SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR

L'idea dello sviluppo è poter approssimare una funzione $f(x)$ in un intorno di un punto x_0 con un polinomio di grado n.

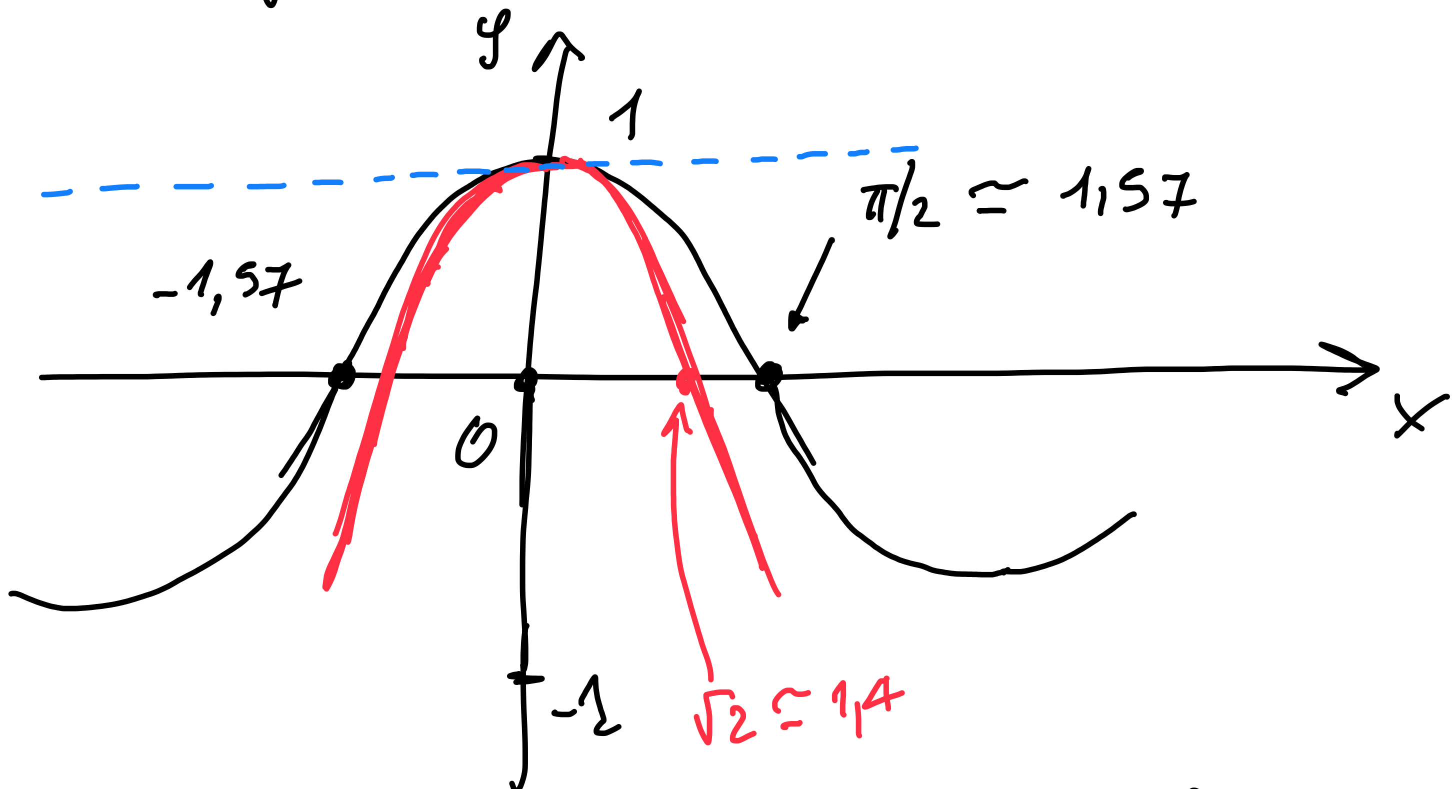
L'ampiezza dell'intervallo di x_0 deve dipendere dal grado di approssimazione. In sostanza più è grande l'intervallo maggiore deve essere il grado del polinomio.

Questa idea può essere facilmente compresa se pensiamo per esempio alle funzioni elementari e i rispetti limiti condotti notevoli che mettono in relazione l'andamento delle funzioni stesse con le potenze di x.

Infatti:

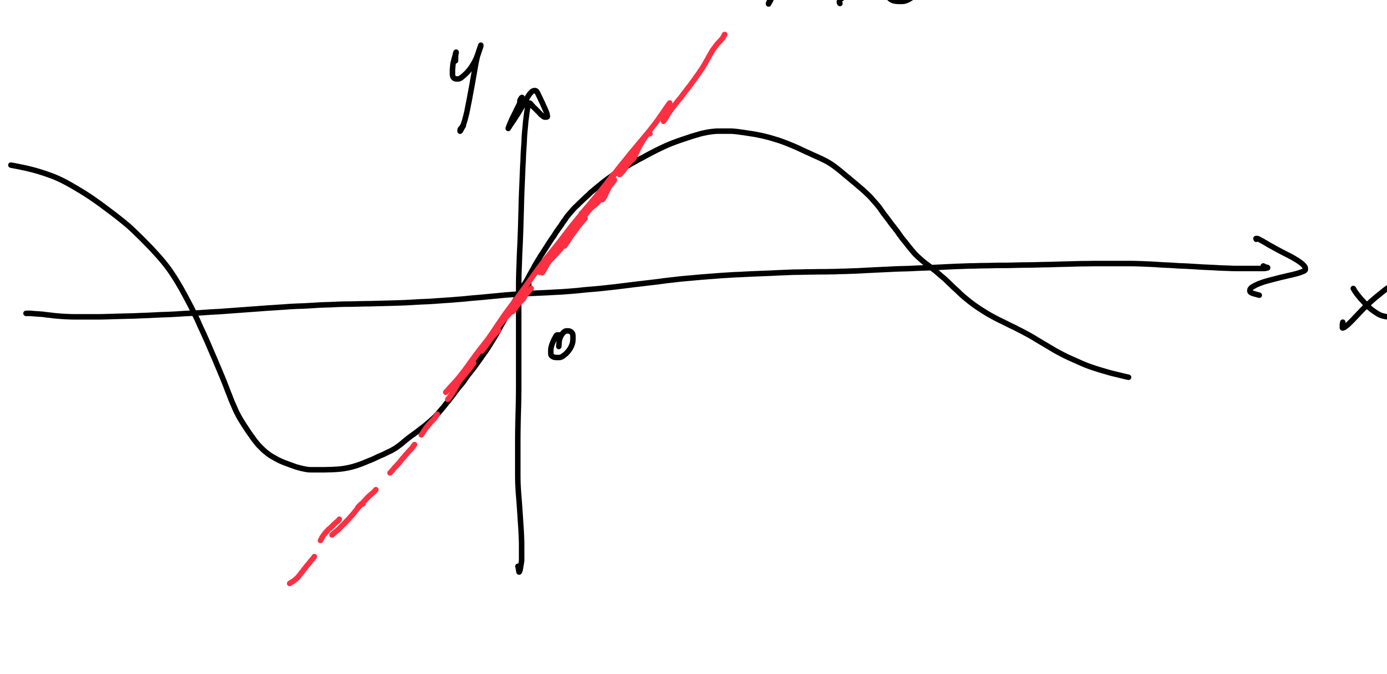
$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x \simeq 1 - \frac{1}{2} x^2$$

quando x è piccolo la parabola $y=1-\frac{1}{2}x^2$ bene si comporta in un intorno di $x=0$:



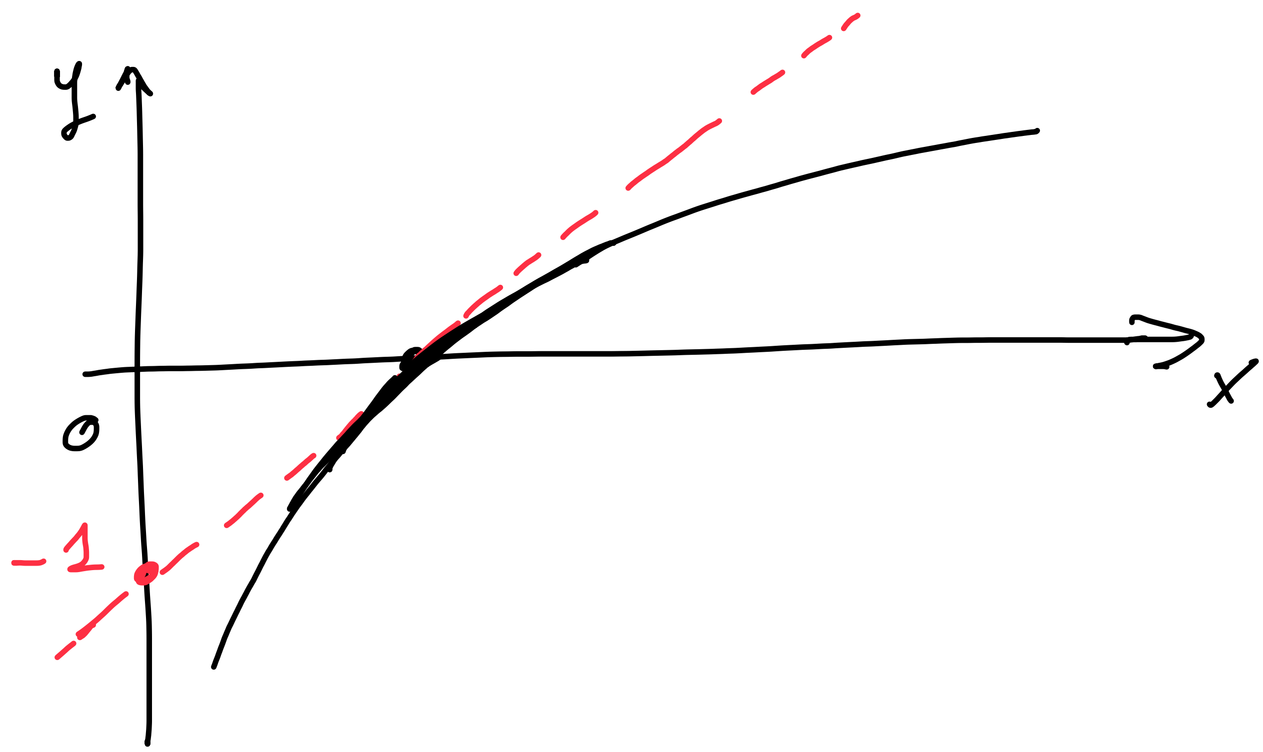
Anche $y=1$ può essere un'approssimazione di $\cos x$ ma questo per $x \simeq 0$, mentre $y=1-\frac{1}{2}x^2$ approssima "meglio" $\cos x$ in un intervallo più ampio.

Stesso discorso per $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \sin x \simeq x$



$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \Rightarrow \ln x \simeq x-1$$

se $x \simeq 1$



Dunque l'idea è di approssimare $f(x)$ in un intorno di x_0 con un polinomio le cui potenze sono $(x-x_0)^0, (x-x_0)^1, (x-x_0)^2, (x-x_0)^3, \ldots$

Quindi sia $P_n(x, x_0)$ il polinomio di grado n-esimo sviluppato nel punto x_0.

$$P_n(x,x_0) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

dove $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ sono coefficienti numerici da determinare.

Costruiamo le derivate di $P_n(x, x_0)$:

$$P_n'(x, x_0) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \dots$$
$$\dots + n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n''(x, x_0) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + 12a_4(x-x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

$$P_n'''(x, x_0) = 6a_3 + 24a_4(x-x_0) + \dots + n(n-1)(n-2) a_n (x-x_0)^{n-3}$$

$$P_n^{(iv)}(x, x_0) = 24a_4 + \dots + n(n-1)(n-2)(n-3) a_n (x-x_0)^{n-4}$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(x, x_0) = n! \, a_n$$

Inoltre notiamo che

$$\lim_{x \to x_0} P_n(x, x_0) = a_0, \quad \lim_{x \to x_0} P_n'(x, x_0) = a_1$$

$$\lim_{x \to x_0} P_n''(x, x_0) = 2a_2, \quad \lim_{x \to x_0} P_n'''(x, x_0) = 6a_3$$

$$\lim_{x \to x_0} P_n^{(IV)}(x, x_0) = 24 a_4, \quad \lim_{x \to x_0} P_n^{(n)}(x, x_0) = n! \, a_n$$

Siano $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(IV)}(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$

le derivate di f e siano valutate in $x = x_0$

Affinché $f(x)$ sia equivalente come $P_n(x, x_0)$,

$f'(x)$ come $P_n'(x, x_0)$, ..., $f^{(n)}(x)$ come $P_n^{(n)}(x, x_0)$

deve accadere che

$$a_0 = f(x_0) \qquad a_3 = \frac{1}{6} f'''(x_0)$$

$$a_1 = f'(x_0) \qquad a_4 = \frac{1}{24} f^{(IV)}(x_0)$$

$$\vdots$$

$$a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0) \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Dunque:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

in termini compatti

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

N.B. $f(x) \neq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

poichè lo sviluppo supposto è un'approssimazione di $f(x)$. Stiamo commettendo un errore nel sostituire $f(x)$ con detto sviluppo. Quindi la differenza tra $f(x)$ e lo sviluppo è detta **resto** dello sviluppo di Taylor

$$R_n(x,x_0) \doteq f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Ci aspettiamo che se $n \to \infty$ allora $R_n(x,x_0) \to 0$ (stiamo migliorando l'approssimazione!).

È fondamentale per il nostro scopo essere sicuri che se $x \to x_0$ (vogliamo un'approssimazione in un intorno di x_0 molto piccolo) allora $R_n(x,x_0) \to 0$ ancor prima che lo sviluppo $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ tende a $f(x_0)$.

Valutiamo $\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x-x_0)^n}$. Se il limite vale zero possiamo affermare che il resto n-esimo è un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$ e quindi tende a zero più velocemente di quanto il polinomio tende a $f(x_0)$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} =$$

$$= \dots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$$

È stato applicato n volte il teorema di De l'Hopital.

Dunque possiamo scrivere:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x,x_0)}$$

dove $\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$

e se $n \to \infty$ allora $R_n(x,x_0) \to 0$ che cioè

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Resta da capire come calcolare esplicitamente $R_n(x,x_0)$. Una sua espressione è il cosiddetto Resto di Lagrange:

$$R_n(x,x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

dove $\xi \in I(x_0,x)$.