PON 2007 – 2013
Liceo Scientifico *Leonardo da Vinci*
Vallo della Lucania
Nuovi percorsi matematici:
Osservare, descrivere, costruire.

Matlab - 7: Calcolo simbolico

Arturo Stabile

Vallo della Lucania

17 novembre 2008

Symbolic Math Toolboxes

- I Symbolic Math Toolboxes incorporano calcolo simbolico nell'ambiente numerico di Matlab
- Alcuni tipi di calcolo simbolico possibili sono:
  - Integrazione, differenziazione, limiti, serie di Taylor
  - Algebra lineare
  - Semplificazione
  - Soluzione di equazioni

Oggetti simbolici

- Per inserire un oggetto simbolico si utilizza il comando sym()
- Per ottenere il valore numerico di un oggetto simbolico si usa il comando double()

```
>> s=sym(2)
s =
2
>> r=sqrt(s)
r =
2^(1/2)
```

```
>> double(r)
ans =
   1.4142
```

Esempi

```
>> sym(2)/sym(5)
ans =
2/5
>> double(ans)
ans =
    0.4000
```

```
>> sym(2)/sym(5) + sym(1)/sym(3)
ans =
11/15
>> double(ans)
ans =
    0.7333
```

Il comando syms

- Un altro modo, più efficiente, di dichiarare oggetti simbolici è quello di usare il comando syms

```
>>
>> syms a b c x
>> f = sym('a*x^2+b*x+c')
f =
a*x^2+b*x+c
>>
```

Il comando findsyms

- Per determinare quali variabili simboliche sono presenti in un espressione si usa il comando findsym

```
>> syms a b c x
>> f = 2*a*x^4+b*x-c
f =
2*a*x^4+b*x-c
>> findsym(f)
ans =
a, b, c, x
```

Il comando subs

- Per sostituire un valore simbolico con uno numerico si usa il comando subs

```
>> subs(f,3)

ans =

162*a+3*b-c
```

Sostituiamo, nella precedente espressione, alla variabile x il valore 3

Al posto di 3 possiamo passare un vettore di punti

Nota

- Quando un’espressione contiene più di una variabile simbolica, si può indicare la variabile per cui effettuare la sostituzione

```
>> syms x y
>> f = x^2*y + 5*x*sqrt(y)
f =
x^2*y+5*x*y^(1/2)
>> subs(f, x, 3)
ans =
9*y+15*y^(1/2)
```

Sostituire più simboli

- subs(expr, {lista simboli}, {lista valori})

```
>> f = x^2*y + 5*x*sqrt(y)
f =
x^2*y+5*x*y^(1/2)
>> subs(f, {x,y}, {3,2})
```

Sommatorie simboliche

- Per calcolare sommatorie simboliche si usa il comando symsum

```
>> syms x k
>> s1 = symsum(1/k^2,1,inf)
s1 =
1/6*pi^2
```

```
>> s3 = symsum(x^k,k,0,4)
s3 =
1+x+x^2+x^3+x^4
```

```
>> s2 =
symsum(x^k,k,0,inf)
s2 =
-1/(x-1)
```

Serie di Taylor

- Il comando taylor(f) calcola l'espansione di Tailor di f

quinto ordine

```
>> taylor(exp(-x))
ans =
1-x+1/2*x^2-1/6*x^3+1/24*x^4-1/120*x^5
```

settimo ordine

```
>> syms x
>> f = 1/(5+4*cos(x));
>> T = taylor(f,8)
T =
1/9+2/81*x^2+5/1458*x^4+49/131220*x^6
```

Analisi

- Vedremo
  - Derivazione
  - Calcolo limiti
  - Integrazione

Derivata prima

- Si usa il comando diff per calcolare la derivata prima rispetto ad x

```
>> syms x
>> f = sin(5*x)
f =
sin(5*x)
>> diff(f)
ans =
5*cos(5*x)
```

Derivata seconda

- Per calcolare la derivata seconda si usa il comando diff(f,2)

```
>> g = exp(x)*cos(x)
g =
exp(x)*cos(x)
>> diff(g,2)
ans =
-2*exp(x)*sin(x)
```

Derivata di funzione a più variabili

- In questo caso è necessario indicare la variabile rispetto a cui derivare

```
>> syms s t
>> f = sin(s*t)
f =
sin(s*t)
>> diff(f,t)
ans =
cos(s*t)*s
```

```
>> diff(f,s)
ans =
cos(s*t)*t
>>
```

Limiti di funzione

- Per calcolare il limite di una funzione si usa la funzione limit
  - limit(f,x)
    - Calcola il limite di f per x che tende a 0
  - limit(f,x,b)
    - Calcola il limite di f per x che tende a b
  - limit(f,x,b,'right')
    - Calcola il limite di f per x che tende a b da destra

Esempi

```
>>
limit(x/abs(x),x,0)
ans =
NaN
```

```
>> limit(x/abs(x),x,0,'right')
ans =
1
```

```
>> syms x n
>> limit( (1 + x/n)^n,n,inf )
ans =
exp(x)
```

Calcolare i seguenti limiti

(a) $\lim_{x\to 0} x^x$;

(b) $\lim_{x\to 0} x \ln x$;

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$;

(d) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}$;

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$;

(f) $\lim_{x\to 0^+} (1 + |\sin x|)^{\frac{1}{x}}$;

(g) $\lim_{x\to\infty} xe^x \sin\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)$;

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}$;

(i)(*) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x}$;

Integrazione

- Se f è un'espressione simbolica, allora con int(f) si cerca un'altra espressione simbolica F tale che diff(F) = f
- Con il comando int(f) si calcola l'integrale indefinito di f
- L'integrazione definita è possibile tramite il comando int(f,a,b)

Esempi

```
>> syms x
>> f = sin(x)
f =
sin(x)
>> int(f)
ans =
-cos(x)
```

```
>> int(sym(5))
ans =
5*x
```

```
>> int(f,0,pi)
ans =
2
```

Esercizi

$$1)\quad \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$$

$2)\ \int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx \qquad \left[\mathbf{R}.\ \log\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right| + C\right]$

$3)\ \int \frac{x\ dx}{(x+1)(x+3)(x+5)} \qquad \left[\mathbf{R}.\frac{1}{8}\log\frac{(x+3)^6}{|x+5|^5|x+1|} + C\right]$

$4)\ \int \frac{x^3-6\ dx}{x^4+6x^2+8} \qquad \left[\mathbf{R}.\ \log\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C\right]$

$5)\ \int \frac{x^5\ dx}{x^3-1} \qquad \left[\mathbf{R}.\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\log(x^3-1) + C\right]$

$6)\ \int \frac{4\ dx}{x^4+1} \qquad \left[\mathbf{R}.\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \sqrt{2}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C\right]$

Semplificazioni di espressioni

- Per semplificare un'espressione si utilizzano i comandi
  - pretty
  - collect
  - expand
  - horner
  - factor
  - simplify
  - simple
- Maggiori dettagli dall'aiuto in linea di Matlab

Esempi

Funziona meglio per espressioni trigonometriche

f	simple(f)
`cos(x)^2+sin(x)^2`	`1`
`2*cos(x)^2-sin(x)^2`	`3*cos(x)^2-1`
`cos(x)^2-sin(x)^2`	`cos(2*x)`
`cos(x)+(-sin(x)^2)^(1/2)`	`cos(x)+i*sin(x)`
`cos(x)+i*sin(x)`	`exp(i*x)`
`cos(3*acos(x))`	`4*x^3-3*x`

f	simplify(f)
`(1/a^3+6/a^2+12/a+8)^(1/3)`	`((2*a+1)^3/a^3)^(1/3)`
`syms x y positive` `log(x*y)`	`log(x)+log(y)`

Risoluzione di equazioni algebriche

- Se f è un'espressione in x, allora il comando solve(f) cerca i valori di x per cui l'espressione f è uguale a zero [risolve f(x) = 0]

```
>> syms a b c x
>> f = a*x^2 + b*x + c;
>> solve(f)
ans =
[ 1/2/a*(-b+(b^2-4*a*c)^(1/2))]
[ 1/2/a*(-b-(b^2-4*a*c)^(1/2))]
```

Nota – 1

- Possiamo specificare una variabile per cui risolvere l'equazione

```
>> solve(f,b)
ans =
-(a*x^2+c)/x
```

```
>> solve(f,a)
ans =
-(b*x+c)/x^2
```

Nota – 2

- Per risolvere equazioni tipo f(x)=g(x) dobbiamo indicare l'espressione tra apici

```
>> s = solve('cos(2*x)+sin(x)=1')
s =
[      0]
[     pi]
[ 1/6*pi]
[ 5/6*pi]
```

Sistemi di equazioni

- Possiamo usare solve per calcolare le soluzioni di sistemi di equazioni

```
>> syms x y alpha
>> [x,y] = solve(x^2*y^2, x-y/2-alpha)
```

```
x =
[     0]
[     0]
[ alpha]
[ alpha]
```

```
y =
[ -2*alpha]
[ -2*alpha]
[        0]
[        0]
```

Equazioni differenziali

- Si usa il comando dsolve

```
>> dsolve('Dy=1+y^2')
ans =
tan(t+C1)
```

condizione iniziale

```
>> y = dsolve('Dy=1+y^2','y(0)=1')
y =
tan(t+1/4*pi)
```

```
>> x = dsolve('(Dx)^2+x^2=1','x(0)=0')
x =
[  sin(t)]
[ -sin(t)]
```

Studio di funzioni

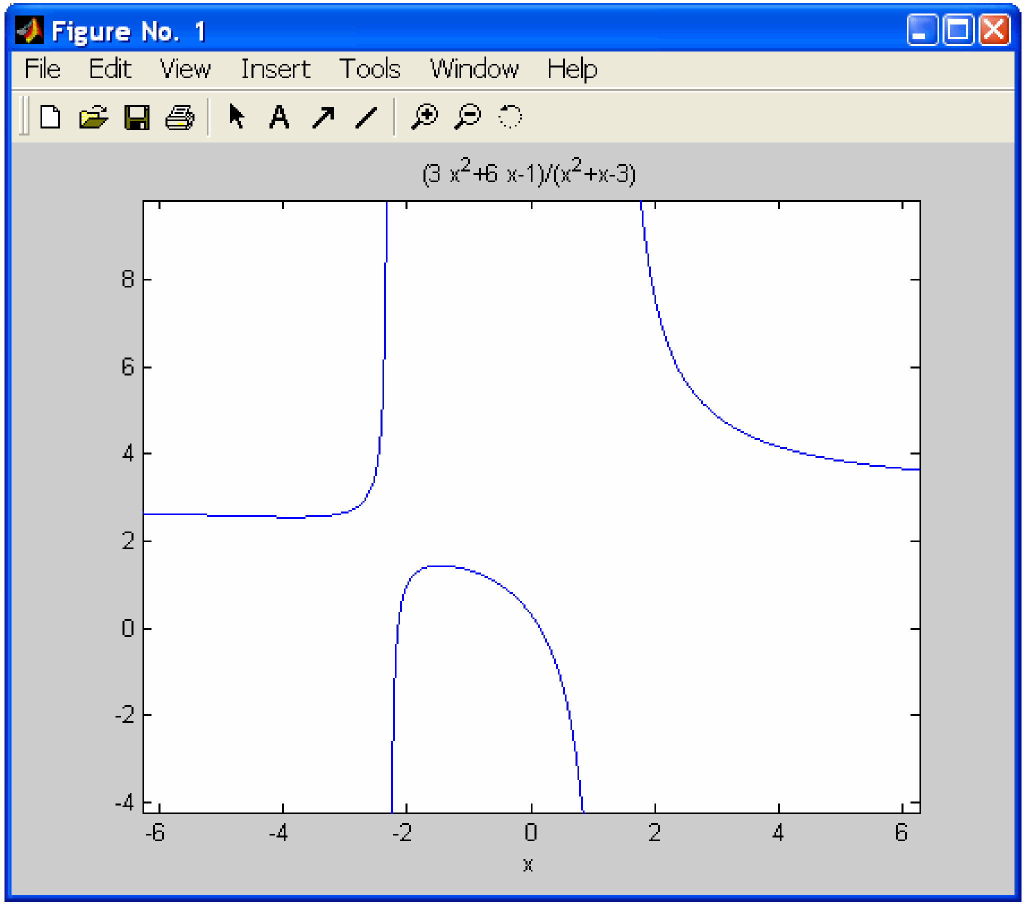
- Possiamo utilizzare i comandi visti in precedenza per effettuare lo studio di funzioni con Matlab
- È necessario
  - Definire la funzione
  - Trovare gli asintoti
  - Trovare i massimi ed i minimi
  - Trovare i punti di flesso
    - Il comando ezplot ci può "aiutare"…

Il comando ezplot

- ezplot(f) disegna l'espressione f=f(x) sul dominio $-2\pi < x < 2\pi$

- ezplot(f, [a,b]) disegna l'espressione f = f(x) sul dominio $a < x < b$

Disegniamo la funzione



Troviamo gli asintoti

Asintoti orizzontali

```
>> limit(f, inf)
ans =
3
```

```
>> limit(f, -inf)
ans =
3
```

Asintoti verticali

```
>> radici = solve(denom)
radici =
[ -1/2+1/2*13^(1/2)]
[ -1/2-1/2*13^(1/2)]
```

$$x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

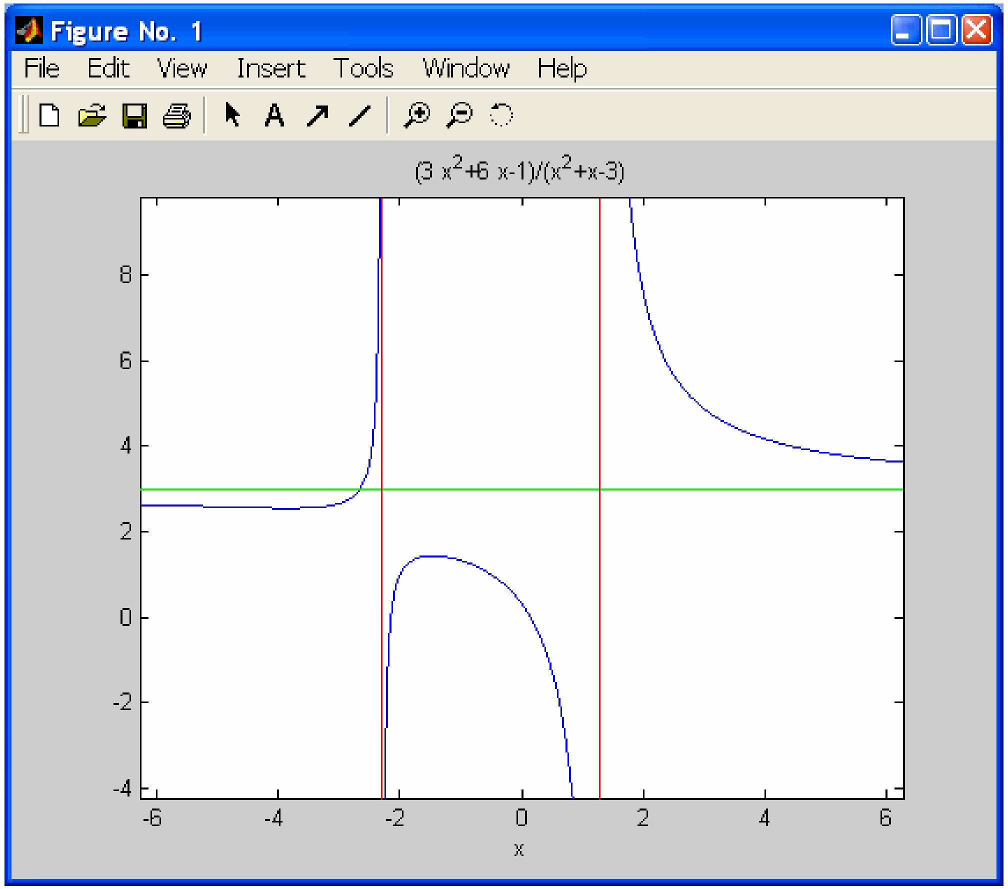
Disegniamo gli asintoti – 1

prima componente del vettore radici

```
ezplot(f)
hold on
% disegniamo l'asintoto orizzontale
plot([-2*pi 2*pi], [3 3],'g')
% disegniamo gli asintoti verticali
plot(double(radici(1))*[1 1], [-5 10],'r')
plot(double(radici(2))*[1 1], [-5 10],'r')
```

converte l'espressione simbolica in numerica

Disegniamo gli asintoti – 2



Troviamo il massimo ed il minimo – 1

```
>> f1 = diff(f)
f1 =
(6*x+6)/(x^2+x-3)-(3*x^2+6*x-1)/(x^2+x-3)^2*(2*x+1)
```

```
>> f1 = simplify(f1)
f1 =
-(3*x^2+16*x+17)/(x^2+x-3)^2
```

```
>> pretty(f1)
           2
        3 x  + 16 x + 17
   - ------------------
           2          2
         (x  + x - 3)
```

Troviamo il massimo ed il minimo – 2

Dal grafico di f il minimo locale è a

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{13}}{3}$$

```
>> punti = solve(f1)
punti =
[ -8/3+1/3*13^(1/2)]
[ -8/3-1/3*13^(1/2)]
```

mentre il massimo locale è a

$$x_2 = \frac{-8+\sqrt{13}}{3}$$

Disegniamo il minimo ed il massimo

```
ezplot(f)
hold on
plot(double(punti), double(subs(f,punti)),'ro')
title('Massimo e minimo di f')
text(-5.5,3.2,'Minimo locale')
text(-2.5,2,'Massimo locale')
```

Troviamo i punti di flesso – 1

```
>> f2 = diff(f1)
f2 =
-(6*x+16)/(x^2+x-3)^2+2*(3*x^2+16*x+17)/(x^2+x-3)^3*(2*x+1)
>> puntiFlesso = solve(f2)
```

```
puntiFlesso =
[                                                    -1/6*(676+156*13^(1/2))^(1/3)-
                                                       26/3/(676+156*13^(1/2))^(1/3)-8/3]
[ 1/12*(676+156*13^(1/2))^(1/3)+13/3/(676+156*13^(1/2))^(1/3)-8/3+1/2*i*3^(1/2)*
                     (-1/6*(676+156*13^(1/2))^(1/3)+26/3/(676+156*13^(1/2))^(1/3))]
[ 1/12*(676+156*13^(1/2))^(1/3)+13/3/(676+156*13^(1/2))^(1/3)-8/3-1/2*i*3^(1/2)*
                     (-1/6*(676+156*13^(1/2))^(1/3)+26/3/(676+156*13^(1/2))^(1/3))]
```

```
>> double(puntiFlesso)
ans =
  -5.2635
  -1.3682 - 0.8511i
  -1.3682 + 0.8511i
```

Solo il primo è un punto di flesso

Troviamo i punti di flesso – 2

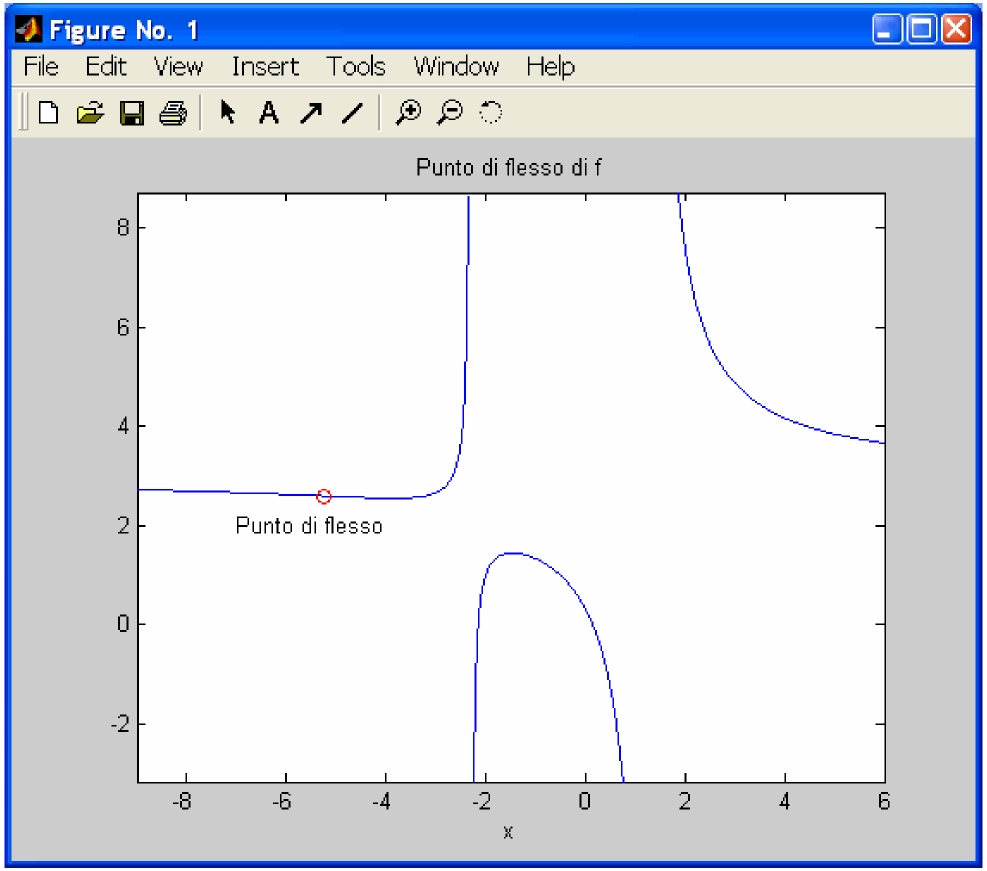
```
>> punto=puntiFlesso(1)
punto =
-1/6*(676+156*13^(1/2))^(1/3)-26/3/(676+156*13^(1/2))^(1/3)-8/3
>> pretty(punto)
```

```
                         1/2 2/3                          1/2 1/3
          (676 + 156 13     )     + 52 + 16 (676 + 156 13    )
- 1/6 ---------------------------------------------------------
                                       1/2 1/3
                           (676 + 156 13    )
```

Disegniamo il punto di flesso – 1

```
ezplot(f,[-9 6])
hold on
plot(double(punto), double(subs(f,punto)),'ro')
title('Punto di flesso di f')
text(-7,2,'Punto di flesso')
```

Disegniamo il punto di flesso – 2



Esercizi – studio di funzioni

$$f_1(x) = \frac{x|x|+1}{e^x}$$

$$f_2(x) = \arctan\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{e^x-3}$$

$$f_4(x) = \ln(1+\sin x)$$

$$f_5(x) = \frac{x}{x-1}e^{-x}$$

$$f_6(x) = xe^{\frac{2}{\sqrt{x-2}}}$$

$$f_7(x) = \left|\frac{x-3}{1-x}\right|\frac{1}{x^2}$$

$$f_8(x) = \arctan\frac{x-2}{x^2+3}$$

$$f_9(x) = \sqrt{\log(x+1)}$$

$$f_{10}(x) = \sqrt{\log(\arcsin x) - \log(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$f_{11}(x) = \sqrt{\log x - \log\sqrt{x}}$$