Programma del Precorso di Matematica (a.a. 2013-2014)

Proff. Maurizio Boccia, Arturo Stabile e Silvia Ullo

1. Cenni di Teoria degli Insiemi

Definizione di insieme. Rappresentazione di insiemi. Relazioni ed operazioni tra insiemi. Prodotto cartesiano.

2. Cenni di Logica

Implicazione ed equivalenza. Simboli logici. Teoremi e definizioni.

3. Elementi di Calcolo Combinatorio

Elementi di calcolo combinatorio: permutazioni e combinazioni, coefficienti binomiali.

4. Insiemi Numerici

Descrizione degli insiemi N, Z, Q ed R e delle loro proprietà. Rappresentazione decimale di un numero razionale. Numeri decimali periodici. Valore assoluto di un numero reale.

5. Funzioni Elementari

Definizione di funzione. Funzioni reali di variabili reali. La retta reale e il piano cartesiano. Definizione di grafico di una funzione. Potenza n-esima e radice n-esima. Esponenziali e logaritmi.

6. Ceni di Geometria Analitica

Coordinate Cartesiane nel piano. Distanza tra due punti nel piano. Rappresentazione parametrica di una retta. Rette parallele e perpendicolari. Distanza di un punto da una retta. Coniche: circonferenza, ellisse, parabola, iperbole. Equazione della retta tangente.

7. Grandezze Vettoriali e Scalari

Grandezze vettoriali e scalari. Definizioni e proprietà. Operazioni e caratteristiche.

8. Polinomi ed Equazioni Algebriche

Polinomi in una variabile. Zeri dei polinomi. Scomposizione di polinomi. Equazioni algebriche e sistemi di equazioni.

9. Cenni di Geometria Piana

Teorema di Pitagora. Teoremi di Euclide. Teorema di Talete. Angoli. Angolo radiante. Principali figure geometriche. Sezioni coniche.

10. Funzioni Trigonometriche

Funzioni goniometriche: seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante. Relazione fondamentale.

11. Cenni di Trigonometria

Formule di addizione e sottrazione, di duplicazione, di bisezione, parametriche. Funzioni goniometriche inverse: arcoseno, arcocoseno, arcotangente, arcocotangente. Teoremi dei seni, della corda e delle proiezioni, di Carnot.

12. Disequazioni e Sistemi di disequazioni

Disequazioni di primo e secondo grado. Sistemi di disequazioni. Disequazioni prodotto e quoziente, con valore assoluto, esponenziali e logaritmiche, trigonometriche e trigonometriche inverse.

<u>Testi consigliati</u>

Alvino, Carbone, Trombetti, *Esercitazioni di Matematica*, Liguori Ed. Vol.1 Parte 1.
Malafrina, *Matematica per i precorsi*, Mc Graw-Hill.
Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications (sixth edition), McGraw – Hill International Edition.
Dispense del Prof. Ferone, disponibili on-line al sito http://www.federica.unina.it/corsi/basi-di-matematica/

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Definizione (George Cantor):

Per ***insieme*** si intende *ogni riunione* ***M*** in un tutto di oggetti determinati e distinti della nostra *intuizione* e del nostro *pensiero.*

determinato

deve sempre essere possibile stabilire se un oggetto *appartiene o meno all'insieme M*

distinto

se un oggetto appartiene ad all'insieme ***M***, esso è contenuto in ***M*** *senza ripetizioni*

- ✓ Gli **oggetti** da cui è costituito un insieme si dicono i suoi ***elementi***.
- ✓ Sinonimi del termine insieme: *collezione, aggregato, gruppo, classe, famiglia etc.*

La teoria degli insiemi è oggi comunemente accettata come il punto di partenza su cui si fonda l'intero complesso edificio della matematica

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Teoria Ingenua degli Insiemi

La *teoria degli insiemi* basata sulla definizione di *Cantor* è detta ***ingenua*** (***naive***) non perché priva di rigore formale ma in quanto considera quello di insieme un *concetto primitivo*

concetto primitivo: non si sente il bisogno di dare una definizione che si poggi a sua volta su altri *concetti ad esso preliminari* né di dare una definizione *assiomatica*

“*vi sono delle nozioni di per se stesse così chiare, che le si oscura volendole definire alla maniera della scuola, e che non s’acquistano con lo studio, ma nascono con noi*” (Cartesio)

L'assunzione che sia possibile eseguire qualsiasi operazione sugli insiemi visti come concetto primitivo porta a antinomie come il paradosso di Russell.

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Il paradosso del bibliotecario

Al responsabile di una grande biblioteca viene affidato il compito di produrre gli opportuni *cataloghi*.

Egli compie una prima catalogazione per titoli, poi per autori, poi per argomenti, poi per numero di pagine e così via.

Poiché i cataloghi si moltiplicano, il nostro bibliotecario provvede a stendere il **catalogo di tutti i cataloghi**. A questo punto nasce una constatazione.

La maggior parte dei cataloghi non riportano sé stessi, ma ve ne sono alcuni (quali il catalogo di tutti i volumi con meno di 5000 pagine, il catalogo di tutti i cataloghi, ecc.) che riportano sé stessi.

Per eccesso di zelo, lo scrupoloso bibliotecario decide, a questo punto, di costruire il **catalogo di tutti cataloghi che non includono se stessi**.

Il giorno seguente, dopo una notte insonne passata nel dubbio se **tale nuovo catalogo dovesse o non dovesse includere se stesso**, il nostro bibliotecario chiede di essere dispensato dall'incarico.

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Teoria assiomatica degli insiemi

Per superare il *paradosso di Russell* sono state sviluppate diverse *teorie assiomatiche degli insiemi* in cui si considerano *insiemi* soltanto quegli oggetti che verificano ***determinati assiomi***

Ambiti di utilizzo

- ✓ quando i matematici parlano di *teoria degli insiemi* come campo di studio, in genere intendono la *teoria assiomatica degli insiemi*

- ✓ quando parlano di *teoria degli insiemi* come semplice *strumento da applicare in altri campi della matematica*, intendono solitamente la *teoria ingenua degli insiemi.*

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Rappresentazione di un insieme:

Un insieme **A** può considerarsi *"dato"* quando sia assegnato un *criterio* che permetta di *individuare univocamente* tutti e soli *gli elementi dell'insieme*

notazione:

- ✓ $a \in A$ l'oggetto a *è un elemento di* A
- ✓ $a \notin A$ l'oggetto a *non è un elemento di* A

Rappresentazione estesa: si elencano gli elementi dell'insieme

$$\mathrm{A} = \{1,3,5,7\}$$

$$\mathrm{B} = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$$

Rappresentazione sintetica: si individua una proposizione che specifica le proprietà caratterizzanti gli elementi dell'insieme

$$\mathrm{A} = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ è dispari e } x < 10\}$$

$$\mathrm{B} = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ è primo e } x < 20\}$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Esempi di insiemi:

- ✓ Insieme delle vocali dell'alfabeto italiano:

$$V = \{a,e,i,o,u\}$$

- ✓ Insieme dei numeri interi positivi minori di 100:

$$P = \{1, 2, 3, 4, ..., 99\}$$

$$P = \{x \in \mathbf{Z}^{+} \mid x < 100\}$$

- ✓ Insieme dei numeri interi divisibili per 5

$$P = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, ...\}$$

$$P = \{x \in \mathbf{Z} \mid x (\mathrm{mod}\, 5) = 0\}$$

- ✓ Insieme contenente gli elementi a, 2, Massimo, Benevento

$$S = \{a, 2, Massimo, Benevento\}$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Alcuni insiemi numerici noti:

- ✓ Insieme dei **numeri naturali**:

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

- ✓ Insieme dei **numeri interi**:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$$

- ✓ Insieme dei **numeri interi positivi**:

$$\mathbf{Z}^{+} = \{1,2,3,\ldots\}$$

- ✓ Insieme dei **numeri razionali**:

$$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{Z},\ q \neq 0\}$$

- ✓ Insieme dei **numeri reali** $\mathbb{R}$
  - si può dare una definizione assiomatica dei numeri reali cioè elencando un insieme di proprietà (***R*** *è un campo ordinato e completo*)

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Insiemi numerici, esempi:

- ✓ **Numeri Naturali**:

$$2 \in \mathbf{N} \qquad -5 \notin \mathbf{N}$$

- ✓ **Numeri Interi**:

$$2 \in \mathbf{Z} \qquad -5 \in \mathbf{Z} \qquad -\frac{3}{7} \notin \mathbf{Z}$$

- ✓ **Numeri Razionali**:

$$-5 \in \mathbf{Q} \qquad -\frac{3}{7} \in \mathbf{Q} \qquad \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$$

- ✓ **Numeri Razionali**:

$$-5 \in \mathbf{R} \qquad \sqrt{2} \in \mathbf{R} \qquad \sqrt{-1} \notin \mathbf{R}$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Uguaglianza di insiemi:

La definizione di uguaglianza di due insiemi A e B corrisponde alla seguente proposizione:

$$\forall x \big((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A) \big)$$

che è equivalente alla proposizione:

$$\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

In altre parole gli insiemi A e B sono uguali se e soltanto se hanno gli stessi elementi

esempi:

- ✓ gli insiemi A = {1, 3, 5} e B = {3, 5, 1} sono uguali
- ✓ gli insiemi C = { 7, 8, 10} e D = { 7, 8, 8, 8, 10, 10} sono uguali

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Definizione:

Dati due insiemi A e B, si dice che B è un sottoinsieme di A se ogni elemento di B è anche un elemento di A

Si scrive allora $B \subseteq A$, ovvero $A \supseteq B$

(che si legge "***B è contenuto in A***" ovvero "***A contiene B***")

La definizione di sottoinsieme corrisponde alla seguente proposizione:

$$\forall x \left(x \in B \rightarrow x \in A \right)$$

Se si vuole enfatizzare il fatto che B è un sottoinsieme di A ma $B \neq A$

scriviamo $B \subset A$ che si legge "***B è sottoinsime proprio di A***"

La definizione di sottoinsieme proprio corrisponde alla proposizione:

$$\forall x \left(\left(x \in B \rightarrow x \in A \right) \wedge \exists x \left(x \in A \wedge x \notin B \right) \right)$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Insieme vuoto:

L'insieme vuoto denotato con Ø oppure con { }, è l'insieme che rende falsa la preposizione x Є Ø **qualunque sia** x.

esempio:

l'insieme di tutti i numeri interi positivi che sono più grandi del loro quadrato è un insieme vuoto

l'insieme {Ø} non è l'insieme vuoto ma l'insieme il cui unico elemento è l'insieme vuoto

teorema: per ogni insieme S, $\emptyset \subseteq S$

dobbiamo dimostrare che $\forall x\left(x \in \emptyset \to x \in S\right)$ *è vera;*

poichè l'insieme vuoto non contiene nessun elemento, l'affermazione

$x \in \emptyset$ *è sempre falsa; di conseguenza l'affermazione* $x \in \emptyset \to x \in S$

è sempre vera ■

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Cardinalità di un insieme:

Dato un insieme S. Se esistono esattamente *n* elementi in S, allora S è un **insieme finito** e *n* è la **cardinalità** di S. La cardinalità di S si indica con |S|

- ✓ Sia A l'insieme di tutti i *numeri positivi dispari minori di 10*. Allora |A| = 5

- ✓ Sia S l'insieme delle *lettere dell'alfabeto latino*. |S| = 26

- ✓ L'insieme vuoto non contiene nessun elemento quindi |Ø| = 0

Un insieme S è detto **infinito** se non è finito.

- ✓ L'insieme dei numeri naturali è infinito. |**N**| = ∞

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Insieme universo:

Per "*simmetria*" rispetto all'insieme vuoto, vorremmo trovare un insieme X per cui, qualunque sia x, sia sempre vera la preposizione x Є X

Tale insieme non esiste!

A volte è utile **fissare un contesto**, ovvero accordarsi su un insieme ***U*** che contenga tutti gli elementi che stiamo prendendo in considerazione. Fissato questo contesto preposizione:

$$x \in U$$

è sempre **vera qualunque** sia x.

Inoltre, qualunque sia l'insieme A, si ha $A \subseteq U$ perché è sempre vera la preposizione:

$$\forall x \left(x \in A \rightarrow x \in U \right)$$

L'insieme *U* è chiamato **insieme universo**

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Diagrammi di Venn:

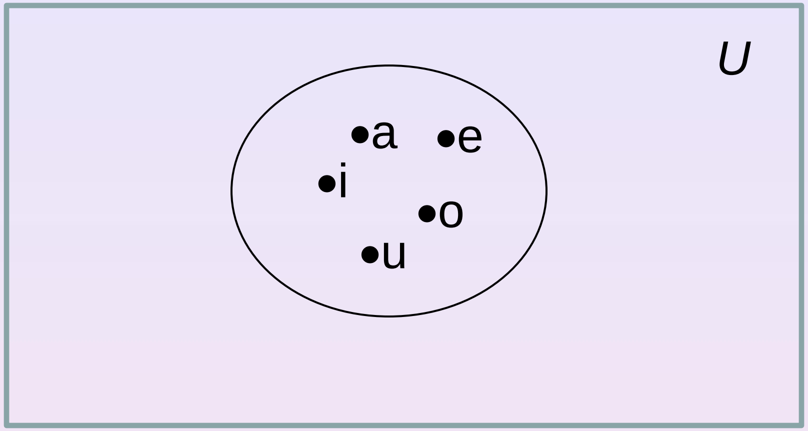
Gli insiemi possono essere rappresentati graficamente mediante i *Diagrammi di Venn*

- ✓ Nei *Diagrammi di Venn* l'insieme universo viene rappresentato da un rettangolo
- ✓ All'interno del rettangolo, cerchi o altre figure geometriche sono usate per rappresentare gli insiemi
- ✓ Talvolta vengono usati dei punti per indicare i singoli elementi dell'insieme
- ✓ I Diagrammi di Venn vendono usati per indicare relazioni tra insiemi

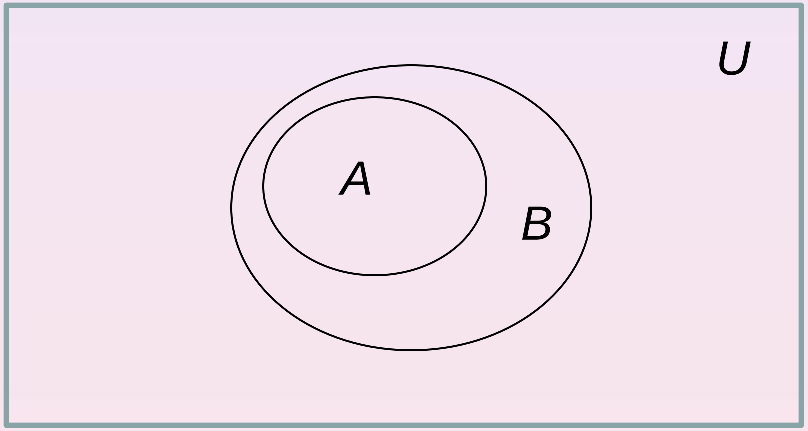
INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Diagrammi di Venn, esempi:

- ✓ Insieme delle vocali V:



- ✓ L'insieme A è sottoinsieme di B



INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Operazioni tra insiemi:

Dati due insiemi A e B possiamo considerare:

- L'**unione** di A e B, cioè l'insieme:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- L'**intersezione** di A e B, cioè l'insieme:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- La **differenza** di A e B, cioè l'insieme:

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

- La **differenza simmetrica** di A e B, cioè l'insieme:

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}$$

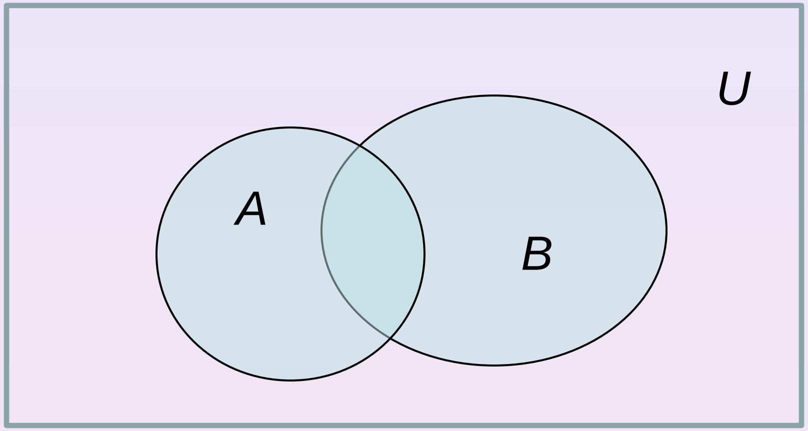
- Il **complemento** di A, cioè l'insieme:

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Operazioni tra insiemi e diagrammi di Venn:

- L'**unione** di A e B è l'insieme costituito *dagli elementi che appartengono ad A oppure (senza esclusività) appartengono a B*



Proprietà dell'unione:

$$A \cup A = A$$ → *proprietà di idempotenza*

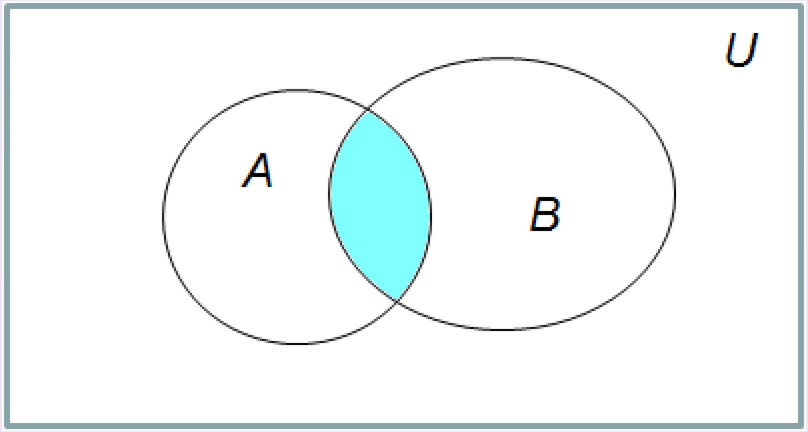
$$A \cup B = B \cup A$$ → *proprietà commutativa*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$ → *proprietà associativa*

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Operazioni tra insiemi e diagrammi di Venn:

- L'**intersezione** di A e B è l'insieme costituito *dagli elementi che appartengono sia ad A che a B*



Proprietà dell'intersezione:

$$A \cap A = A$$ → *proprietà di idempotenza*

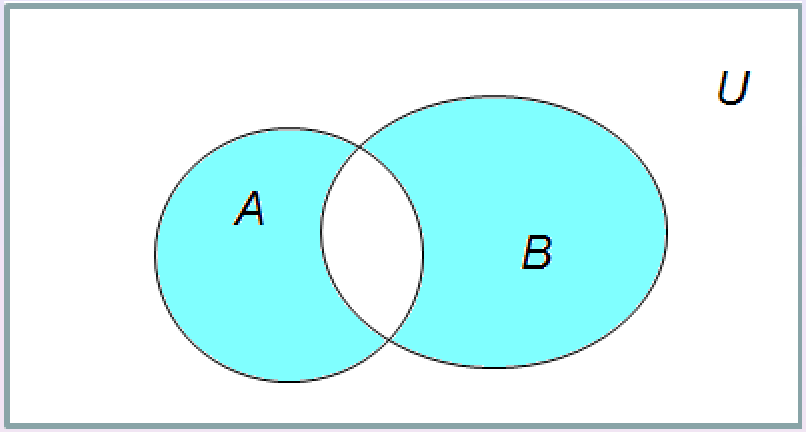
$$A \cap B = B \cap A$$ → *proprietà commutativa*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$ → *proprietà associativa*

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Operazioni tra insiemi e diagrammi di Venn:

- La *differenza simmetrica* di A e B è l'insieme costituito *dagli elementi che appartengono ad A ma non a B oppure appartengono a B ma non ad A*



Proprietà della differenza simmetrica:

$$A \Delta A = \varnothing$$

$$A \Delta \varnothing = A$$

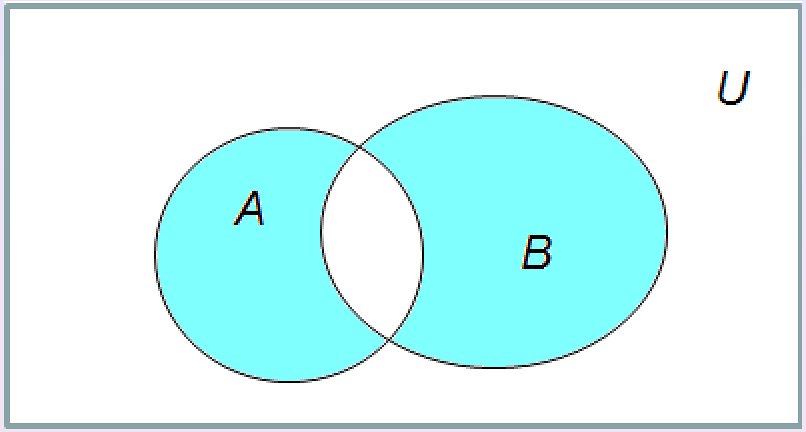
$$A \Delta B = B \Delta A$$ → *proprietà commutativa*

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$ → *proprietà associativa*

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

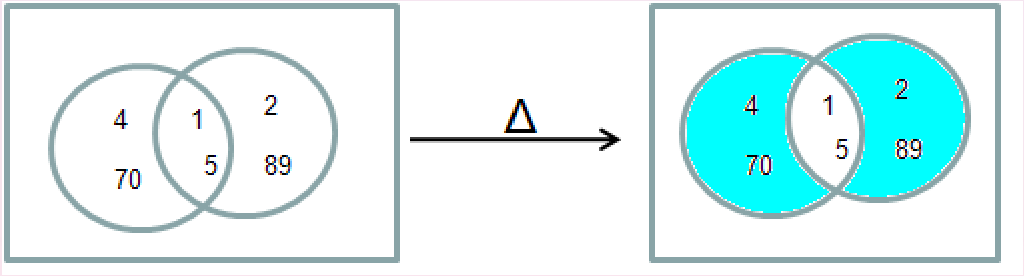
Operazioni tra insiemi e diagrammi di Venn:

- La *differenza simmetrica* di A e B è l'insieme costituito *dagli elementi che appartengono ad A ma non a B oppure appartengono a B ma non ad A*



Esempio:

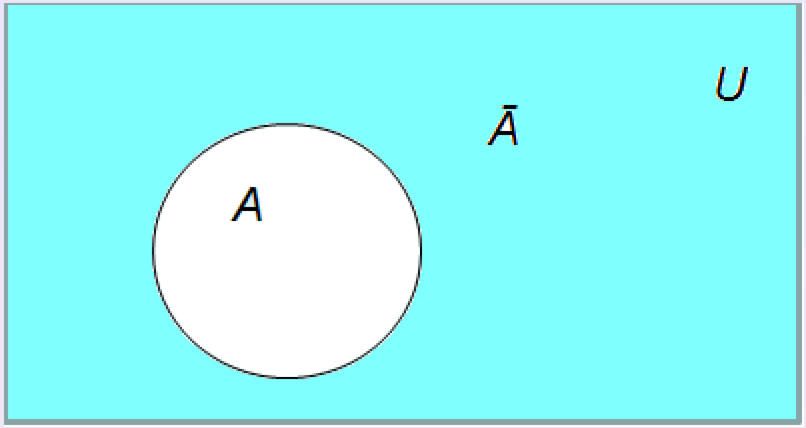
Sia A = {1, 4, 5, 70} e B = {1, 2, 5, 89}, risulta che A Δ B = {4, 70, 2, 89}.



INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Operazioni tra insiemi e diagrammi di Venn:

- Il *complemento* di A è l'insieme costituito *dagli elementi che non appartengono ad A*



Proprietà dell'insieme complemento:

$$A \cup \overline{A} = U$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Operazioni tra insiemi, esercizio:

Dati gli insiemi:

$$X = \{n \in \mathbf{N} \mid n > 4\} \qquad Y = \{n \in \mathbf{N} \mid n \leq 10\}$$

determinare

$$X \cap Y; \qquad X \cup Y; \qquad X \setminus Y \ (X - Y)$$

$$X \cap Y = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \qquad\qquad X \cup Y = \mathbf{N}$$

$$X \setminus Y = \{n \in \mathbf{N} \mid n > 4 \ \ e\ non\ vale \ \ n \leq 10\} =$$

$$= \{n \in \mathbf{N} \mid n > 4 \ \ \wedge \ \ n > 10\} =$$

$$= \{n \in \mathbf{N} \mid n > 10\} = \{11, 12, 13, 14, \ldots\}$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Esercizi *(Discrete Mathematics and its Applications)*

1. List the members of these sets.

a) $\{x \mid x \text{ is a real number such that } x^2 = 1\}$
b) $\{x \mid x \text{ is a positive integer less than } 12\}$
c) $\{x \mid x \text{ is the square of an integer and } x < 100\}$
d) $\{x \mid x \text{ is an integer such that } x^2 = 2\}$

5. For each of the following sets, determine whether 2 is an element of that set.

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ is an integer greater than } 1\}$
b) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ is the square of an integer}\}$
c) $\{2, \{2\}\}$
d) $\{\{2\}, \{\{2\}\}\}$
e) $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$
f) $\{\{\{2\}\}\}$

7. Determine whether each of these statements is true or false.

a) $0 \in \emptyset$
b) $\emptyset \in \{0\}$
c) $\{0\} \subset \emptyset$
d) $\emptyset \subset \{0\}$
e) $\{0\} \in \{0\}$
f) $\{0\} \subset \{0\}$
g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Esercizi *(Discrete Mathematics and its Applications)*

9. Determine whether each of these statements is true or false.

a) $x \in \{x\}$ **b)** $\{x\} \subseteq \{x\}$ **c)** $\{x\} \in \{x\}$
d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$ **e)** $\emptyset \subseteq \{x\}$ **f)** $\emptyset \in \{x\}$

13. Use a Venn diagram to illustrate the relationships $A \subset B$ and $B \subset C$.

14. Use a Venn diagram to illustrate the relationships $A \subset B$ and $A \subset C$.

17. What is the cardinality of each of these sets?

a) $\{a\}$ **b)** $\{\{a\}\}$
c) $\{a, \{a\}\}$ **d)** $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

18. What is the cardinality of each of these sets?

a) $\emptyset$ **b)** $\{\emptyset\}$
c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ **d)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

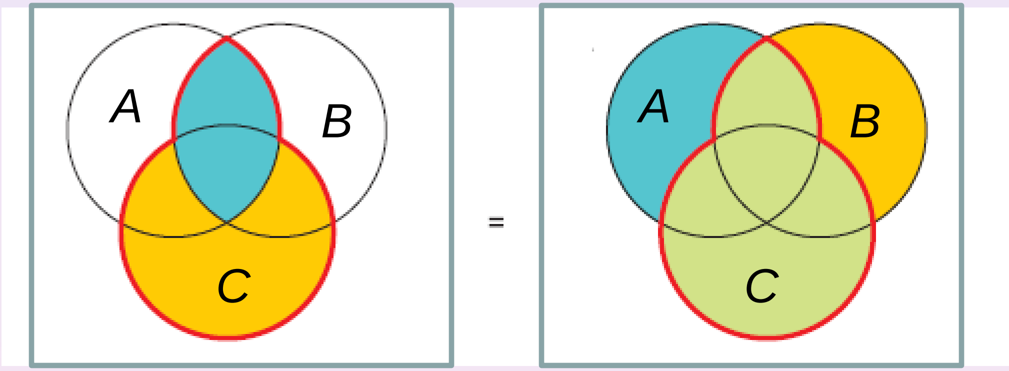
INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

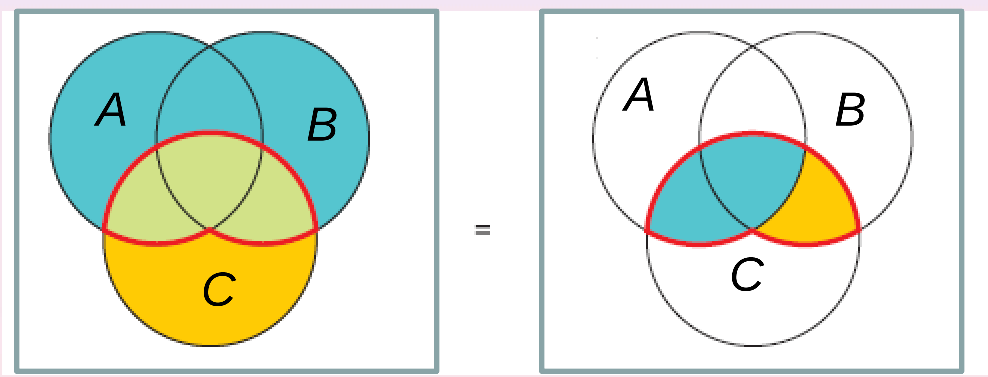
Operazioni tra insiemi e diagrammi di Venn:

- Proprietà distributiva dell'unione e dell'intersezione:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \longrightarrow$$ *Proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \longrightarrow$$ *Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione*





INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Identità:

Identità	**Nome**
$A \cup \emptyset = A \quad A \cap U = A$	Identità
$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup U = U$	Dominanza
$A \cup A = A \quad A \cap A = A$	Idempotenza
$\overline{\overline{A}} = A$	Complementarietà
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Proprietà commutativa
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Proprietà associativa
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Proprietà distributiva
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Leggi di De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Proprietà di assorbimento
$A \cup \overline{A} = U \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$	Proprietà del complemento

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

Dimostrazione:

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$x\in A\cap(B\cup C)\longrightarrow x\in A\wedge x\in B\cup C \xrightarrow{\text{Dalla definizione di unione}}$$

$$\longrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C) \xrightarrow{\text{Dalla definizione di intersezione}}$$

$$\longrightarrow (x\in A\cap B)\vee(x\in A\cap C) \xrightarrow{\text{Dalla definizione di unione}}$$

$$\longrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

Analogamente si dimostra che

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$$

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\longrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow x\in A\wedge\left(x\in B\vee x\in C\right)\longrightarrow x\in A\cap(B\cup C)$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	***C***	***B U C***	***A ∩ (B U C)***	***A ∩ B***	***A ∩ C***	***(A ∩ B) U (A ∩ C)***
1	1	1					
1	1	0					
1	0	1					
1	0	0					
0	1	1					
0	1	0					
0	0	1					
0	0	0					

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	***C***	***B U C***	***A ∩ (B U C)***	***A ∩ B***	***A ∩ C***	***(A ∩ B) U (A ∩ C)***
1	1	1	1				
1	1	0	1				
1	0	1	1				
1	0	0	0				
0	1	1	1				
0	1	0	1				
0	0	1	1				
0	0	0	0				

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	***C***	***B U C***	***A ∩ (B U C)***	***A ∩ B***	***A ∩ C***	***(A ∩ B) U (A ∩ C)***
1	1	1	1	1			
1	1	0	1	1			
1	0	1	1	1			
1	0	0	0	0			
0	1	1	1	0			
0	1	0	1	0			
0	0	1	1	0			
0	0	0	0	0			

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	***C***	***B U C***	***A ∩ (B U C)***	***A ∩ B***	***A ∩ C***	***(A ∩ B) U (A ∩ C)***
1	1	1	1	1			
1	1	0	1	1			
1	0	1	1	1			
1	0	0	0	0			
0	1	1	1	0			
0	1	0	1	0			
0	0	1	1	0			
0	0	0	0	0			

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	***C***	***B U C***	***A ∩ (B U C)***	***A ∩ B***	***A ∩ C***	***(A ∩ B) U (A ∩ C)***
1	1	1	1	1	1		
1	1	0	1	1	1		
1	0	1	1	1	0		
1	0	0	0	0	0		
0	1	1	1	0	0		
0	1	0	1	0	0		
0	0	1	1	0	0		
0	0	0	0	0	0		

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	*B*	*C*	*B U C*	*A ∩ (B U C)*	*A ∩ B*	*A ∩ C*	*(A ∩ B) U (A ∩ C)*
1	1	1	1	1	1	1	
1	1	0	1	1	1	0	
1	0	1	1	1	0	1	
1	0	0	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	0	1	1	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	***C***	***B U C***	***A ∩ (B U C)***	***A ∩ B***	***A ∩ C***	***(A ∩ B) U (A ∩ C)***
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	***C***	***B U C***	***A ∩ (B U C)***	***A ∩ B***	***A ∩ C***	***(A ∩ B) U (A ∩ C)***
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	0	1	**1**	1	0	**1**
1	0	1	1	**1**	0	1	**1**
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Prima legge di De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Prima legge di De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1				
1	0	1				
0	1	1				
0	0	0				

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Prima legge di De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1	0			
1	0	1	0			
0	1	1	0			
0	0	0	1			

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Prima legge di De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	
1	0	1	0	0	1	
0	1	1	0	1	0	
0	0	0	1	1	1	

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Prima legge di De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Prima legge di De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Seconda legge di De Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	1		0	0	
1	0	0		0	1	
0	1	0		1	0	
0	0	0		1	1	

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Seconda legge di De Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Dimostrazione mediante *Membership Table*:

A	***B***	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Unioni e intersezioni generalizzate:

L'unione di una collezione di insiemi è l'insieme costituito dagli elementi che sono membri di almeno un insieme della collezione:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

L'intersezione di una collezione di insiemi è l'insieme costituito dagli elementi che sono membri di tutti gli insiemi della collezione:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

esempi:

✓ Sia $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

✓ Sia $A_i = \{1,2,3,\ldots,i\}$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{1\}$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Esercizi *(Discrete Mathematics and its Applications)*

12. Prove the first absorption law from Table 1 by showing that if A and B are sets, then $A \cup (A \cap B) = A$.

13. Prove the second absorption law from Table 1 by showing that if A and B are sets, then $A \cap (A \cup B) = A$.

14. Find the sets A and B if $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$, and $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

17. Show that if A, B, and C are sets, then $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

25. Let $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, and $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Find

a) $A \cap B \cap C$.
b) $A \cup B \cup C$.
c) $(A \cup B) \cap C$.
d) $(A \cap B) \cup C$.

27. Draw the Venn diagrams for each of these combinations of the sets A, B, and C.

a) $A \cap (B - C)$
b) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
c) $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Esercizi *(Discrete Mathematics and its Applications)*

***45.** Let $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$ for $i = 1, 2, 3, \ldots$. Find

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. **b)** $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

47. Let A_i be the set of all nonempty bit strings (that is, bit strings of length at least one) of length not exceeding i. Find

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. **b)** $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

49. Find $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ and $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ if for every positive integer i,

a) $A_i = \{-i, -i+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, i-1, i\}$.

b) $A_i = \{-i, i\}$.

c) $A_i = [-i, i]$, that is, the set of real numbers x with $-i \le x \le i$.

d) $A_i = [i, \infty]$, that is, the set of real numbers x with $x \ge i$.

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Insieme potenza:

Molto spesso occorre considerare le combinazioni di elementi di un insieme per verificare se soddisfano alcune proprietà. Per poter considerare le combinazioni di elementi di un insieme S, è possibile costruire un nuovo insieme che ha come elementi tali combinazioni

Dato un insieme S, l'insieme potenza dell'insieme S è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S. L'insieme potenza si S si indica con P(S).

- ✓ Qual è l'insieme potenza dell'insieme {0, 1, 2}?

$$P(\{0,1,2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

- ✓ Qual è l'insieme potenza dell'insieme vuoto?

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

- ✓ Qual è l'insieme potenza dell'insieme {Ø}?

$$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Ennupla ordinata:

Una *ennupla ordinata* *(a_1,a_2,…,a_n)* è una collezione ordinata che ha a_1 come primo elemento, a_2 come secondo elemento,…, a_n come n-simo elemento

- ✓ n = 2 → *coppia ordinata*
- ✓ n = 3 → *tripla ordinata*

Due ennuple sono uguali se e solo se sono uguali tutti i loro elementi corrispondenti

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i \quad \forall i = 1..n$$

Prodotto cartesiano:

Dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano di A e B (A x B) è l'insieme di tutte le coppie ordinate (a,b) con a є A e b є B

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Il prodotto cartesiano degli insiemi A_1, A_2,…,A_n è l'insieme di tutte le ennuple ordinate (a_1, a_2,…, a_3) dove a_i є A_i per ogni i.

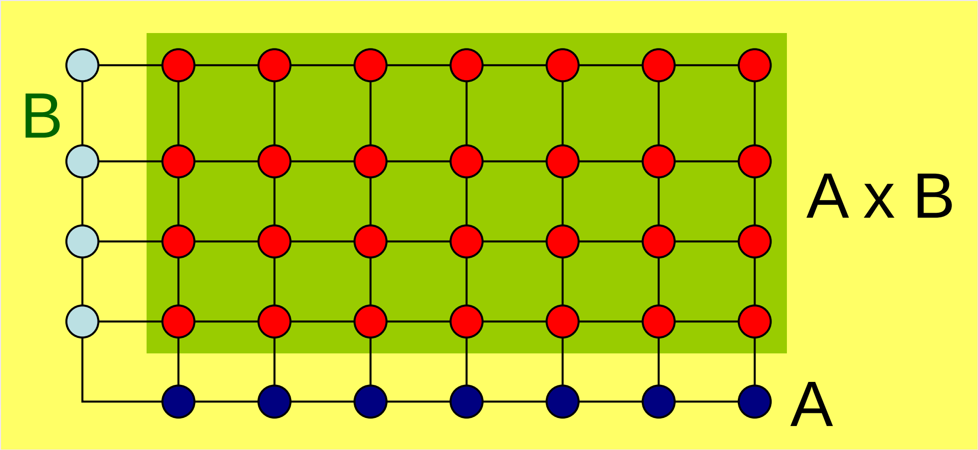
$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i \quad \forall i = 1..n\}$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Prodotto cartesiano:

Siano A e B due insiemi.

Diciamo prodotto cartesiano di A e B, e lo denotiamo con A x B, l'insieme di tutte le coppie (a,b) con a ϵ A e b ϵ B .



Quando è A=B, l'insieme A x A si scrive anche A^2 .

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Prodotto cartesiano, esempio:

Posto $A = \{ 1 , 2 \}$ e $B = \{ 1 , 3 , 4 \}$, risulta:

$$A \times B = \{ (1,1) , (1,3) , (1,4) , (2,1) , (2,3) , (2,4) \} \quad ,$$

$$B \times A = \{ (1,1) , (3,1) , (4,1) , (1,2) , (3,2) , (4,2) \} \quad ,$$

$$A^2 = \{ (1,1) , (1,2) , (2,1) , (2,2) \} \quad ,$$

$$B^2 = \{(1,1) , (1,3) , (1,4) , (3,1) , (3,3) , (3,4) , (4,1) , (4,3) , (4,4)\}.$$

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

Esercizi *(Discrete Mathematics and its Applications)*

21. How many elements does each of these sets have where a and b are distinct elements?

a) $P(\{a, b, \{a, b\}\})$
b) $P(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$
c) $P(P(\emptyset))$

23. Let $A = \{a, b, c, d\}$ and $B = \{y, z\}$. Find

a) $A \times B$ **b)** $B \times A$

26. Suppose that $A \times B = \emptyset$, where A and B are sets. What can you conclude?

28. Let $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, and $C = \{0, 1\}$. Find

a) $A \times B \times C$ **b)** $C \times B \times A$
c) $C \times A \times B$ **d)** $B \times B \times B$

29. How many different elements does $A \times B$ have if A has m elements and B has n elements?

INTRODUZIONE ALLA LOGICA

Implicazione ed equivalenza:

si dice che una *proposizione* ***P*** implica una *proposizione* ***Q*** e si scrive

$$P \Rightarrow Q$$

se ***Q*** è una conseguenza logica di ***P***.

Esempi:

(*n è un numero divisibile per 6*) $\Rightarrow$ (*n è un numero divisibile per 2*)

(R ed S sono poligoni simili) $\Rightarrow$ (*i lati di R ed S sono a due a due proporzionali*)

Non sono vere le implicazioni contrarie:

(*n è un numero divisibile per 2*) $\not\Rightarrow$ (*n è un numero divisibile per 6*)

(*i lati di R ed S sono a due a due proporzionali*) $\not\Rightarrow$ *(R ed S sono poligoni simili)*

INTRODUZIONE ALLA LOGICA

Implicazione ed equivalenza:

Esistono casi in cui le implicazioni $\Rightarrow$ e $\Leftarrow$ sono vere

Se si ha:

$$\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q} \qquad \text{e} \qquad Q \Rightarrow P$$

si dice che ***P*** *è equivalente a* **Q** e si scrive

$$P \Leftrightarrow Q \quad (P \text{ se e solo se } Q)$$

Esempi:

(*n è un numero divisibile per 6*) $\Leftrightarrow$ (*n è un numero divisibile per 2 e per 3*)

(R ed S sono triangoli simili) $\Leftrightarrow$ (*i lati di R ed S sono a due a due proporzionali*)

INTRODUZIONE ALLA LOGICA

Implicazione ed equivalenza, esempi:

- ***P***: *n è un numero primo dispari*
- ***Q***: *n è maggiore di 2*

$$P \Rightarrow Q \qquad P \not\Leftarrow Q$$

- ***P***: *R è un quadrilatero con due coppie di lati uguali*
- ***Q***: *R è un parallelogramma*

$$P \not\Rightarrow Q \qquad P \Leftarrow Q$$

- ***P***: *la retta r è tangente alla circonferenza C nel punto A di C*
- ***Q***: *la retta r è la perpendicolare nel punto A alla rette congiungente il punto A di C e il centro di C*

$$P \Leftrightarrow Q$$

- ***P***: *X è una città europea*
- ***Q***: *X non è una città italiana*

$$P \not\Rightarrow Q \qquad P \not\Leftarrow Q$$

INTRODUZIONE ALLA LOGICA

Definizione:

Una *definizione* introduce una *nozione* che può essere un *oggetto* oppure una *proprietà*. Questa *nozione* viene descritta in maniera chiara e completa e le viene *attribuito un nome*. Da quel momento in poi *quel nome* indicherà sempre soltanto *quella particolare nozione.*

Esempi:

- Si dice *numero razionale* ogni quoziente p/q dove p e q sono *numeri interi* e $q \neq 0$
- Una *equazione* si dice *impossibile* se *non ammette soluzione*

Naturalmente una definizione deve introdurre il nuovo termine utilizzando solo termini già introdotti precedentemente

Così la definizione di numero razionale presuppone che sia stata già definita la nozione di quoziente e di numero intero

Ovviamente questo percorso a ritroso prima o poi deve arrivare a un concetto primitivo che sta alla base del nostro impianto teorico

INTRODUZIONE ALLA LOGICA

Definizione:

- ✓ *Una definizione deve introdurre il nuovo termine utilizzando solo termini già introdotti precedentemente.*

- ✓ *La definizione di numero razionale presuppone che sia stata già definita la nozione di quoziente e prima ancora di numero intero*

- ✓ *Questo percorso a ritroso prima o poi deve arrivare a un concetto primitivo che sta alla base del nostro impianto teorico.*

- ✓ *Un concetto primitivo è una nozione che non viene definita. Il suo ruolo nella teoria è descritto indirettamente, attraverso alcune sue proprietà e relazioni con altri oggetti primitivi, che vengono fissate a priori e prendono il nome di **assiomi** o **postulati**.*

INTRODUZIONE ALLA LOGICA

Teorema:

Un ***teorema*** è un *enunciato dimostrabile* all'interno di una certa *teoria matematica.*

- ✓ *Una teoria matematica ha alla sua base una serie di verità fissate a priori datte assiomi.*
- ✓ *Gli assiomi contengono le proprietà fondamentali di alcuni oggetti che costituiscono i concetti primitivi della teoria.*

Esempio:

Il resto della divisione per 4 del quadrato di un numero intero dispari è sempre uguale a 1

Dim.

Sia a un numero intero dispari. Allora esiste un intero z tale che

$$a = 2z - 1$$

dunque

$$a^2 - 1 = (2z-1)^2 - 1 = (4z^2 - 4z + 1) - 1 = 4(z^2 - z)$$

ma $z^2 - z$ *e quindi*

$$\frac{a^2}{4} = (z^2 - z) + 1$$

INTRODUZIONE ALLA LOGICA

Come si formula una negazione:

Data la proposizione:

“*il cielo è blu*”,

ovviamente la sua *negazione* è

“*il cielo non è blu*”.

Non è altrettanto semplice trovare la *negazione della proposizione*:

”*certi alberi hanno più di una radice*”

la proposizione

“*certi alberi non hanno più di una radice*”

non è la sua negazione perché possono essere contemporaneamente entrambe vere o entrambe false.

La risposta è

“*Nessun albero ha più di una radice*”,

oppure

“*tutti gli alberi hanno al più una radice*”.

INTRODUZIONE ALLA LOGICA

Come si formula una negazione,esempio:

"*Certi elementi dell'insieme X appartengono all'insieme Y*",

In termini matematici:

$$\exists x \in X \mid x \in Y$$

la negazione:

"Non esiste alcun elemento di X che appartiene ad Y"

si scrive come

$$\nexists x \in X \mid x \in Y$$

la stessa negazione si può anche scrivere come:

"Ogni elemento di X non appartiene ad Y"

ovvero

$$\forall x \in X \mid x \notin Y$$

INTRODUZIONE ALLA LOGICA

Come si formula una negazione:

Date due proposizioni *P* e *Q*, consideriamo la proposizione congiunzione *P and Q*.

Negare la congiunzione *P and Q* significa affermare che non sono entrambe vere cioè:

- ✓ sono *entrambe false*
- ✓ *P* è falsa e *Q* è vera
- ✓ *P* è vera e *Q* è falsa

La negazione di *P and Q* è *not P or not Q*

La negazione di *P or Q* è *not P and not Q*

INTRODUZIONE ALLA LOGICA

Come si formula una negazione, esercizio:

Dire quale delle seguenti proposizioni è la negazione di "*tutti gli uomini sono sinceri e fedeli*"

a) Nessun uomo è sincero e fedele

b) Esistono uomini sinceri ma non fedeli

c) Certi uomini non sono sinceri o non sono fedeli

d) Esiste almeno un uomo non sincero e fedele

U – insieme degli uomini
S – insieme degli uomini sinceri
F – insieme degli uomini fedeli

La proposizione

$$\forall x \in U \mid x \in S \wedge x \in F$$

si nega con

$$\exists x \in U \mid x \notin S \vee x \notin F$$

INTRODUZIONE ALLA LOGICA

Come si formula una negazione, esercizio:

Negare la proposizione

"*Qualche elemento dell'insime X non appartiene all'insieme Y*"

La proposizione

$$\exists x \in X \mid x \notin Y$$

si nega con

$$\forall x \in X \mid x \in Y$$

ovvero

$$X \subseteq Y$$