Università degli Studi del Sannio
C.d.L. Ingegneria Civile
Programma del Corso di Matematica (86103) - a.a. 2012/2013
Arturo Stabile

arturo.stabile@unisannio.it - www.arturostabile.com

PARTE A

Insiemi numerici e concetto di funzione Cenni di insiemistica. Operazioni tra insiemi. Funzione: dominio, codominio, immagine. Restrizione e prolungamento di una funzione. Funzione suriettiva, iniettiva e obiettiva. Funzione inversa. Funzione composta. Prodotto cartesiano. Grafico di una funzione. Classificazione degli insiemi dei numeri naturali, interi e razionali.

Numeri naturali Proprietà di Archimede. Radice n-esima di un numero reale. Principio di induzione e sue applicazioni. Calcolo combinatorio: disposizioni, permutazioni, combinazioni. Coefficiente binomiale. Binomio di Newton.

Numeri reali Struttura algebrica dei numeri reali e proprietà. Valore assoluto. Disuguaglianza triangolare e sua interpretazione geometrica. Irrazionalità della radice di due. Assioma di Dedekind. Intervallo come sottoinsieme dei numeri reali. Intervalli aperti e chiusi. Estremo superiore ed inferiore, massimo e minimo di un sottoinsieme dei numeri reali. Rappresentazione degli intervalli. Introduzione del numero di Nepero e e sua stima.

Funzione reale di una variabile reale Definizione di funzione reale. Funzione opposta e funzione reciproca. Valore assoluto di una funzione reale. Somma e prodotto di funzioni reali. Estremi di una funzione reale. Funzione reale limitata e funzione reale dotata di massino e/o di minimo assoluto e relativo. Funzione reale monotona e strettamente monotona. Funzione pari, dispari e periodica.

Funzioni elementari Funzione potenza n-esima e radice n-esima. Funzione esponenziale. Funzione logaritmo. Funzione potenza. Funzioni circolari. Funzioni iperboliche. Funzioni circolari inverse. Funzioni iperboliche inverse. Dominio di una funzione composta. Calcolo di π.

Numeri complessi Campo dei numeri complessi. Forma algebrica dei numeri complessi. Coniugato, reciproco e modulo di un numero complesso. Disuguaglianza triangolare. Rappresentazione geometrica. Forma trigonometrica e formula di Eulero. Radice n-esima di un numero complesso. Condizione di ortogonalità di due numeri complessi. Interpretazione della trigonometria in chiave complessa. Passaggio dalla trigonometria circolare a quella iperbolica.

Piano cartesiano Trasformazioni nel piano: traslazioni e rotazioni. Costruzione della matrice di rotazione nel piano cartesiano e interpretazione della rotazione nel piano complesso. Applicazione di rotazione e traslazione al caso dell'iperbole (equivalenza come luogo geometrico tra iperbole e funzione omografica passando per il ramo di iperbole equilatera).

Limite di una funzione reale di una variabile reale Punto di accumulazione. Definizione di limite. Limite destro e sinistro. Definizioni di limiti infinti e di limiti all'infinito. Verifica del limite. Teorema unicità del limite. Limite della somma e prodotto. Teorema permanenza del segno. Limite del rapporto. Teorema dei due carabinieri. Calcolo di limiti notevoli. Concetto di infinitesimo ed infinito. Confronto tra infinitesimi di ordine diverso ed infiniti di ordine diverso. Limite di una funzione composta. Limiti all'infinito di somma, prodotto e rapporti di polinomi. Asintoti orizzontali ed obliqui.

Funzione continua Definizione di una funzione continua. Definizione di continuità puntuale ed in un insieme. Teorema della permanenza del segno. Punti di discontinuità. Classificazione discontinuità. Teorema degli zeri. Teorema valori intermedi I e II. Teorema di Weierstrass. Continuità funzione monotona ed inversa.

Derivata di una funzione reale di una variabile reale Rapporto incrementale. Definizione di derivata e sua interpretazione geometrica. Condizione di derivabilità di una funzione. Calcolo della derivata delle funzioni elementari. Derivata del prodotto e della somma di funzioni elementari. Derivata del reciproco di una funzione. Derivata del rapporto di due funzioni. Derivata della funzione composta e della funzione inversa. Massimi relativi, minimi relativi e Teorema di Fermat. Funzioni crescenti e decrescenti. Applicazioni delle derivate alla meccanica. Applicazione del calcolo di massimo e minimo in geometria. Derivata destra e sinistra in un punto. Classificazione delle discontinuità della derivata prima: punti angolosi e cuspidi.

Calcolo differenziale Calcolo del differenziale di una funzione. Teorema di Rolle, Lagrange e Cauchy. Teorema di de L'Hopital. Derivate successive. Definizione di convessità di una funzione. Connessione convessità e derivata seconda. Punti di flesso. Studio del grafico di una funzione. Sviluppo in serie di Taylor. Interpretazione dei limiti notevoli e soluzione di limiti applicando lo sviluppo di Taylor. Approssimazione numerica del numero di Nepero. Dimostrazione della formula di Eulero applicando lo sviluppo di Taylor. Approssimazione del numero di Nepero. Applicazioni dello sviluppo di Taylor per la ricerca di radici di equazioni non algebricamente risolvibili. Derivata di un numero complesso. Interpretazione della derivata come rotazione nel piano complesso. Formula di Poisson per la derivata di un vettore rotante.

Integrale di una funzione reale di una variabile reale Area di una parte di piano. Metodo di esaustione di Archimede per la parabola. Funzione integrabile secondo Riemann: proprietà fondamentali, teorema della media, integrabilità delle funzioni continue (cenni). Primitive e teorema fondamentale del calcolo integrale. Integrale indefinito. Metodi di integrazione: per parti, per sostituzione e per decomposizione in somma delle funzioni razionali. Applicazione del calcolo integrale: area di figure piane, volume di solidi di rotazione e lunghezza di una curva. Stima del resto n-esimo nello sviluppo di Taylor: Resto integrale e resto di Lagrange.

Integrali impropri Integrali definiti su intervalli non limitati. Integrali di funzioni su intervalli contenenti punti di discontinuità. Criterio del confronto per la stima della convergenza di un integrale improprio. Convergenza dell'integrale gaussiano.

PARTE B

Piano R^2 Proprietà generali del piano: insiemi aperti, chiusi, limitati, compatti e connessi. Vettori e concetto di base in R^2. Prodotto scalare e sua interpretazione in termini di proiezione. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Introduzione delle coordinate polari e riscrittura del momento angolare per sistemi centrali.

Funzione reale di due variabili reali Definizione di una funzione reale di due variabili reali e sua rappresentazione in uno spazio cartesiano R^3. Dominio. Punto di accumulazione. Definizione di limite. Condizioni di continuità. Derivata direzionale. Derivata parziale e derivate successive miste. Differenziabilità di una funzione di due variabili. Teorema del differenziale. Teorema di Schwarz per l'inversione dell'ordine di derivazione. Operatori differenziali: gradiente, divergenza, rotore e laplaciano. Interpretazione del gradiente di una funzione in termini del piano tangente. Derivata funzione composta e derivata totale. Differenziale di una funzione a più variabili. Sviluppo in serie di Taylor con il resto di Lagrange e di Peano. Matrice hessiana e suo determinante. Massimi e minimi. Casi particolari: punti per i quali l'hessiano è negativo (punti di sella) oppure è nullo (funzioni del tipo $f(a\,x + b\,y)$ oppure $f(x^2+y^2)$). Massimi e minimi vincolati. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Equazioni differenziali Funzionale equazione differenziale e sua classificazione. Soluzione di un'equazione differenziale. Esempi di equazioni differenziali della fisica e scelta delle costanti iniziali: oscillatore armonico, smorzato, moto viscoso e decadimento radioattivo. Problema di Cauchy e sua risoluzione. Equazioni differenziali del primo ordine. Metodo della separazione delle variabili. Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Equazioni differenziali del secondo ordine. Generalizzazione per un'equazione differenziale di ordine n-esimo lineare. Polinomio caratteristico. Spazio vettoriale generato dalle soluzioni dell'omogenea associata. Wronskiano. Soluzione omogenea, particolare e generale. Metodo della variazione delle costanti per la ricerca di soluzioni particolari. Ricerca delle soluzioni particolari utilizzando la base di polinomi, esponenziali e seni/coseni. Equazioni differenziali di Bernoulli e di Eulero. Equazioni differenziali alle derivate parziali e loro classificazione: equazione delle onde (equazione di tipo iperbolico), della trasmissione del calore (equazione di tipo parabolico) e del potenziale elettrico (equazione di tipo ellittico). Funzione armonica.

Calcolo variazionale Impostazione del problema e concetto di variazione. Azione e lagrangiana. Calcolo dell'equazione di Eulero-Lagrange e della conservazione della costante "energia". Applicazione dell'equazione di Eulero-Lagrange: geodetica sul piano e sulla sfera; superfici di rotazione di area minima; traiettoria di un corpo in caduta da percorrere nel tempo minore (brachistocrona, cicloide); principio di Fermat (giustificazione del fenomeno del miraggio); conservazione del momento angolare e dell'energia meccanica. Risoluzione di un generico calcolo variazionale.

Sviluppo in serie di Fourier Proprietà degli integrali di cos mx cos nx, cos mx sin nx, sin mx sin nx sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Base trigonometrica ortonormale. Estensione periodica di una funzione continua in un intervallo dato. Sviluppo di una funzione periodica come sovrapposizione di seni e coseni. Proprietà delle funzioni pari e dispari. Calcolo dei coefficienti di Fourier per funzioni periodiche semplici: funzione gradino, dente di sega simmetrico ed asimmetrico, onda quadra, ecc. Applicazione dello sviluppo di Fourier: soluzione dell'equazione (omogenea e non) di tipo parabolico (trasmissione del calore lungo una sbarretta di lunghezza finita); soluzione dell'equazione di tipo iperbolico (corda vibrante).

Integrali doppi e tripli Domini normali. Calcolo dell'area di un dominio contenuto in R^2. Integrabilità di una funzione di due variabili. Integrali su domini normali. Teorema di riduzione per gli integrali doppi (Teorema di Fubini). Cambiamento di variabili negli integrali doppi: matrice jacobiana e Jacobiano. Interpretazione geometrica dello jacobiano. Coordinate polari, sferiche e cilindriche. Cenni sugli integrali multipli. Calcolo del baricentro di un dominio. Calcolo dell'integrale improprio della funzione gaussiana sulla retta reale passando in R^2. Calcolo di varie tipologie di integrali gaussiani.

Curve e Superfici Definizione dell'applicazione curva: $K \subset R \rightarrow R^2, R^3$. Classificazione delle curve: chiusa, aperta, regolare. Tangenza alla curva. Versore tangente e normale alla curva. Reinterpretazione di una qualsiasi funzione reale di una variabile reale come una curva. Generalizzazione del concetto di lunghezza di una curva. Baricentro di una curva. Ascissa curvilinea. Integrale di linea di una funzione reale di due o più variabili reali. Definizione dell'applicazione superficie: $K \subset R^2 \rightarrow R^3$. Piano tangente alla superficie ed individuazione di due vettori linearmente indipendenti. Introduzione della matrice jacobiana. Individuazione della direzione normale al piano tangente tramite prodotto vettoriale. Versore normale alla superficie. Area di una superficie. Reinterpretazione di una qualsiasi funzione reale di due variabili reali come una superficie. Area di un grafico di una funzione reale di due variabili reali. Area di una superficie generata per rotazione: teorema di Guldino per le superfici. Integrale di superficie di una funzione reale di due o più variabili reali.

Complementi Integrali doppi e tripli(*) Volume di un solido generato per rotazione: teorema di Guldino per i volumi. Formule di Gauss-Green. Teorema della divergenza. Formula di Stokes.

Forme differenziali(*) Integrale curvilineo di una forma differenziale. Calcolo di forme differenziali su percorsi. Forma differenziale esatta e chiusa. Esempi di forme differenziali in fisica: lavoro di un campo vettoriale conservativo e solenoidale, calore e lavoro in termodinamica.

(*) Argomenti non trattati durante il corso per mancanza di tempo. Si lascia alla volontà dello studente approfondire tali argomenti assolutamente non secondari.

- **Prerequisiti - parte A** Equazioni e disequazioni, Geometria euclidea ed analitica, Coniche e Trigonometria.

- **Prerequisiti - parte B** Aver sostenuto con esito positivo la parte A del corso.

- **Metodo di insegnamento e valutazione** Il corso consiste di (54 + 54) ore (minimo) di lezione frontale (teoriche ed esercitative). Inoltre sono previste altre (30 + 30) ore di esercitazione in aula e/o tutorato. L'esame consiste in una prova scritta e orale per la parte A ed una prova scritta e orale per la parte B. La parte A e B possono essere sostenute anche in appelli diversi ma la singola prova scritta ed orale (sia per la parte A che B) devono essere sostenute nello stesso appello.

- **Prova scritta - parte A** Dominio di una funzione (4 punti), Numero complesso (4 punti), Verifica di un limite (4 punti), Limite di una funzione (4 punti), Applicazione del calcolo differenziale o integrale (4 punti), Grafico di una funzione (6 punti), Integrale (4 punti). Punteggio minimo 18.

- **Prova scritta - parte B** Dominio di una funzione due variabili (4 punti), Massimi e minimi di una funzione di due variabili (4 punti), Problema di Cauchy (5 punti), Calcolo variazionale (4 punti), Sviluppo in serie di Fourier (4 punti), Integrale doppio (5 punti), Curve e superfici (4 punti). Punteggio minimo 18.

- **Modalità d'esame** La parte B deve essere sostenuta entro quattro appelli dall'esito positivo della parte A. Le prove saranno fissate nei mesi di gennaio, febbraio, marzo, maggio, giugno, luglio, luglio bis, settembre, ottobre, dicembre.

- **Appunti e svolgimento tracce** Presso il presidio di ingegneria (SEA) è possibile trovare appunti del docente e lo svolgimento di tutte le prove scritte.

- **Comunicazioni e prenotazioni** Per ogni eventuale variazione di orari e/o di aula per le lezioni e/o per gli esami oppure per comunicazioni di vario genere saranno affissi avvisi in bacheca elettronica. Per sostenere le prove scritte bisogna prenotarsi obbligatoriamente (pena l'esclusione) sul sito student portal.

Riferimenti bibliografici

E. Giusti	Elementi di Analisi Matematica(*)	Bollati Boringhieri
P. Marcellini, C. Sbordone	Elementi di Analisi Matematica uno	Liguori Editore
N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone	Elementi di Analisi Matematica due	Liguori Editore
E. Giusti	Esercizi e complementi di Analisi Matematica vol. 1, vol. 2	Bollati Boringhieri
P. Marcellini, C. Sbordone	Esercitazioni di Matematica vol. 1, vol. 2	Liguori Editore
R. Fiorenza	Esercitazioni di Analisi Matematica vol. 1, vol. 2	Liguori Editori
B. P. Demidovic	Esercizi e problemi di Analisi Matematica	Editori Riuniti
E. Giusti	Analisi Matematica 1	Bollati Boringhieri
E. Giusti	Analisi Matematica 2	Bollati Boringhieri
V.I. Smirnov	Corso di Matematica Superiore vol. 1, vol. 2, vol. 3, vol. 4	Editori Riuniti
M. Bramanti, D. C. Pagani, S. Salsa	Matematica	Zanichelli

(*) Tale testo è utile per coloro che hanno necessità di un recupero dei prerequisiti parte A.

Aggiornato al 14/06/2013