{OH}\cdot\overline{OB}}{\overline{PH}} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Quindi

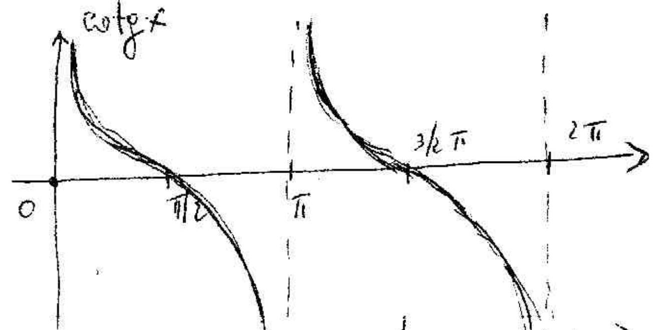
$$\text{cotg}\, x \doteq \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\text{tg}\, x}$$

Come per la funzione tg x anche la cotg x è periodica di $k\pi$ ed è dispari:

$$\text{cotg}\,(x+k\pi) = \text{cotg}\, x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{cotg}\,(-x) = \frac{1}{\text{tg}(-x)} = -\frac{1}{\text{tg}\, x} = -\text{cotg}\, x$$

Il grafico della funzione cotg x è:



Notiamo che il segmento $\overline{OP'}$ può essere valutato in questo modo:

$$\overline{OP'} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AP'}^2} = \sqrt{1+\text{tg}^2 x} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x}$$

mentre il segmento $\overline{OP''}$ in maniera analoga:

$$\overline{OP''} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BP''}^2} = \sqrt{1+\text{cotg}^2 x} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sin x}$$

Il segmento $\overline{OP'}$ è detto funzione secante di x, mentre $\overline{OP''}$ è detto funzione cosecante di x:

$$\sec x \doteq \frac{1}{\cos x}, \quad \text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$$

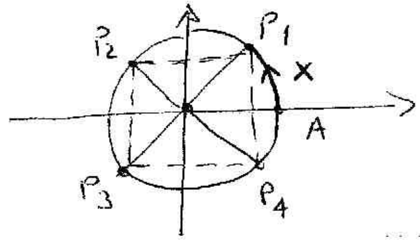
Molto utile in diversi casi è considerare gli <u>archi associati</u>

$\widehat{AP_1} = x$

$\widehat{AP_2} = \pi - x$

$\widehat{AP_3} = \pi + x$

$\widehat{AP_4} = 2\pi - x = -x$



ARCHI SUPPLEMENTARI: x, $\pi - x$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$
$$tg(\pi - x) = -tg\, x$$
$$cotg(\pi - x) = -cotg\, x$$

ARCHI CHE DIFFERISCONO DI π: x, $x+\pi$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$
$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$
$$tg(x+\pi) = tg\, x$$
$$cotg(x+\pi) = cotg\, x$$

ARCHI ESPLEMENTARI (OPPOSTI): $2\pi - x$, x (oppure $x, -x$)

$$\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(2\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$$
$$tg(2\pi - x) = tg(-x) = -tg\, x$$
$$cotg(2\pi - x) = cotg(-x) = -cotg\, x$$

ARCHI COMPLEMENTARI: x e $\pi/2 - x$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$$
$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$$
$$tg(\pi/2 - x) = cotg\, x$$
$$cotg(\pi/2 - x) = tg\, x$$

ARCHI CHE DIFFERISCONO DI $\pi/2$: x e $\pi/2 + x$

$$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$$
$$\sin(\pi/2 + x) = \cos x$$
$$tg(\pi/2 + x) = -cotg\, x$$
$$cotg(\pi/2 + x) = -tg\, x$$

Dalla relazione fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ in termini di $tg\, x$ otteniamo:

$$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

da cui

$$tg\, x = \pm \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$$

$$tg\, x = \pm \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

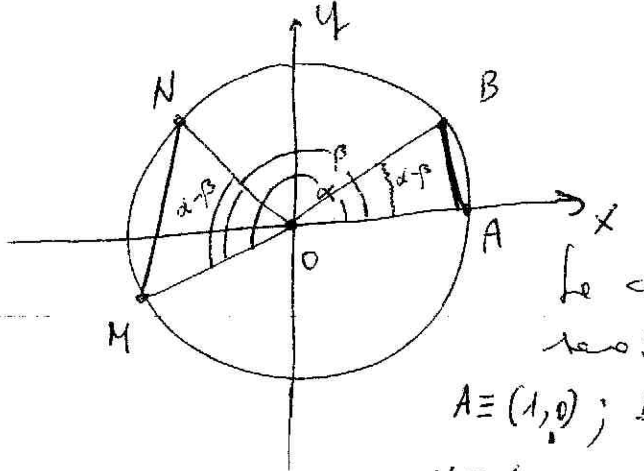
ed invertendo otteniamo:

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}}$$

$$\sin x = \pm \frac{tg\, x}{\sqrt{1+tg^2 x}}$$

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Sia $\widehat{AM} = \alpha$ e $\widehat{AN} = \beta$ due archi qualunque e sia $\overline{MN}$ la corda sottesa dell'arco $\widehat{MN} = \alpha - \beta$.



$\overline{AB} = \overline{MN}$ per costruzione

Le coordinate dei punti sono:

$A \equiv (1,0)$; $B \equiv (\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$

$N \equiv (\cos\beta, \sin\beta)$; $M \equiv (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$$\overline{AB} = \overline{MN} \iff \sqrt{[1-\cos(\alpha-\beta)]^2 + [0-\sin(\alpha-\beta)]^2} =$$

$$= \sqrt{[\cos\beta-\cos\alpha]^2 + [\sin\alpha-\sin\beta]^2}$$

$$(1-\cos(\alpha-\beta))^2 + \sin^2(\alpha-\beta) = (\cos\beta-\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha-\sin\beta)^2$$

dopo qualche passaggio si ottiene

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

formula di sottrazione per il coseno.
Ora sostituendo $\beta \to -\beta$ otteniamo la formula per l'addizione del coseno:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Per quelle relative al seno basta ricordare le proprietà degli archi complementari. Quindi sostituiamo $\alpha \to \pi/2 - \alpha$

$$\cos(\pi/2-\alpha-\beta) = \cos(\pi/2-\alpha)\cos\beta + \sin(\pi/2-\alpha)\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

infine sostituendo $\beta \to -\beta$ otteniamo

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

In conclusione otteniamo

(FORMULE ADDIZIONE SOTTRAZIONE)

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

Volendo calcolare per la $tg\,x$, basta applicare la definizione:

$$tg(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

Le formule ottenute sono valide nell'ipotesi che $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $\beta \neq \pi/2 + k\pi$, $\alpha+\beta \neq \pi/2 + k\pi$ e $\alpha-\beta \neq \pi/2 + k\pi$, poiché la funzione tangente non è definita.

FORMULE DUPLICAZIONE

Siamo interessati a valutare le funzioni trigonometriche per angoli del tipo 2α.
Infatti se $\beta = \alpha$, abbiamo:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \begin{cases} 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha \sin\alpha$$

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Anche in questo caso per la funzione tangente vi sono delle restrizioni, ossia:

$$\alpha \neq \pi/4 + k\pi/2 \; ; \; \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \; \alpha \neq \pi/4 + k\pi/2.$$

FORMULE PARAMETRICHE

Spesso è utile esprimere in altro modo le formule di duplicazione del seno e del coseno.
Ponendo $\alpha/2$, troviamo:

$$\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

da cui

$$\sin\alpha = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

dividendo per $\cos^2\alpha/2$ $\quad (\alpha \neq \pi + k2\pi)$

si ottiene:

$$\sin\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha/2}{1 + tg^2\alpha/2}, \quad \cos\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha/2}{1 + tg^2\alpha/2}$$

definendo $t \doteq tg\,\alpha/2$ si ha

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{(FORMULE PARAMETRICHE)}$$

Tali relazioni sono dette ~~formule~~ le parametriche ed esprimono il seno ed il coseno di un arco in funzione razionale della tangente dell'arco metà. Esse sono valide $\forall \alpha \neq \pi + k2\pi$.

FORMULE DI BISEZIONE

Poiché $\cos 2\alpha = \begin{cases} 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$, sostituendo $\alpha \to \alpha/2$ abbiamo:

$$\cos\alpha = \begin{cases} 1 - 2\sin^2\alpha/2 \\ 2\cos^2\alpha/2 - 1 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \sin\alpha/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\alpha/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \end{cases} \quad \text{(FORMULE BISEZIONE)}$$

e per la tangente

$$tg\,\alpha/2 = \frac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

se $\alpha \neq \pi + n2\pi$.

FORMULE DI PROSTAFERESI

Sono utili a trasformare in prodotti le somme o le differenze di funzioni trigonometriche. Dalle formule di addizione e sottrazione otteniamo:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

da cui

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

Poniamo

$$\begin{cases} \alpha+\beta = p \\ \alpha-\beta = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{p+q}{2} \\ \beta = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} \sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$$

ripetendo lo stesso discorso per il coseno si ottiene:

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$$

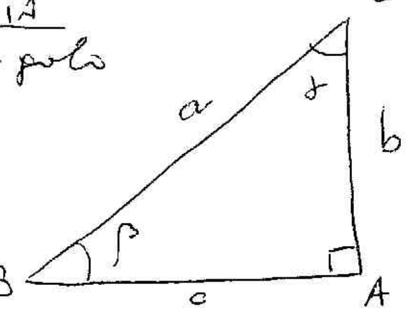
FORMULE DI WERNER

Rappresentano la versione inversa di quelle di prostaferesi. Infatti ripetendo un discorso analogo si ottiene:

$$\begin{cases} \sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} \\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2} \end{cases}$$

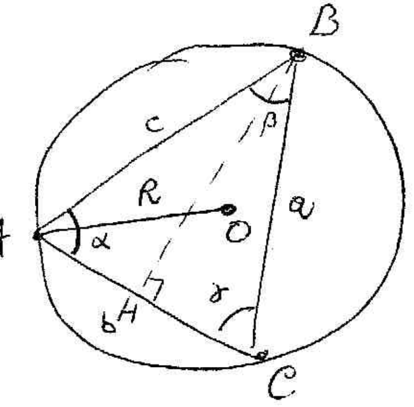
APPLICAZIONE TRIGONOMETRIA

Sia un triangolo rettangolo



$$b = a\sin\beta = a\cos\gamma$$
$$c = a\cos\beta = a\sin\gamma$$
$$b = c\,tg\,\beta = c\,cotg\,\gamma$$
$$tg\,\beta = \frac{b}{c}$$

Sia ora un generico triangolo inscritto in una circonferenza di raggio R



TEOREMA DEI SENI

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

TEOREMA DELLE PROIEZIONI

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$
$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

TEOREMA DEL COSENO (O DI CARNOT)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

ALTRE RELAZIONI

S (superficie triangolo) $= \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BH} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$

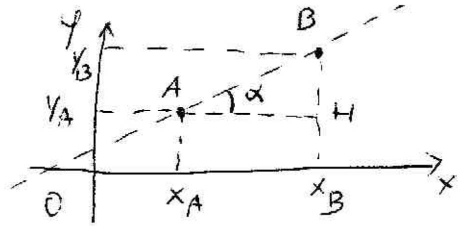
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ (FORMULA DI ERONE)

$$R = \frac{abc}{4S}$$

[PARENTESI PROPRIETÀ RETTA in $\mathbb{R}^2$

Come è stato introdotto in precedenza per lo studio della retta il coefficiente angolare delle rette passanti per due punti $A \equiv (x_A, y_A)$, $B \equiv (x_B, y_B)$ è stato che

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

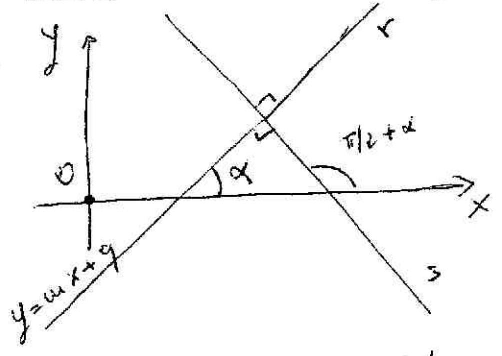


che corrisponde nel triangolo ABH alla tangente dell'angolo α;

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \operatorname{tg}\alpha$$

che chiarisce la motivazione dell'appellativo angolare per m.

È possibile, in maniera semplice, dimostrare la condizione di ortogonalità tra due rette. Infatti data una retta $y = mx + q$ notiamo:



$r:\ y = mx + q$

$s:\ y = m'x + q'$

$$m' = \operatorname{tg}(\pi/2 + \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{m}$$

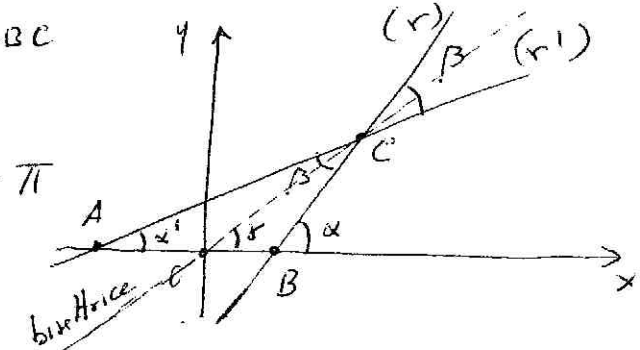
e quindi la condizione $mm' = -1$

Calcoliamo ora l'angolo tra due rette date in termini dei coefficienti angolari:

$(r')\ y = m'x + q'$ e $y = mx + q$ (r)

Nel triangolo ABC si ha

$$\alpha' + (\pi - \alpha) + \beta = \pi$$



$$\beta = \alpha - \alpha'$$

$$tg\,\beta = tg\,(\alpha - \alpha') = \frac{tg\alpha - tg\alpha'}{1 + tg\alpha\, tg\alpha'}$$

che in termini di coefficienti angolari

$$tg\,\beta = \frac{m - m'}{1 + m m'}$$

Calcoliamo il coefficiente angolare della retta bisettrice. Sia γ l'angolo che la bisettrice forma con l'asse x.

Nel triangolo OCB si ha

$$\gamma + (\pi - \alpha) + \frac{\beta}{2} = \pi$$

$$\gamma + \cancel{\pi} - \alpha + \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \cancel{\pi} \implies \gamma = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$$

$$tg\,\gamma = tg\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) \implies m_\gamma = tg\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right)$$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$\forall x \in \mathbb{R}$ si introducono due funzioni della variabile reale x dette funzioni iperboliche

$$\cosh x \doteq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x \doteq \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

dette rispettivamente coseno iperbolico di x e seno iperbolico di x. Come nel caso delle trigonometriche si introduce la funzione rapporto tra seno iperbolico e coseno iperbolico detta tangente iperbolica,

$$tgh\, x \doteq \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

La proprietà fondamentale delle funzioni iperboliche è

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(è quanto succede per le trigonometriche ma vi è il + mentre la differenza di quadrati ricorda l'equazione dell'iperbole)

Si verificano facilmente le proprietà:

$\sinh(-x) = -\sinh x$ (funzione dispari)

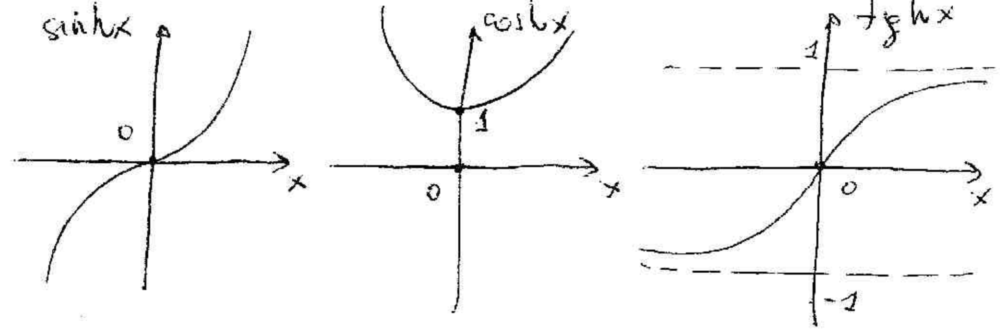
$\cosh(-x) = \cosh x$ (funzione pari)

$tgh(-x) = -tgh\, x$ (funzione dispari)

$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

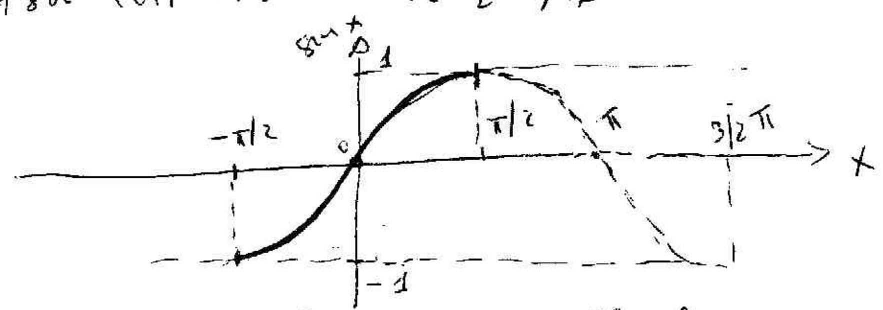
$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

Gli andamenti delle funzioni iperboliche sono

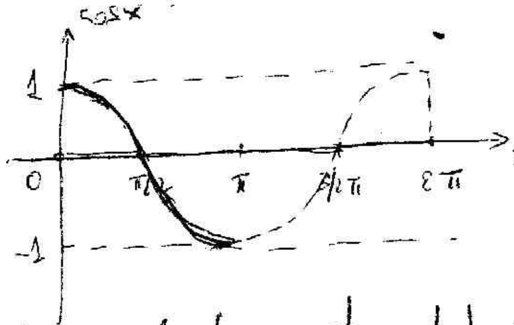


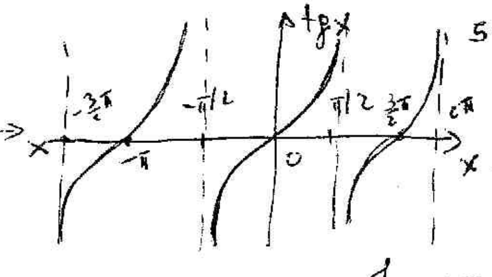
FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Dalla definizione del seno e del coseno di un numero reale si deduce che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la restrizione della funzione seno nell'intervallo $[-\pi/2 + k2\pi, \pi/2 + k2\pi]$ ($[\pi/2 + k2\pi, 3\pi/2 + k2\pi]$) è un'applicazione strettamente crescente (strettamente decrescente) di tale intervallo su $[-1, 1]$.



$\forall k \in \mathbb{Z}$, la restrizione della funzione coseno all'intervallo $[k2\pi, \pi + k2\pi]$ ($[\pi + k2\pi, 2\pi + k2\pi]$) è un'applicazione strettamente decrescente (strettamente crescente) di tale intervallo su $[-1, 1]$.





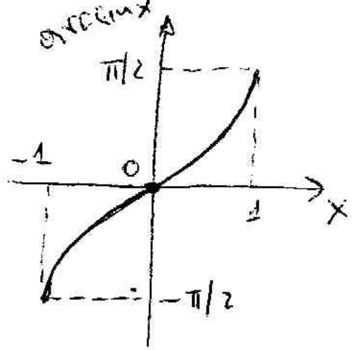
Anche per la tangente abbiamo bisogno di una restrizione per ottenere un carattere monotono. Infatti: $\forall k \in \mathbb{Z}$, la restrizione della funzione tangente all'intervallo $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ è un'applicazione strettamente crescente di tale intervallo su $\mathbb{R}$.

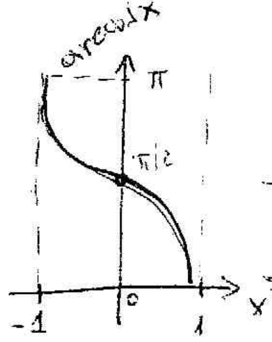
Grazie a queste restrizioni le funzioni seno, coseno e tangente sono invertibili, poiché

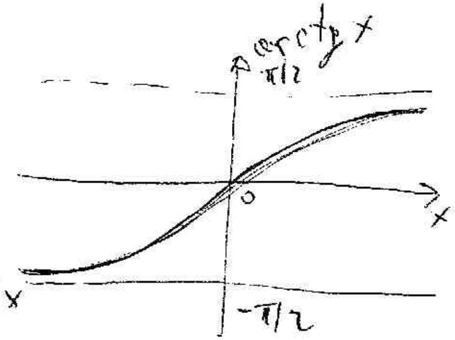
$$\begin{cases} \sin x : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1] & \text{crescente} \\ \cos x : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] & \text{decrescente} \\ \operatorname{tg} x : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R} & \text{crescente} \end{cases}$$

ed otteniamo

$$\begin{cases} \arcsin x : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] & \text{crescente} \\ \arccos x : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] & \text{decrescente} \\ \operatorname{arctg} x : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2) & \text{crescente} \end{cases}$$







Alcuni valori particolari sono:

$\arcsin 1 = \pi/2 \qquad \arcsin(-1) = -\pi/2 \qquad \arcsin 0 = 0$

$\arcsin \frac{1}{2} = \pi/6 \qquad \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi/4 \qquad \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\arccos 1 = 0 \qquad \arccos(-1) = \pi \qquad \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

$\arccos 1/2 = \pi/3 \qquad \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \qquad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$

$$\mathrm{arctg}\, 0 = 0 \qquad \mathrm{arctg}\, 1 = \pi/4$$

$$\mathrm{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} \qquad \mathrm{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

FUNZIONI IPERBOLICHE INVERSE

La funzione seno iperbolico è un'applicazione strettamente crescente $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e la sua inversa è la funzione:

$$x \in \mathbb{R} \to \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \in \mathbb{R}$$

detta _settore seno iperbolico_.

$$\mathrm{settsinh}\, x \doteq \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Infatti formalmente abbiamo:

$$y = \sinh x \iff x = \mathrm{settsinh}\, y$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \to e^{2x} - 2y e^x - 1 = 0$$

$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$ la soluzione "$-$" è da escludere.

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \to x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

La restrizione della funzione coseno iperbolico a $[0,+\infty)$ ($(-\infty,0]$) è un'applicazione strettamente crescente (strettamente decrescente) di tale intervallo su $[1,+\infty)$, la cui inversa è la funzione

$$x \in [1,+\infty) \to \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x \in [1,+\infty) \to \ln(x - \sqrt{x^2-1}))$$

detta _settore coseno iperbolico_.

$$\mathrm{settcosh}\, x \doteq \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$$

Infatti formalmente abbiamo

$$y = \cosh x \iff x = \mathrm{settcosh}\, y$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \to e^{2x} - 2y e^x + 1 = 0$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2-1} \to x = \ln(y \pm \sqrt{y^2-1})$$

la funzione tangente iperbolica è un'applicazione strettamente crescente di $\mathbb{R}$ su $(-1,1)$ la cui inversa è la funzione:

$$x \in (-1,1) \longrightarrow \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \in \mathbb{R}$$

detta <u>settore tangente iperbolica</u>

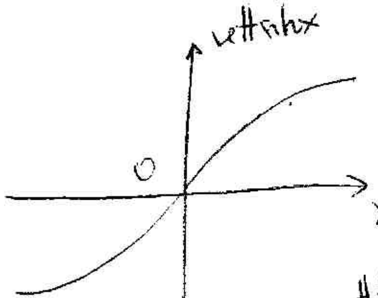
$$\text{setttgh}\, x \doteq \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

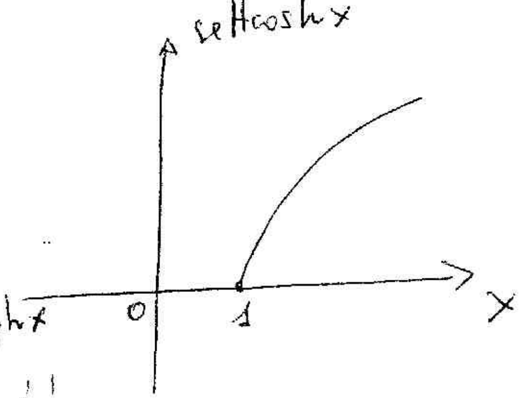
Anche qui abbiamo

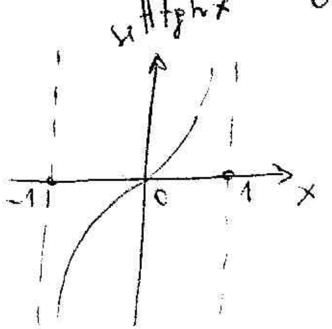
$$y = \text{tgh}\, x \iff x = \text{setttgh}\, y$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \longrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

$$e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \longrightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$



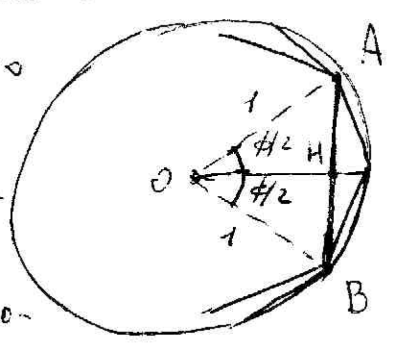




PI GRECO: π

Geometricamente, π è l'area del cerchio di raggio 1. Così dicendo stiamo accettando come evidente che tale numero esista, cioè l'area del cerchio possa essere espressa con un numero reale.

Indipendentemente da questioni di rigore, questa definizione però non è di alcun aiuto quando si vuol calcolare il numero π; in questo caso, occorre riferirsi a qualche metodo di approssimazione per l'area del cerchio.



Se si inscrive nel cerchio un poligono regolare di m lati, e si indica con $\phi = \frac{2\pi}{m}$ l'angolo al centro e con A_m l'area del poligono inscritto, risulta

$$A_{AOH} = \frac{1}{2} \cos\frac{\phi}{2} \sin\frac{\phi}{2}, \quad A_m = 2m\, A_{AOH}$$

$$A_m = m \cos\frac{\phi}{2} \sin\frac{\phi}{2} = \frac{m}{2} \sin\phi$$

Ora se passiamo ad un poligono con $2m$ lati otteniamo:

$$A_{2m} = m \sin \phi/2$$

Bisogna diminuire l'angolo ϕ (che contie-

ne π) per ottenere una formula ricorrente.
Ricordando che $2\sin^2\phi/2 = 1-\cos\phi$ si ottiene:

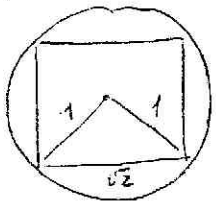
$$\sin^2\phi/2 = \frac{1-\cos\phi}{2} = \frac{1-\sqrt{1-\sin^2\phi}}{2}$$

$$\sin\phi/2 = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\phi}}}{\sqrt{2}}\ ;\quad \sin\phi = \frac{2A_n}{n}$$

$$A_{2n} = \frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4A_n^2}{n^2}}}$$

nel caso che $n=4$ (quadrato)

$A_4 = 2$ e quindi otteniamo una stima nell'area dell'ottagono



$$A_8 = \frac{4}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\cdot 4}{16}}} = \dots$$

Ora nel limite di $n\to\infty$ otteniamo π.

NUMERI COMPLESSI

Il campo dei numeri reali è inadeguato ad un'esauriente impostazione di molte questioni matematiche. In particolare, esso non è l'ambiente naturale per lo studio delle equazioni algebriche, in quanto, come mostra l'esempio dell'equazione $x^2+1=0$, non sempre un'equazione algebrica a coefficienti reali ha soluzione reale.
Ed è appunto l'esigenza di definire un campo numerico più ampio di quello dei numeri reali, in cui ogni equazione algebrica abbia soluzione, che ha dato origine alla teoria dei numeri complessi.

CAMPO DEI NUMERI COMPLESSI

Sia $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Si chiama addizione in $\mathbb{R}^2$ e si denota con $+$, l'operazione in $\mathbb{R}^2$ che ad ogni coppia $z=(a,b)$ e $z'=(a',b') \in \mathbb{R}^2$ associa l'elemento

$$z+z' = (a+a',\ b+b')$$

Si chiama moltiplicazione in $\mathbb{R}^2$ ......

$$z\cdot z' = (aa'-bb',\ ab'+a'b)$$

Si verifica che l'addizione e la moltiplicazione godono delle proprietà associativa e commutativa, la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione:

$z+z' = z'+z$; $z\cdot z' = z'\cdot z$; $(z+z')\cdot z'' = z\cdot z''+z'\cdot z''$

$z\cdot(z'\cdot z'') = (z\cdot z')\cdot z''$ $\quad (z+z')+z'' = z+(z'+z'')$

$(0,0)$ è l'elemento neutro rispetto all'addizione

$(1,0)$ è l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione

$\forall (a,b)\in \mathbb{R}^2$, $(-a,-b)$ è il simmetrico di (a,b) rispetto all'addizione.

$\forall (a,b) \neq (0,0)$, $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ è il simmetrico di (a,b) rispetto alla moltiplicazione.

L'insieme dei numeri complessi è indicato con il simbolo $\mathbb{C}$. È ovvio che

$$\boxed{\mathbb{N}\subset \mathbb{Z}\subset \mathbb{Q}\subset \mathbb{R}\subset \mathbb{C}}$$

z^k con $n\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}$ è detta potenza di z.

La sottrazione tra numeri complessi è definita semplicemente:

$$z - z' = z''$$

dove $z=(a,b)$, $z'=(c,d)$, $z''=(a-c, b-d)$

La divisione tra numeri complessi è espressa come segue

$$\frac{z}{z'} = z''$$

dove $z=(a,b)$, $z'=(c,d)$, $z''=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{cb-da}{c^2+d^2}\right)$

È ovvio che $\frac{z}{z'} = z\cdot\frac{1}{z'} = (a,b)\cdot\frac{1}{(c,d)} = (a,b)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2}\right) = \dots$ si ottiene la tesi.

Facilmente si pone $\frac{(1,0)}{(a,b)} = (a,b)^{-1}$, $\frac{(0,0)}{(a,b)} = (0,0)$

FORMA ALGEBRICA DEI NUMERI COMPLESSI

Dato che $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ e considerate le operazioni che sono state definite ed i numeri complessi $(1,0)$ e $(0,1)$ ed i numeri reali (scritti in notazione complessa) $(a,0)$ e $(b,0)$ possiamo esprimere z come segue:

$$z=(a,b) = (a,0)\cdot(1,0)+(0,1)(b,0)$$

$$\overset{!}{=} (a,0)+(0,1)(b,0)$$

N.B. Applicando la regola del prodotto si nota che otteniamo sempre scritto lo stesso caso.

Si conviene indicare il numero complesso (0,1) con i (UNITÀ IMMAGINARIA)

$$i \doteq (0,1), \quad z=(a,b) = a+ib$$

$a+ib$ è detta forma algebrica del numero complesso (a,b).

Quanto vale i^2? Semplice basta calcolare la potenza:

$$i^2 = i\cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = \dots = -(1,0)$$

ma $(1,0)$ è un particolare numero complesso: infatti è l'unità nell'insieme dei reali. Concludiamo quindi:

$$i^2 = -1$$

Consideriamo il prodotto di $a+ib$ e $c+id$:

$$(a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc - bd$$

$$= (ac-bd) + i(ad+bc)$$

che è quanto ottenuto in precedenza con la notazione di coppie.

L'inverso di z si ottiene:

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib}\cdot\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

che, ancora una volta, quanto ottenuto in precedenza.

CONIUGATO E MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO

Sia $z = a+ib$ un numero complesso. Si definiscono:

a: parte reale di z $\Longleftrightarrow$ $a \doteq \mathrm{Re}\, z$

b: parte immaginaria di z $\Longleftrightarrow$ $b \doteq \mathrm{Im}\, z$

Quindi

$$z = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z$$

Si definisce numero complesso coniugato di z il numero

$$\bar{z} = a - ib$$

Si verifica facilmente che sono valide le seguenti proprietà:

$$\overline{(\bar{z})} = z, \quad z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z, \quad z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$$

$$\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z}', \quad \overline{z\cdot z'} = \bar{z}\cdot\bar{z}', \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

Si definisce <u>modulo di z</u> e si indica con $|z|$ il numero $\sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$:

$$|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Evidentemente se $z \in \mathbb{R}$ $|z| =$ è il valore assoluto di z. Si verificano facilmente che

$$|z| = |-z|, \quad |z| = |\bar{z}|, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| \; ; \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$|z| = 0 \iff z = 0$$

Anche per i numeri complessi possiamo definire una disuguaglianza triangolare

$$|z+z'| \le |z| + |z'|$$

Notiamo innanzitutto che

$$a \le |a| = \sqrt{a^2} \le \sqrt{a^2+b^2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z = 2a \le 2\sqrt{a^2+b^2} = 2|z|$$

Dati $z, z' \in \mathbb{C}$ si ha

$$z \cdot \bar{z}' + \bar{z} \cdot z' = z \cdot \bar{z}' + \overline{z \cdot \bar{z}'} \le 2|z \cdot \bar{z}'| = 2|z| \cdot |\bar{z}'|$$

Ne segue

$$|z+z'|^2 = (z+z') \cdot \overline{(z+z')} = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') =$$

$$= z \cdot \bar{z} + z' \cdot \bar{z}' + z \cdot \bar{z}' + \bar{z} \cdot z'$$

$$\le |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|$$

cioè

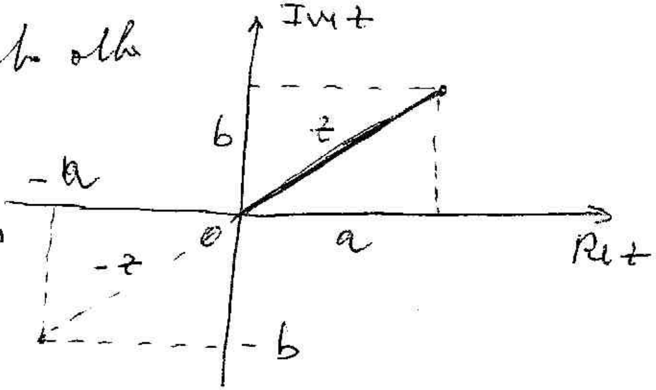
$$|z+z'|^2 \le (|z| + |z'|)^2$$

$$\Rightarrow \quad |z+z'| \le |z| + |z'| \qquad \text{c.v.d.}$$

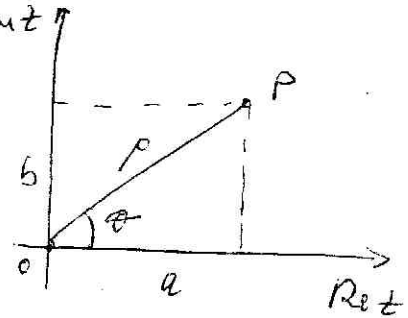
RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA

Sia Π un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali. $\forall\, a+ib \in \mathbb{C}$ è possibile associare un $P \in \Pi$.

L'asse x corrisponde alla parte reale di z e l'asse y a quella immaginaria di z.



FORMA TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI



Si nota che $|z|$ non è altro che la distanza di z dall'origine delle coordinate. Se si indica con θ l'angolo compreso tra l'asse delle x e la retta congiungente O e P e con ρ il modulo di z si ha:

$$z = a + ib = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

θ è argomento del numero complesso z e si indica con $\arg(z)$.

Data la coppia (ρ, θ) il numero complesso $z = a+ib$ è univocamente determinato. Mentre dato $z = a+ib$ si ha

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} \quad e \quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{y}{\rho}$$

Volendo ricavare θ si nota che otteniamo "infiniti" valori per θ che soddisfano le precedenti relazioni. Infatti se θ^* è tale che $\cos\theta^* = x$ anche $\theta^* + k2\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ soddisfano le stesse condizioni.

Calcoliamo il prodotto di due numeri complessi

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\sin\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= \rho_1\rho_2\Big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\Big] = \rho_1\rho_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$$

Quindi se $|z_1| = \rho_1$, $|z_2| = \rho_2$, $\arg(z_1) = \theta_1$ e $\arg(z_2) = \theta_2$ otteniamo

$$|z_1 \cdot z_2| = \rho_1\rho_2, \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2$$

⚠ Notiamo che definita $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ si ha $f(\theta_1)f(\theta_2) = f(\theta_1+\theta_2)$ analoga a

$$A^{x_1} \cdot A^{x_2} = A^{x_1+x_2}$$

Si pone

$$\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta} \quad \begin{pmatrix}\text{FORMULA}\\ \text{DI EULERO}\end{pmatrix}$$

per cui un qualunque numero complesso potrà essere sempre scritto come segue:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Cosicché otteniamo

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Quindi la potenza n-ma di z si scrive:

$$z^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Il numero inverso di z diviene:

$$z^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta} = \frac{e^{-i\theta}}{\rho} .$$

Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che

$$z^n = \alpha \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

per la forma trigonometrica abbiamo

$$\rho^n e^{in\theta} = R e^{i\phi}$$

se $R e^{i\phi} = \alpha$

e quindi

$$\rho = R^{1/n} \quad \text{e} \quad n\theta = \phi + k2\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$

da cui $\theta = \dfrac{\phi + k2\pi}{n}$

che tecnicamente sono in numero infinito. Tuttavia notiamo che

$$\theta = \phi/n + \left(\frac{k}{n}\right)2\pi$$

da cui esistono solo un numero finito di soluzioni distinte e dopo queste si riottengono periodicamente le stesse.
Si dimostra per fissato n esistono n soluzioni diverse per le quali $k = 0, \dots, n-1$

Volendo concludere calcoliamo il rapporto di due numeri complessi:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \rho_1 e^{i\theta_1} \rho_2^{-1} e^{-i\theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$