S.I.C.S.I.

Scuola Interuniversitaria Campana di Specializzazione all’Insegnamento
VIII ciclo - a.a. 2008/2009

Metodo Monte Carlo

Laboratorio di Didattica della Matematica Applicata 1

L. Parisi – A. Stabile

Fisciano
5 Febbraio 2009

Sommario

- Introduzione
- Storia
- Descrizione del metodo Monte Carlo
  - Esempio: misura di aree e stima di π
  - Metodo Monte Carlo hit or miss
  - Metodo Monte Carlo sample-mean
  - Riduzione della varianza: campionamento secondo importanza
- Esempi
  – l'ago di Buffon
  – proposte: Moneta e piastrelle; Estrazioni da urne; Lancio di dadi
- Simulazioni
  - Stima di π a diverse cifre significative
  - Stima di integrali
  - Stima accuratezza
- Conclusioni

Introduzione

Per Metodo Monte Carlo (MMC) si intende l'insieme delle tecniche che fanno uso di simulazioni basate su variabili aleatorie per risolvere problemi matematici. L'impiego del MMC si estende a tutti i casi in cui è possibile trovare una relazione tra il problema in esame ed una certa grandezza casuale. Alcuni campi di applicazione sono:

- Economia
- Fisica (diffusione dei neutroni, etc.)
- Matematica (soluzione eq. differenziali, calcolo di integrali multipli, etc.)

Storia 1

Il primo esempio di impiego dei numeri casuali per la risoluzione di integrali risale ad un libro del 1777 in cui venne delineato un metodo per il calcolo approssimato di π *.

All'inizio del XX° secolo il MMC fu utilizzato per studiare la distribuzione di *Boltzmann*, la *distribuzione t* (Gosset).

Il MMC venne "riscoperto" dai matematici Ulam e Metropolis che per la prima volta lo indicarono con questo nome che richiamava la famosa città per i suoi casinò+. In seguito venne largamente impiegato dai fisici, in particolare da Von Neumann e collaboratori a Los Alamos per il progetto Manhattan. Attraverso il MMC è infatti possibile simulare la diffusione di neutroni nella fusione nucleare.

* *Essai d'aritmetique morale* di Georges-Luis Leclerc, conte di Buffon.

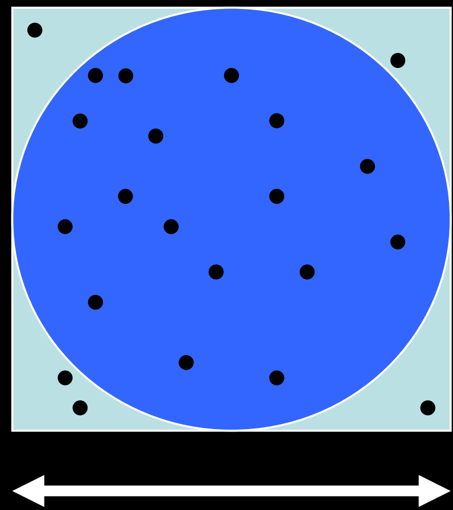
\+ The Monte Carlo method, J. Amer. Statistical Assoc., 44 (1949) 355-341.

Storia 2

"*L'idea del MMC mi è venuta giocando a carte un solitario durante un periodo di convalescenza nel 1946. Avevo sprecato un mucchio di tempo per calcolare, senza successo, e con tecniche combinatorie, la probabilità di riuscita del solitario. Pensai allora che, giocando un centinaio di volte il solitario, avrei potuto stimare questa probabilità con la frequenza delle volte con cui era riuscito, aggirando così con la pratica il pensiero astratto. Questo metodo era ormai possibile dato l'avvento dei calcolatori veloci. Era ovvio pensare anche a soluzioni simili per problemi legati alla diffusione dei neutroni o di fisica matematica e, più in generale, a come scambiare processi descritti da certe equazioni differenziali con un metodo equivalente interpretabile come successione di operazioni aleatorie. In seguito, descrissi l'idea a John von Neumann e cominciammo a realizzare veri e propri calcoli matematici al riguardo.*" (S. Ulam, 1946)

Descrizione intuitiva del MMC

Consideriamo un classico esempio: **la stima di π**. Intuitivamente possiamo pensare di lanciare delle palline (di dimensione trascurabile rispetto alle dimensioni in gioco) e contare quante sono all'interno del cerchio e quante si dispongono nella zona esterna (ma interna al quadrato).



Statisticamente possiamo richiedere qual è la probabilità che

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{D}{2}$$

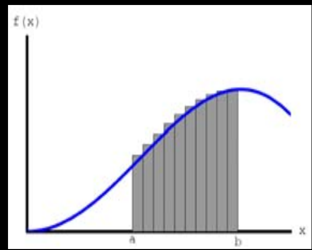
Con *x* e *y* variabili casuali (compatibili con *D*). E' intuitivo pensare al rapporto tra eventi favorevoli e numero totale eventi …

$$\pi = 4\frac{N_F}{N_{Tot}}$$

MMC hit or miss 1

Sia *I* un integrale da valutare: $$I = \int_a^b f(x)dx$$

L'integrale è l'area sottesa dalla curva …



$$I = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i$$

Ma è possibile anche un metodo alternativo. Sia il rettangolo definito come segue

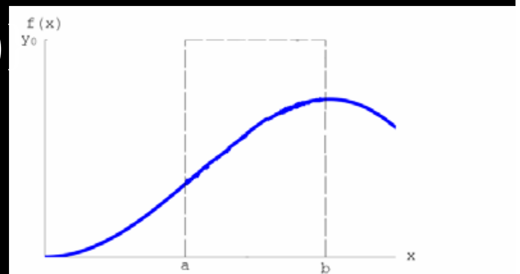
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \quad 0 \le y \le y_0\}$$

Il generico punto (*X*, *Y*) appartenente ad *R* con densità di probabilità

$$f_{XY}(x, \ y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)y_0} & \text{se} \quad (x,y) \in R \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

che possa cadere nell'insieme

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \quad 0 \le y \le f(x)\}$$



ha probabilità

$$p = \frac{\text{area } S}{\text{area } R} = \frac{1}{(b-a)y_0}\int_a^b f(x)dx$$

MMC hit or miss 2

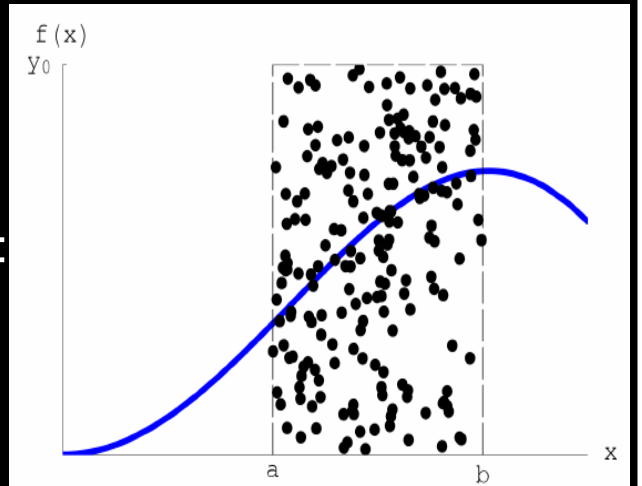
Se consideriamo un set di punti casuali indipendenti appartenenti ad *R* la probabilità *p’* che i punti appartengono all’insieme *S* può essere stimata a partire da

$$\widehat{p} = \frac{N_H}{N}$$

dove N_H è il numero di successi (hits), ossia il numero di vettori che cadono “sotto la funzione” ed *N* il numero totale di punti.

Quindi l’integrale può essere stimato come segue

$$I \approx \theta = y_0(b-a)\frac{N_H}{N}$$



Dal momento che ognuna delle N prove costituisce una prova di Bernoulli con probabilità *p’* di successo, abbiamo:

$$E(\theta) = y_0(b-a)E\left(\frac{N_H}{N}\right) = y_0(b-a)\frac{E(N_H)}{N} =$$

$$= y_0(b-a)\frac{Np}{N} = y_0(b-a)p = I$$

MMC hit or miss 3

La varianza di *p'* è data da: $$\mathrm{var}(\hat{p}) = \mathrm{var}\left(\frac{N_H}{N}\right) = \frac{1}{N^2}\mathrm{var}(N_H) = \frac{1}{N}p(1-p)$$

La varianza di θ è data da: $$\mathrm{var}(\theta) = {y_0}^2 (b-a)^2 \,\mathrm{var}(\hat{p}) = \frac{I\left[y_0(b-a)-I\right]}{N}$$

… e la deviazione standard $$\sigma_\theta = \frac{I^{1/2}\left[y_0(b-a)-I\right]^{1/2}}{N^{1/2}}$$

Utilizzando la disuguaglianza di Chebicev: $$P\left(\left|\theta - I\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{var}(\theta)}{\varepsilon^2}$$

si ottiene $$P\left(\left|\theta - I\right| < \varepsilon\right) \geq \alpha \quad \Rightarrow \quad N \geq \frac{(1-p)\,p{y_0}^2(b-a)^2}{(1-\alpha)\,\varepsilon^2}$$

che per *N* sufficientemente grande grazie al teorema del limite centrale la variabile aleatoria θ è distribuita normalmente. E' possibile introdurre quindi una nuova variabile aleatoria (standardizzata) a media nulla e deviazione standard unitaria.

$$\hat{\theta} = \frac{\theta - I}{\sigma_\theta}$$

MMC sample-mean 1

Il metodo sample-mean consiste nel rappresentare l'integrale *I* come un valore aspettato di una particolare variabile aleatoria. In maniera generale, possiamo riscrivere l'integrale nel seguente modo

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad I = \int_a^b \frac{f(x)}{f_X(x)} f_X(x)\,dx$$

dove $F_X(x)$ è una qualsiasi probabilità, tale che $F_X(x) > 0$ quando $f(x) \neq 0$.

Quindi abbiamo

$$I = E\left(\frac{f(X)}{f_X(X)}\right)$$

ove la variabile aleatoria X è distribuita secondo $F_X(x)$ che assume i seguenti valori

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se} \quad a < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

MMC sample-mean 2

Infine, il valore di aspettazione di *f(X)* è $E\left(f\left(X\right)\right)=\dfrac{I}{b-a} \quad \Rightarrow \quad I=\left(b-a\right)E\left(f\left(X\right)\right)$

da cui una stima per l'integrale è la seguente: $I \approx \theta = (b-a)\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(X_i\right)$

E la varianza è data da: $\operatorname{var}\left(\theta\right)=E\left(\theta^2\right)-E\left(\theta\right)^2=\dfrac{1}{N}\left[\left(b-a\right)\int_a^b f\left(x\right)^2 dx - I^2\right]$

In conclusione la tecnica sample-mean si base sui seguenti passi:

1. Si genera una successione di N numeri casuali $\{U_i\}_{i=1}^{N}$;
2. Si calcola $X_i = a + U_i\,(b - a)$
3. Si calcola $f(X_i)$ con $i = 1, \ldots, N$;
4. Si calcola la media θ che fornisce una stima dell'integrale I.

Tecniche per ridurre la varianza

L'idea di base consiste nel concentrare la distribuzione dei punti campione nelle parti del dominio di integrazione che sono ritenute "più importanti". Possiamo quindi considerare come stima per l'integrale:

$$I \approx \theta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f\left(X_i\right)}{f_X\left(X_i\right)}$$

dove X_i sono distribuiti secondo la densità di probabilità $f_X(x)$ con varianza

$$\mathrm{var}\left(\theta\right) = \frac{1}{N}\left[\int_a^b \frac{f\left(x\right)^2}{f_X\left(x\right)}dx - I^2\right]$$

… quindi bisogna calcolare la distribuzione $F_X(x)$ che minimizza la varianza. La scelta ottimale sarebbe:

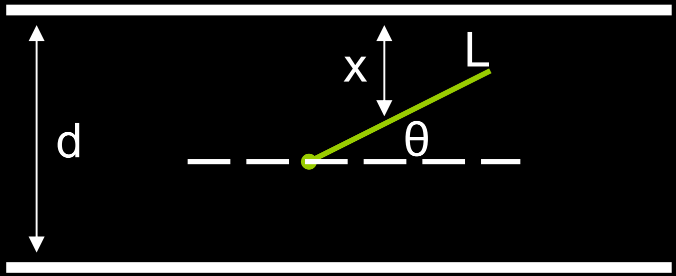
$$F_X\left(x\right) = \frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx}$$

… ma siamo di nuovo in presenza dell'integrale (forse peggio …). E' possibile utilizzare andamenti simili per il campionamento.

L’ago di Buffon 1

Formulazione del problema:

Supponiamo di avere un pavimento, in parquet o mattonelle, che disegni delle rette parallele tra loro e distanti *d*. Facciamo cadere sul pavimento un ago di lunghezza *L*. Qual è la probabilità che l'ago si trovi su una linea fra le due strisce?



Analisi del problema:

Sia x la distanza tra il centro dell’ago e le rette parallele; sia θ l’angolo tra l'ago e le rette. Evidentemente x e θ sono variabili aleatorie distribuite uniformemente. Dobbiamo distinguere due casi: $d \geq L$ e $d < L$.

L’ago di Buffon 2

Caso *d* ≥ *L*

La funzione di densità di probabilità di *x* fra 0 e *d/2* è: $$\frac{2}{x}dx$$

La funzione di densità di probabilità di *θ* fra 0 e *π/2* è: $$\frac{2}{\pi}d\theta$$

La probabilità si fattorizza nel prodotto: $$\frac{4dxd\theta}{\pi d}$$

L'ago attraversa una linea se: $$x \le \frac{L}{2}\sin\theta$$

La probabilità che l'ago attraversi una linea è: $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{L}{2}\sin\theta} \frac{4}{d\pi}dx = \frac{2L}{d\pi}$$

Supponendo di lanciare *N* aghi dei quali *M* intercettino le linee rette, per la probabilità avremo: $$\frac{M}{N} = \frac{2L}{d\pi}$$

da cui si può ricavare per π il valore: $$\pi = \frac{2LN}{dM}$$

L'ago di Buffon 3

Caso *d* < *L*

L'integrale della funzione di densità di probabilità diventa $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{m(\theta)} \frac{4}{d\pi} dx$$

con $m(\theta) = \min\left(\frac{L}{2}\sin\theta,\ \frac{d}{2}\right)$

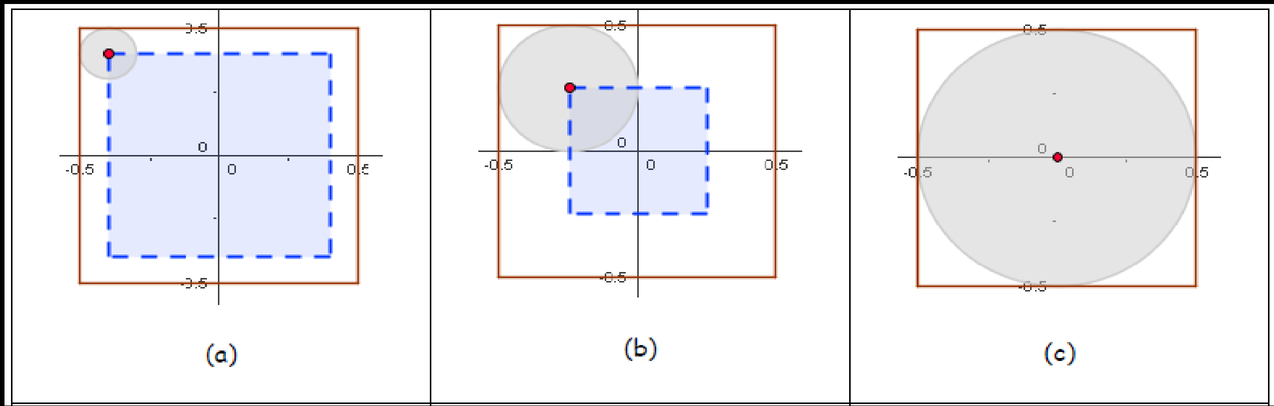
La probabilità che l'ago attraversi una linea è: $$\frac{2L}{d\pi} - \frac{2}{d\pi}\left[\sqrt{L^2 - d^2} + d\arcsin\frac{d}{L}\right] + 1$$

Nel 1864 il Captano O. C. Fox eseguì l'esperimento tre volte con i seguenti risultati:

N	*M*	*L* [pollici]	*d* [pollici]	Stima di π
500	236	3	4	3.1780
530	253	3	4	3.1423
590	939	5	2	3.1416

Altri esempi …

Moneta e piastrelle: utilizzare il MMC per calcolare la probabilità che una moneta che cade su un pavimento piastrellato intercetti il bordo della piastrella. **Suggerimento**: esaminando i casi possibili descritti in figura è facile ricondursi ad una procedura molto simile a quella del problema del calcolo di π con il MMC hit or miss



Estrazioni da urne: Si consideri un'urna contenente b palline bianche, n nere, r rosse. Si determini la probabilità di estrarre dall'urna tre palline di colore diverso (indipendentemente dall'ordine di estrazione) estraendo le palline una alla volta e rimettendole nell'urna prima dell'estrazione successiva.

Lancio di dadi: Si consideri il lancio simultaneo di due dadi non truccati. Si calcoli la probabilità di ottenere un 12 in una sequenza di 24 lanci successivi dei due dadi.

Bibliografia

- V. Comincioli, *Metodi Numerici e Statistici per le Scienze Applicate,* C.E.A. 1992
- A. Rotondi, P. Pedroni e A. Pievatolo, *Probabilità Statistica e Simulazione. Programmi applicativi scritti con Scilab.,* Springer-Verlag Italia, 2005
- Appunti (nostri) del corso

Simulazioni

Passo la pallina della roulette a mister Wolf … ed io mi rilasso!!