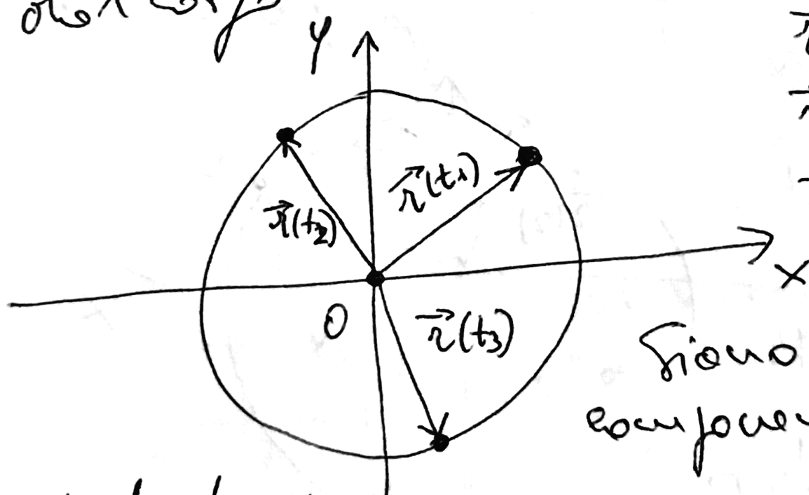
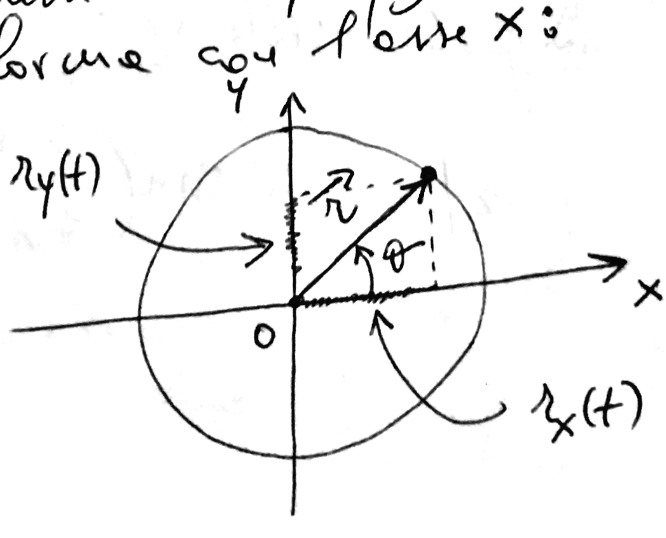
MOTO CIRCOLARE

Si definisce <u>moto circolare</u> il moto di un corpo su una fissata circonferenza. Ovviamente la circonferenza è fissata una volta fissato il suo raggio. Supponiamo che la circonferenza in questione abbia raggio R. Anche in questo caso fissiamo un sistema di riferimento cartesiano centrato nel centro della circonferenza e sia $\vec{r}(t)$ il vettore posizione che individua la posizione occupata dal corpo all'istante di tempo generico t.



$\vec{r}(t_1)$: vettore posizione all'istante t_1
" " " t_2
$\vec{r}(t_2)$: " "
" " t_3
$\vec{r}(t_3)$: " "

Siano $r_x(t)$ e $r_y(t)$ le componenti del vettore posizione all'istante t.
Dobbiamo legare le componenti $r_x(t)$ e $r_y(t)$ al raggio della circonferenza e all'angolo che il vettore posizione forma con l'asse x:



$$\begin{cases} r_x(t) = R\cos\theta(t) \\ r_y(t) = R\sin\theta(t) \end{cases}$$

<u>N.B.</u> $\theta(t)$ è l'angolo che il vettore posizione $\vec{r}(t)$ forma con l'asse x all'istante t.

<u>N.B.</u> Supponiamo che il corpo si muova in senso antiorario sulla circonferenza.

Dal punto di vista vettoriale, quindi, il vettore posizione $\vec{r}(t)$ è rappresentabile come segue:

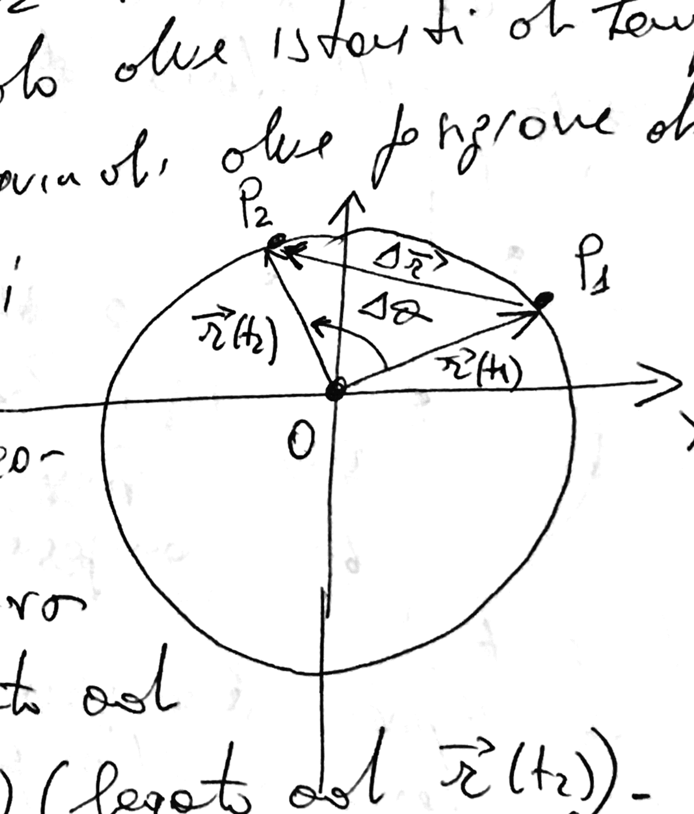
$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(r_x(t), r_y(t)\right) = \left(R\cos\theta(t), R\sin\theta(t)\right)}$$

● VELOCITÀ MEDIA

Generalizzando il concetto di velocità media in una direzione $\left(\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$ abbiamo nel nostro caso

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

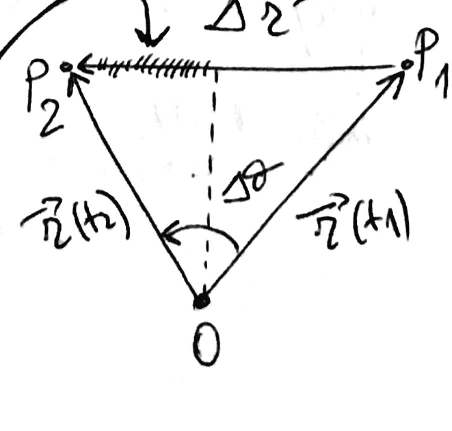
dove stiamo considerando due istanti di tempo t_1 e t_2 distinti e quindi due posizioni distinte



Nel grafico riportiamo i vettori nei due istanti di tempo diversi; l'angolo $\Delta\theta$ rappresenta la variazione angolare tra l'angolo $\theta(t_1)$ (legato al $\vec{r}(t_1)$) e l'angolo $\theta(t_2)$ (legato al $\vec{r}(t_2)$).

Consideriamo il cosiddetto triangolo delle velocità

$$|\vec{r}(t_2)| \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = R\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$



$$|\Delta\vec{r}| = 2R\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

Valutiamo il modulo di $\vec{V_m}$:

$$|\vec{V_m}| = \left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{2R \sin(\Delta\theta/2)}{\Delta t} =$$

$$= R \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \doteq \omega_m \text{ (velocità angolare media)}$$

Quindi in generale abbiamo:

$$\boxed{|\vec{V_m}| = R\,\omega_m \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}} \leftarrow \text{(FORMULA GENERALE)}$$

P.S. Se $\Delta\theta = 2\pi$ (un giro completo) la velocità media è nulla!!! Infatti:

$$|\vec{V_m}| = R\,\omega_m \frac{\sin(2\pi/2)}{(2\pi)/2} = \frac{R\,\omega_m}{\pi} \sin\pi = 0$$

$$\sin\pi \to 0$$

Il vettore $\vec{V_m}$ non ha nessuna direzione particolare poiché dipende da quanto vale l'intervallo di tempo in cui si considera il moto.
In generale il vettore velocità media non è perpendicolare al vettore posizione.

- VELOCITÀ ISTANTANEA

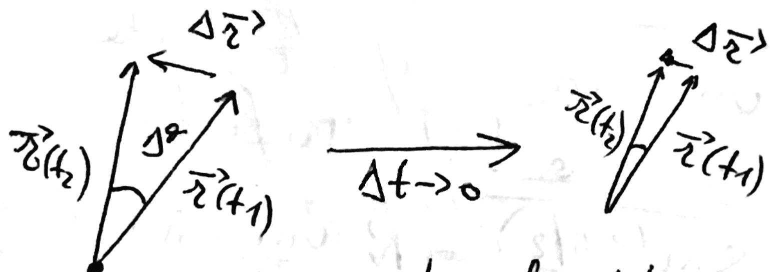
Tale velocità rappresenta l'effettiva velocità posseduta del corpo all'istante t. (Ricordiamo che la velocità media dipende dall'intervallo di tempo che si considera.)
La velocità istantanea è ottenuta come un limite

dell'intervallo di tempo considerato. In formule quindi definiamo la velocità istantanea come

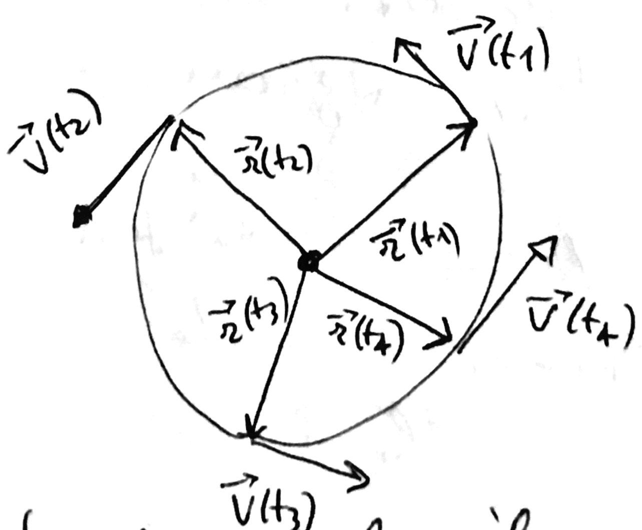
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

tale simbolo si legge "limite per $\Delta t \to 0$"

Notiamo che se $\Delta t \to 0$ allora anche $\Delta\theta \to 0$, il triangolo delle velocità tende a divenire un triangolo (isoscele) sempre più stretto



Quindi nel limite che $\Delta t \to 0$ $\Delta\vec{r}$ diviene perpendicolare a $\vec{r}(t_1)$; ovviamente diviene perpendicolare a $\vec{r}(t)$ anche la velocità istantanea $\vec{v}(t)$ (essendo $\Delta\vec{r}$ e $\vec{v}(t)$ vettori paralleli). Graficamente abbiamo:



In ogni istante di tempo $\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$

Ci resta che calcolare il modulo della velocità istantanea $|\vec{v}(t)|$. Considerando l'espressione della velocità media, non resta che effettuare il limite per $\Delta t \to 0$. Infatti

$$|\vec{V}(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} |\vec{V}_m| = \lim_{\Delta t \to 0} R\,\omega_m \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} =$$

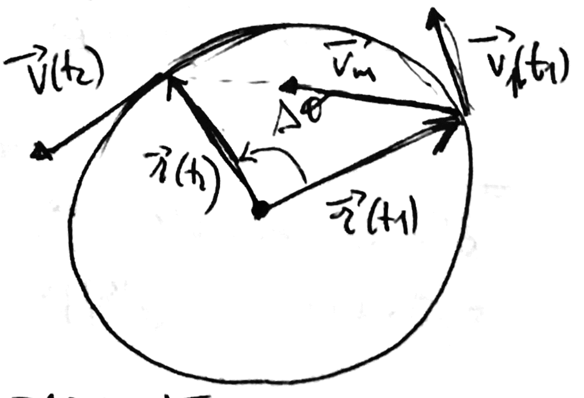
$$= R\left(\lim_{\Delta t \to 0} \omega_m\right) \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = R\omega$$

$\to 1$ (si dimostrerà in matematica)

ed ω è la velocità angolare istantanea $\left(\omega \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)$

> Il vettore velocità istantanea è perpendicolare al raggio vettore (quindi è tangente alla circonferenza) e il suo modulo vale $R\omega$

Consideriamo un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ ed il corrispondente angolo tra i due vettori $\vec{r}(t_1)$ e $\vec{r}(t_2)$. Sia $\Delta\theta$ tale angolo. Graficamente riportiamo le posizioni dei vettori velocità media ed istantanea



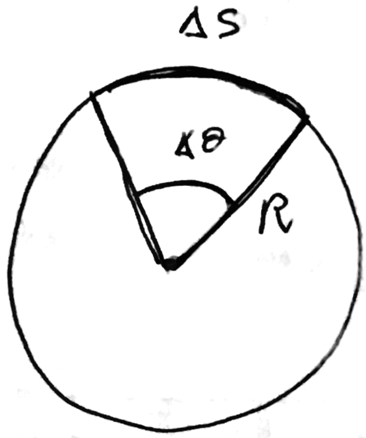
Ancora una volta

$$\boxed{\vec{V}_m \neq \vec{V}(t)}$$

• PERIODO DI ROTAZIONE

Definiamo periodo di rotazione nel moto circolare uniforme l'intervallo di tempo necessario a compiere un giro completo. Sia T il periodo.

Per calcolare il periodo innanzitutto bisogna esprimere gli angoli (ed in particolare l'angolo $\Delta\theta$) in radianti. Con tale scelta esiste una relazione tra l'arco di circonferenza ed il corrispondente angolo al centro:



$$\Delta S = R\,\Delta\theta$$

(infatti considerando un giro completo $\Delta\theta = 2\pi$ ed otteniamo la lunghezza della circonferenza)

$$\Delta\theta \to 2\pi \qquad \Delta S = 2\pi R$$

Costruiamo ora la velocità con cui il corpo si muove lungo l'arco ΔS. In formule:

$$\underbrace{\bar{V}}_{\text{velocità media}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{R\,\Delta\theta}{\Delta t} = R\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\,\omega_m$$

Nel caso in cui $\Delta t \to 0$ (velocità istantanea) otteniamo

$$V = R\,\omega = |\vec{V}(t)|$$

Il modulo della velocità istantanea rappresenta la velocità con cui si muove il corpo lungo l'arco in questione.

Dunque il periodo è dato dalla seguente espressione:

$$T = \frac{\overset{\text{intera lunghezza circonferenza}}{2\pi \cancel{R}}}{\underset{\text{velocità con cui percorre la circonferenza}}{\omega \cancel{R}}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}}_{\text{periodo}} \qquad \underbrace{\boxed{f \doteq \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}}_{\text{frequenza}}$$

Le dimensioni di queste grandezze sono le seguenti:

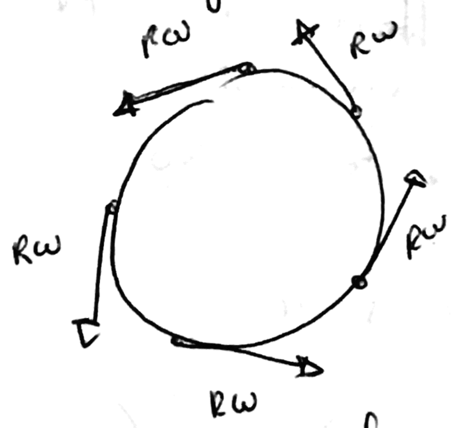
$\omega \rightarrow [rad][T]^{-1}$ $\quad f \rightarrow [T^{-1}]$

Nel sistema M.K.S. abbiamo come unità di misura rad/s per la velocità angolare, s per il periodo e Hz (Hertz) per la frequenza.

● MOTO CIRCOLARE UNIFORME $\Longleftrightarrow$ ω = costante

Quando la velocità angolare ω è costante il moto circolare è detto uniforme.

Notiamo quindi che nel moto circolare uniforme non è costante a come il vettore velocità (istantanea) non è costante ma il suo modulo lo è. In fatti abbiamo dimostrato che la direzione del corpo ma il suo modulo lo è. Infatti abbiamo dimostrato che $|\vec{v}(t)| = R\omega$ e se ω = costante allora è costante anche il modulo (e solo il modulo!!)



Ricordiamo che se $\omega = cost \doteq \omega_0$ la legge oraria per l'angolo $\theta(t)$ è simile alla legge oraria del moto rettilineo uniforme

$$\omega = \omega_0 \Longleftrightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t$$

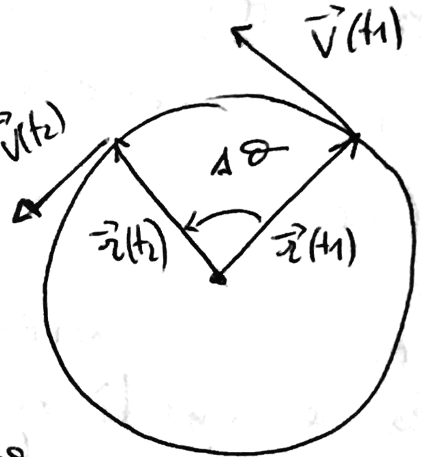
$\theta_0 \longrightarrow$ posizione angolare iniziale.

Il vettore posizione $\vec{r}(t)$ diviene:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} r_x(t) = R\cos(\omega_0 t + \theta_0) \\ r_y(t) = R\sin(\omega_0 t + \theta_0) \end{cases}$$

ACCELERAZIONE CENTRIPETA

Nel moto circolare uniforme il vettore velocità non è costante (anche se il suo modulo lo è), di conseguenza vi è un'accelerazione.

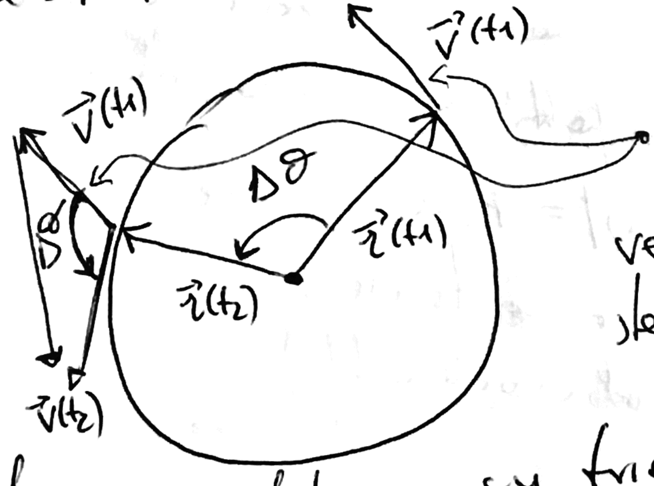


Introduciamo l'accelerazione media $\vec{a}_m$

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t_2)-\vec{V}(t_1)}{t_2-t_1}$$

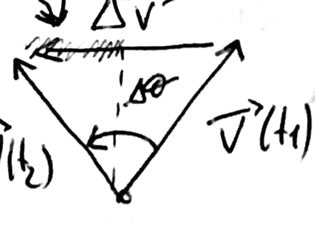
(Notare che la formula è identica come struttura a quella della velocità media).

Dove si trova $\Delta\vec{V}$?



Questi due vettori sono lo stesso vettore. Si tratta di vettori che hanno stessa direzione, stesso verso e stesso modulo.

Anche ora abbiamo un triangolo isoscele



$$|\vec{V}(t_2)|\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \omega R\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

$$|\Delta\vec{V}| = 2R\omega\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

Valutiamo il modulo di $\vec{a}_m$:

$$|\vec{a}_m| = \left|\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}\right| = \frac{|\Delta\vec{V}|}{\Delta t} = \frac{2R\omega\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta t} =$$

$$= R\omega \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

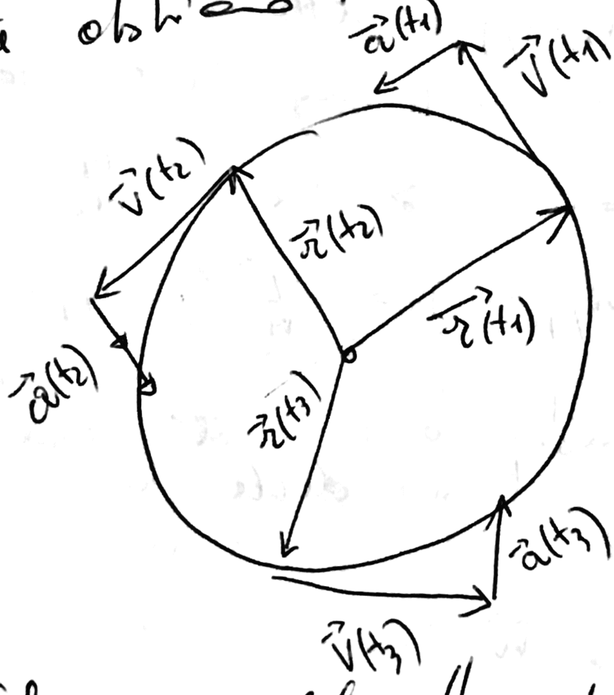
Quindi il modulo dell'accelerazione istantanea si ha nel limite $\Delta t \to 0$:

$$|\vec{a}(t)| = R\omega^2.$$

Nel limite che $\Delta t \to 0$ il vettore accelerazione diventa perpendicolare alla velocità (discorsi analoghi a quanto fatto per la velocità istantanea).

Graficamente abbiamo:

$\boxed{\vec{a} \text{ ed } \vec{r} \text{ sono antiparalleli.}}$



Se $\hat{r}$ è il versore del vettore posizione $\vec{r}(t)$ abbiamo per l'accelerazione:

$$\boxed{\vec{a}(t) = -\omega^2 R\, \hat{r}}$$ (ACCELERAZIONE CENTRIPETA)

- COMPONENTI DEL VETTORE VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

In precedenza abbiamo dedotto le componenti di $\vec{r}(t)$ ed in particolare avevamo:

$r_x(t) = R\cos(\omega_0 t + \theta_0) \qquad r_y(t) = R\sin(\omega_0 t + \theta_0)$

In generale il vettore $\vec{v}(t)$ sarà un vettore con due componenti $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ e analogamente $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))$.

Come ricavare le espressioni di $v_x(t)$, $v_y(t)$, $a_x(t)$ e $a_y(t)$?

Dalla teoria sappiamo che $\vec{r} \perp \vec{v}$ e $\vec{v} \perp \vec{a}$ quindi $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ (Prodotti scalari)

Apriamo una piccola parentesi:

Dato un vettore $\vec{m} = (m_x, m_y)$, il vettore ad esso perpendicolare sia $\vec{n} = (n_x, n_y)$. Calcoliamo le componenti di $\vec{n}$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = m_x n_x + m_y n_y = 0 \longrightarrow n_x = -\frac{m_y}{m_x} n_y$$

$$\vec{n} = (n_x, n_y) = \left(-\frac{m_y}{m_x} n_y, n_y\right) = \frac{n_y}{m_x}(-m_y, m_x)$$

$\longrightarrow$ è una costante

Quindi il vettore perpendicolare a $\vec{m}$ deve avere le componenti invertite ed una delle due cambiata di segno

$\longrightarrow$ è una costante

$$\boxed{\vec{m} = (m_x, m_y) \longrightarrow \vec{n} = K(-m_y, m_x)}$$

Il vettore velocità $\vec{v}(t)$ deve essere quindi

$\vec{v}(t) = K(-R\sin(\omega_0 t + \theta_0), R\cos(\omega_0 t + \theta_0))$

dato che $|\vec{v}(t)| = \omega R$ la costante K deve essere uguale a ω_0. Quindi:

$$\boxed{\vec{v}(t) = (-\omega_0 R\sin(\omega_0 t + \theta_0), \omega_0 R\cos(\omega_0 t + \theta_0))}$$

In maniera analoga si ottiene anche $\vec{a}(t)$.
Ricordiamo che $\vec{a} \perp \vec{v}$ e quindi:

$$\vec{a}(t) = M(-v_y(t), v_x(t)) \quad \text{con } M \text{ costante.}$$

$$\vec{a}(t) = M(-\omega_0 R\cos(\omega_0 t+\theta_0), -\omega_0 R \sin(\omega_0 t+\theta_0))$$

dato che $|\vec{a}(t)| = \omega^2 R$ la costante M deve essere uguale a ω_0. Quindi

$$\boxed{\vec{a}(t) = (-\omega_0^2 R\cos(\omega_0 t+\theta_0), -\omega_0^2 R\sin(\omega_0 t+\theta_0))}$$

che possiamo anche riscrivere come segue

$$\boxed{\vec{a}(t) = -\omega_0^2 \vec{r}(t)}$$ (l'accelerazione centripeta punta verso il centro)

- MOTO PERIODICO (O ARMONICO)

Consideriamo solo la componente x del moto circolare (oppure solo la componente y).

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega_0 t+\theta_0) \\ v(t) = -R\omega_0 \sin(\omega_0 t+\theta_0) \\ a(t) = -R\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\theta_0) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x(t) = R\sin(\omega_0 t+\theta_0) \\ v(t) = R\omega_0 \cos(\omega_0 t+\theta_0) \\ a(t) = -R\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\theta_0) \end{cases}$$

Si definisce **moto armonico** un moto la cui legge oraria $x(t)$ ha la forma sopra indicata:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t+\theta_0)}$$

→ pulsazione (ω_0)
→ fase iniziale (θ_0)
→ ampiezza del moto (A)

Il periodo del moto armonico è $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$

la velocità varia in funzione del tempo

$$\boxed{V(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \theta_0)}$$

$\omega_0 A$ rappresenta la massima velocità (in modulo) posseduta dal corpo.

L'accelerazione infine:

$$\boxed{a(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \theta_0)}$$

$\omega_0^2 A$ rappresenta la massima accelerazione (in modulo) posseduta dal corpo.

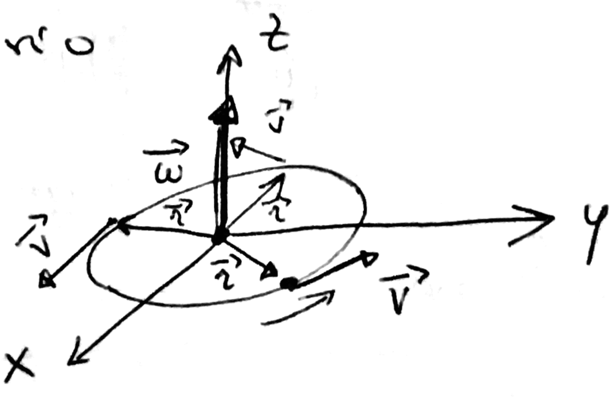
- FORMULA DI POISSON

Tale formula è utile per il calcolo della velocità e dell'accelerazione in un moto circolare uniforme. A tal fine introduciamo il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ così definito:

il modulo di $\vec{\omega}$ è la velocità angolare (velocità angolare istantanea)

la direzione di $\vec{\omega}$ è perpendicolare al piano in cui avviene la rotazione

il verso di $\vec{\omega}$ è tale che vedere la rotazione in senso antiorario



$\vec{V}, \vec{r}$ appartengono al piano XY

Dalla definizione di prodotto vettoriale abbiamo

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}}$$ (FORMULA DI POISSON)

● MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Tale moto è il moto su una circonferenza in cui ω non è costante. Di conseguenza il modulo della velocità istantanea non è costante.

Introduciamo ~~...~~ l'accelerazione angolare media

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t_2)-\omega(t_1)}{t_2-t_1}$$

che per $\Delta t \to 0$ diviene l'accelerazione istantanea

$$\alpha = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Un moto circolare uniformemente accelerato è definito quindi da un'accelerazione angolare costante

$$\alpha = \alpha_0 \iff \omega(t) = \omega_0 + \alpha_0 t \iff \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

l'accelerazione centripeta vale sempre $\omega^2 R$ (il modulo) ma non è più costante (il modulo).

Siccome la velocità (modulo) non è più costante possiamo introdurre l'accelerazione tangenziale media che successivamente nel limite $\Delta t \to 0$ diviene accelerazione tangenziale istantanea:

$$a_{Tm} = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{R\omega(t_2)-R\omega(t_1)}{t_2-t_1} = R\,\frac{\omega(t_2)-\omega(t_1)}{t_2-t_1} =$$

$= R\,\alpha_m$

dove α_m è l'accelerazione angolare media -
Nel limite $\Delta t \to 0$ otteniamo

$\boxed{a_T = R\alpha}$ ed ovviamente $\boxed{a_c = \omega^2 R}$

accelerazione tangenziale accelerazione centripeta

$\vec{a}_T$ e $\vec{a}_c$ sono ortogonali (perpendicolari) quindi l'accelerazione totale $\vec{a}$ è data dalla somma delle due

$$\vec{a}_{TOT} = \vec{a}_T + \vec{a}_c$$

$$|\vec{a}_{TOT}| = \sqrt{|\vec{a}_T|^2 + |\vec{a}_c|^2} = \sqrt{\alpha^2 R^2 + \omega^4 R^2}$$