

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA



Da Hamilton a Schrodinger:  
dalla Meccanica Classica alla Meccanica Quantistica

TESI DI LAUREA  
IN  
INGEGNERIA ENERGETICA

DI  
Vittorio Ciardiello  
864/436

13 Dicembre 2017

RELATORE  
prof. Arturo Stabile

Anno Accademico

2016 - 2017







# Indice

<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 Meccanica analitica</b>	<b>1</b>
1.1 Richiami di dinamica classica . . . . .	1
1.2 Vincoli . . . . .	2
1.3 Gradi di libertà e coordinate lagrangiane . . . . .	2
1.4 Principio di D'Alembert ed equazioni di Langrange . . . . .	3
1.5 Principio variazionale di Hamilton . . . . .	5
1.5.1 Applicazione equazione di Eulero-Lagrange . . . . .	7
1.6 Formulazione Hamiltoniana . . . . .	9
1.7 Parentesi di Poisson . . . . .	11
1.8 Equazione di Hamilton-Jacobi . . . . .	12
1.9 Separazione delle variabili . . . . .	13
1.10 Teorema dell'Eikonale . . . . .	14
<b>2 Meccanica quantistica</b>	<b>19</b>
2.1 Interpretazione di Copenaghen . . . . .	19
2.2 Principi della meccanica quantistica . . . . .	20
2.3 Interpretazione della funzione d'onda . . . . .	21
2.4 Trasformata di Fourier . . . . .	23
2.5 Operatori e grandezze fisiche . . . . .	23
2.5.1 Commutatore . . . . .	25
2.5.2 Traslatore e Rotatore . . . . .	26
2.5.3 Potenziale periodico . . . . .	28
2.6 Stati stazionari della funzione d'onda . . . . .	29
2.7 Equazione di continuità . . . . .	30
2.8 Alcune soluzioni esatte dell'equazione di Schrodinger . . . . .	30
2.8.1 Buca di potenziale infinita . . . . .	30
2.8.2 Buca di potenziale rettangolare . . . . .	32
2.8.3 Effetto Tunnel . . . . .	34
2.9 Problemi tridimensionali . . . . .	35
2.10 Atomo di Idrogeno . . . . .	37
2.11 Spin . . . . .	44

<b>3</b>	<b>Elementi di relatività speciale</b>	<b>47</b>
3.1	Intervallo . . . . .	49
3.2	Tempo proprio . . . . .	52
3.3	Trasformazione di Lorentz . . . . .	53
3.4	Cenni sui quadrivettori . . . . .	56
3.5	Quadrivelocità . . . . .	57
3.6	Energia e impulso . . . . .	57
<b>4</b>	<b>La struttura del Sole</b>	<b>61</b>
4.1	Corpo nero . . . . .	61
4.2	Equilibrio di una stella . . . . .	64
4.2.1	Pressione termodinamica e pressione quantistica . . . . .	67
4.3	Fusioni nucleari . . . . .	70
4.4	Cenni sui plasmi e i reattori a fusione . . . . .	72
	<b>Conclusioni</b>	<b>75</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>77</b>

# Abstract

Lo scopo della presenti tesi é uno studio sistematico partendo dai risultati principali della cosiddetta *Meccanica Analitica* fino a giungere alle principali applicazioni che diedero prova della validità della *Meccanica Quantistica*. In particolare enunceremo il *principio variazionale di Hamilton* evidenziando l'estrema generalità di esso e dell'*equazione di Hamilton-Jacobi*, dove quest'ultima é il vero punto di contatto tra la trattazione classica e ciò che fu successivamente l'*equazione di Schrodinger*. Enunceremo i principi fondamentali della Meccanica Quantistica e li applicheremo a problemi di varia natura ed in particolare all'atomo idrogenoide. Tratteremo successivamente lo *Spin* e la teoria da cui discende naturalmente: la *Relatività Ristretta*. Tali strumenti risultano necessari per una trattazione soddisfacente dei fenomeni di fissione nucleare ed in particolare di fusione nucleare. Infine una trattazione dettagliata della pressione quantistica é considerata per un'analisi della struttura del Sole. Si conclude il presente lavoro con un cenno sul concetto di plasma.

Vittorio Ciardiello<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>e - mail address: spyro94@live.it





# Introduzione

La meccanica classica, come ben noto da oltre un secolo, presenta dei limiti. Tali limiti sono ciò che è troppo piccolo e ciò che si muove troppo velocemente. Entro tali limiti la meccanica classica è la teoria corretta che funziona senza problemi, ma a causa di ciò che non osserviamo direttamente con i nostri occhi, nella sua formulazione si sono trascurati tutti quegli effetti che vengono contemplati, rispettivamente, nella teoria quantistica e in quella relativistica, le quali si trovano, a oggi, ad essere unificate nella teoria quanto-relativistica di Dirac.

Una generalizzazione che si pone a metà è la meccanica analitica, la quale assume come principio il principio variazionale di Hamilton-Jacobi. Attraverso questa teoria tutta la fisica classica può essere descritta da una sola equazione, quella appunto di Hamilton-Jacobi, e il tutto si riduce nello scrivere l'Hamiltoniana del sistema in esame (la quale è data dalla somma della sua energia cinetica e del potenziale), qualunque esso sia.

Risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi per un qualsiasi sistema, arbitrariamente complesso, è esattamente definito dalla sua energia totale. Il successivo approccio usato nella meccanica quantistica è il medesimo suggerito proprio dalla meccanica analitica, la funzione hamiltoniana diviene l'operatore hamiltoniano, il quale va applicato alla funzione d'onda.

Siccome le osservazioni sperimentali hanno portato a farci rendere conto di come la meccanica analitica sia solo una approssimazione di una teoria ondulatoria siamo arrivati a scrivere l'equazione di Schrodinger. Gli effetti quantistici in realtà sono presenti in ogni scala della Natura, ma diventano apprezzabili solo quando le dimensioni dei corpi raggiungono ordini di grandezza che per noi sono inosservabili a occhio nudo. Tale teoria consente di superare quel limite che ha la meccanica classica nel descrivere il *troppo piccolo*.

Come principio della meccanica quantistica bisogna assumere, a causa delle osservazioni fatte, il dualismo onda particella. Ossia, una particella può, in certe condizioni, comportarsi come un'onda.

Successivamente andiamo a mostrare come superare l'altro limite della meccanica classica, ossia il *troppo veloce*. Per la descrizione dei processi che avvengono nella natura occorre un sistema di riferimento. Con sistema di riferimento si intende l'insieme di un sistema di coordinate, che serve a determinare la posizione delle particelle nello spazio, e di un orologio per indicare il tempo legato al sistema stesso. Esistono sistemi di riferimento nei quali il moto libero dei corpi, cioè il moto dei corpi non sottoposti all'azione di forze esterne, avviene a velocità costante. Tali sistemi di riferimento sono detti inerziali. Se due sistemi di riferimento si trovano l'uno rispetto all'altro in moto traslatorio uniforme e se uno di essi è inerziale, è evidente che è inerziale anche il secondo (ogni moto libero anche in questo sistema sarà rettilineo uniforme). Esiste quindi un numero arbitrario di sistemi di riferimento inerziali, che si trovano l'uno rispetto all'altro in moto traslatorio uniforme. L'esperienza dimostra la validità del cosiddetto *principio di relatività*.

Secondo questo principio tutte le leggi della Natura sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali. In altri termini, le equazioni che esprimono le leggi della natura sono invarianti rispetto alle trasformazioni delle coordinate e del tempo, corrispondenti ad un cambiamento di riferimento inerziale. Ciò significa che l'equazione descrivente una legge della Natura, espressa mediante le coordinate e il tempo, ha la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. L'interazione di particelle materiali viene descritta in meccanica classica mediante l'energia potenziale d'interazione, la quale è una funzione delle coordinate delle particelle interagenti. È facile vedere

che questo metodo di descrizione presuppone valida l'ipotesi che le interazioni si propaghino istantaneamente. Infatti, secondo questa descrizione, le forze che le altre particelle esercitano su una particella data dipendono, in ogni istante di tempo, soltanto dalla posizione delle particelle in questo stesso istante. Il cambiamento della posizione di qualsiasi particella interagente si riflette istantaneamente sulle altre particelle. L'esperienza mostra, tuttavia, che non esistono nella natura interazioni istantanee. Per questa ragione, la meccanica, che parte dall'ipotesi della propagazione istantanea delle interazioni, contiene una certa imprecisione. In realtà, se uno dei corpi interagenti subisce qualche cambiamento, la ripercussione su un altro corpo del sistema si produrrà dopo un certo intervallo di tempo. Soltanto alla fine di questo intervallo di tempo il secondo corpo subirà processi dovuti a questo cambiamento. Dividendo la distanza tra i due corpi interagenti per questo intervallo di tempo, troviamo la << *velocità di propagazione delle interazioni* >>.

Gli aspetti teorici fin qui sviluppati possono trovare applicazione nello studio della struttura della nostra stella: il Sole. Secondo le leggi classiche il Sole non dovrebbe esistere (almeno nella modalità con cui ci appare), tuttavia esiste. Soltanto considerando l'interazione quantistica tra le particelle costituenti il Sole è possibile giustificare le sue principali caratteristiche. Il principio di Heisenberg trova la sua naturale collocazione e può essere elevato a legge della fisica. Ricaviamo le varie equazioni che regolano l'equilibrio all'interno di una stella. Inoltre per affrontare questo studio è necessario riportare lo studio del cosiddetto *corpo nero*. Si definisce corpo nero un qualsiasi corpo che termodinamicamente raggiunge un equilibrio tra la materia e la radiazione elettromagnetica. Il Sole è in buona approssimazione un corpo nero. Concludiamo il presente capitolo riportando il meccanismo responsabile dell'innesco della fusione dell'idrogeno in elio all'interno del Sole. Meccanismo perfettamente inteso se si considera l'unione dei fenomeni quantistici e quelli relativistici.

# Capitolo 1

## Meccanica analitica

La meccanica analitica é la riformulazione matematica piú generale della meccanica classica. Si tratta di un formalismo in cui le equazioni del moto sono ricavate a partire dal principio variazionale di Hamilton. In questo capitolo partiremo dalla meccanica lagrangiana per giungere alla meccanica hamiltoniana utilizzando un noto teorema della fisica matematica: la trasformata di Legendre (o di Donkin). Il punto fondamentale del capitolo sará rappresentato nella parte finale dal *teorema dell'Eikonale*, nel quale mostreremo come é possibile utilizzare un'equazione d'onda per la descrizione del moto di una particella. Questa analogia tra particelle ed onde rappresenta il punto di partenza per la scrittura dell'equazione di Schrodinger.

### 1.1 Richiami di dinamica classica

Sia data una particella libera, non vincolata. Allora  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  sono tra loro indipendenti. Sia  $\mathbf{F}$  la forza risultante agente su tale particella di massa  $m$ . Riteniamo di poter scrivere  $F = F(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , dal secondo principio si ha:

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y}(t) = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z}(t) = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Assegnate le condizioni iniziali  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0, \vec{v}(0) = \vec{v}_0$ , si dimostra che se in un intorno di  $(\vec{r}_0, \vec{v}_0, 0)$  le  $F_x, F_y, F_z$  sono di classe  $C^\infty$  (dette anche funzioni lisce), allora le equazioni del moto ammettono per  $t > 0$ , almeno in un intorno del punto iniziale, un'unica soluzione. Viene cosí soddisfatto, almeno localmente, il principio deterministico Newtoniano. Se una forza  $\vec{F}$  é conservativa, cioé:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \quad (1.2)$$

dove  $U(\vec{r})$  é l'energia potenziale definita dall'integrale di linea del campo di forze  $\vec{F}$ . Sempre nell'ipotesi che  $\vec{F}$  sia conservativa vale la conservazione dell'energia meccanica:

$$T + U = \text{costante} \quad (1.3)$$

Nel caso  $\vec{F}$  non sia conservativa vale sempre il teorema dell'energia cinetica:

$$L = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = T \Big|_a^b \quad (1.4)$$

## 1.2 Vincoli

La presenza di vincoli comporta l'introduzione di forze che agiscono sulle particelle limitandone la mobilità (dette forze vincolari o reazioni vincolari). Si dicono attive quelle forze che non sono dovute ai vincoli. La particella é libera se non é soggetta ad alcuna condizione che ne limiti la traiettoria, in caso contrario é detta vincolata. Diamo una classificazione delle varie tipologie di vincolo:

- In base alla forma delle relazioni che legano le coordinate alle particelle.

i) Vincoli olonomi: Possono essere espressi da relazioni del tipo

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \quad (1.5)$$

ad esempio, per un corpo rigido il vincolo che la distanza tra due punti fissi, individuati dai vettori posizione  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_j$ , é costante si esprime come

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 - c_{ij}^2 = 0 \quad (1.6)$$

e questa scrittura rispetta la classificazione di vincolo olonomo.

ii) Vincoli anolonomi: non possono essere espressi da relazioni del tipo (1.5). Tali vincoli possono essere espressi da vincoli di disequaglianza o equivalentemente da vincoli di uguaglianza in cui compaiono anche le velocità. Per esempio consideriamo una particella vincolata all'interno di una sfera di centro O e raggio a. In tal caso il vincolo si esprime come  $|\vec{r}|^2 - a^2 < 0$ .

- In base alla dipendenza dal tempo. i) Vincoli scleronomi: non dipendono al tempo; ii) Vincoli reonomi: dipendono dal tempo.
- In base al tipo di reazione vincolare:
  - i) Vincoli lisci: La reazione vincolare é sempre normale al vincolo. Per esempio, se il vincolo olonomo é una superficie di equazione  $f(\vec{r}, t)$ , la reazione vincolare  $\vec{R}$  sará sempre parallela al gradiente di f:  $\vec{R} = \mu(t)\vec{\nabla}f$
  - ii) Vincoli scabri: la reazione vincolare presenta una componente tangenziale al vincolo (attriti).

## 1.3 Gradi di libertá e coordinate lagrangiane

La configurazione di un sistema libero formato da  $N$  particelle é individuata da  $\vec{r}_i$  vettori posizione, con  $i = 1, \dots, N$ , e quindi  $3N$  quantità scalari (in uno spazio tridimensionale). Definiamo gradi di libertá il numero minimo di coordinate indipendenti in grado di descrivere univocamente il sistema in esame. Il sistema libero formato da  $N$  particelle ha esattamente  $3N$  gradi di libertá, 3 per ogni particella. In un sistema vincolato le coordinate non sono tra loro indipendenti. Se si hanno  $k$  vincoli olonomi si hanno  $N - k = n$  gradi di libertá.

Vengono introdotte  $n$  coordinate indipendenti che tengono conto dei vincoli. Siano  $q_1, q_2, \dots, q_n$  tali coordinate, che non hanno in generale le dimensioni di una lunghezza e non sono raggruppabili per formare le componenti di un vettore. Tali coordinate sono dette lagrangiane (o generalizzate). Non esiste in generale un unico insieme possibile di coordinate generalizzate tali da poter descrivere il medesimo sistema.

## 1.4 Principio di D'Alembert ed equazioni di Langrange

Definiamo spostamento virtuale infinitesimo di un sistema un cambiamento di configurazione, relativo a una variazione  $\delta \vec{r}_i$  delle coordinate, compatibile con le forze e i vincoli a cui il sistema é sottoposto all'istante  $t$ . Viene distinto dallo spostamento reale  $d\vec{r}_i$ , che tiene conto della variazione di forze attive e vincolari in  $dt$ . Sia dato un sistema di  $N$  particelle in equilibrio, dove ogni singola particella é in equilibrio

$$\vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \Rightarrow \delta L = \sum_{k=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.7)$$

dove  $\delta L$  é il lavoro virtuale infinitesimo. Ponendo  $\vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{\phi}_i$ , dove  $\vec{F}_i^a$  sono tutte le forze attive agenti sulla particella  $i$ -sima (interazione con l'universo e altre particelle) e  $\vec{\phi}_i$  sono tutte le reazioni vincolari agenti sulla particella  $i$ -sima

$$\delta L = \sum_{k=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{k=1}^N \vec{\phi}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.8)$$

Assumiamo che il lavoro virtuale compiuto dalle reazioni sia nullo, e che i vincoli siano olonomi, bilaterali e lisci. Allora si ha:

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \Rightarrow \text{Principio dei lavori virtuali} \quad (1.9)$$

Puó essere vista come combinazione lineare degli spostamenti virtuali rispetto ai moduli delle forze attive. Siccome i  $\delta \vec{r}_i$  non sono in generale linearmente indipendenti le  $\vec{F}_i^a$  non sono automaticamente tutte nulle. Siano  $q_1, \dots, q_n$  le coordinate lagrangiane scelte per il sistema in esame:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t) \quad \delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (1.10)$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \quad (1.11)$$

dove

$$Q_k^a = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (1.12)$$

viene detta forza generalizzata attiva.

Siccome le coordinate lagrangiane sono indipendenti se  $\delta L = 0$ , si ha quindi la forza generalizzata  $Q_k^a = 0$ . Nelle ipotesi fatte é possibile dimostrare che  $Q_k^a = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$  é condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio.

Ora vogliamo generalizzare e rimuovere l'ipotesi di sistema in equilibrio e per farlo bisogna partire dalle N equazioni del moto  $\frac{d\vec{p}_i}{dt} - \vec{F}_i = 0$ . Se continuiamo ad assumere che le reazioni vincolari non compiano lavoro virtuale, possiamo scrivere (Principio di D'Alembert):

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^a - \frac{d\vec{p}_i}{dt}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.13)$$

Ora scriviamo la velocità per la particella i-sima:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (1.14)$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (1.15)$$

Come prima si ha  $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^n Q_k^a \delta q_k$ , quindi:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k \quad (1.16)$$

Si osservi che  $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ , e inoltre

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (1.17)$$

Riscriviamo dunque

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k = \quad (1.18)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k \quad (1.19)$$

Dal principio di D'Alembert, ponendo  $T = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$ , si ha:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] Q_k \delta q_k = 0 \quad (1.20)$$

Dato che gli spostamenti virtuali  $\delta q_k$  sono indipendenti possiamo scrivere  $n$  equazioni del moto:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (1.21)$$

Se consideriamo tutte le forze attive come conservative possiamo farle scaturire da un unico potenziale  $U$  tale che ovviamente  $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U$ . Possiamo riscrivere quindi la forza generalizzata come

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (1.22)$$

Imponendo la conservatività sul potenziale esso non può dipendere da  $\dot{q}_k$  o da  $t$  e di conseguenza le equazioni del moto assumono la forma:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - U) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - U) = 0 \quad (1.23)$$

Definiamo a questo punto Lagrangiana la funzione  $L = T - U$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} L = 0 \quad \Rightarrow \text{Equazione di Lagrange} \quad (1.24)$$

Osservazione: le equazioni di Lagrange possono ancora essere scritte nella forma usuale se  $U = U(q, \dot{q}, t)$ , avendo come forza generalizzata:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (1.25)$$

dove  $U$  è detto potenziale generalizzato.

## 1.5 Principio variazionale di Hamilton

L'equazione di Lagrange soddisfa il secondo principio della dinamica ponendosi apparentemente in modo più generale rispetto a esso. Di fatto però, per quanto mostrato fino a ora, non è una conclusione alla quale è lecito giungere. Scriviamo la lagrangiana per un generico punto materiale:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{q} - U(\vec{r}) \quad (1.26)$$

Inserendo tale lagrangiana nell'equazione di Lagrange si perviene al sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \ddot{q} \\ \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial q} \end{cases} \quad (1.27)$$

Risolvendo il sistema si ha l'equazione  $m \ddot{q} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial q}$ , dalla quale si deduce:

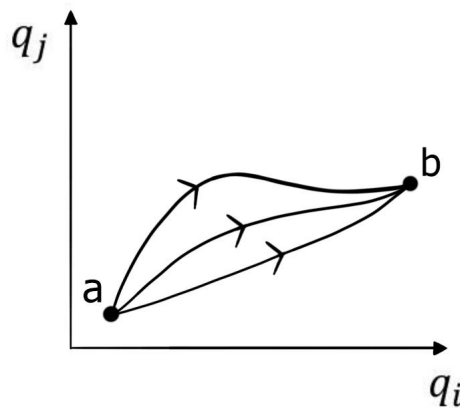
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \\ m\ddot{y} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} \\ m\ddot{z} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \end{cases} \quad (1.28)$$

Da cui, ricomponendo vettorialmente:

$$m\vec{a} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \quad (1.29)$$

Si evince dunque come il secondo principio sia contenuto all'interno dell'equazione di Lagrange nel caso che la risultante delle forze costituisca un campo conservativo (L'equazione di Hamilton-Jacobi é la generalizzazione dell'equazione di Lagrange. In essa il secondo principio viene rispettato anche nel caso non conservativo).

Ora vogliamo far vedere che effettivamente l'equazione di Lagrange é piú generale del secondo principio. Hamilton si pose il problema di ricercare un principio piú generale, e tale é quello che oggi é noto come principio variazionale di Hamilton. Consideriamo uno spazio delle configurazioni bidimensionale, disegnando alcune traiettorie ammissibili tra i punti fissi a e b.



**Figura 1.1:** Moti ammissibili per la particella tra due punti qualunque dello spazio

Perché il corpo segue un percorso anziché un altro? Ciò é dovuto alla risultante delle forze attive e vincolari. Hamilton introdusse una grandezza detta Azione,  $A$  cos'í definita

$$A \doteq \int_A^B L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (1.30)$$

la ovviamente dipende dal percorso.

Principio variazionale di Hamilton: *”Tra i moti ammissibili del sistema quello reale é quello che rende stazionaria l'azione”*

Vogliamo immediatamente precisare che la funzione integranda non é la Lagrangiana quando si va a definire l'*Azione*, la funzione integranda é una qualunque funzione che dipende da una variabile, la derivata di tale variabile, e un'altra variabile ancora. Di fatto nella dimostrazione che seguirá in nessun modo sfrutteremo della funzione  $L(q, \dot{q}, t)$  proprietá che vadano oltre il suo essere semplicemente funzione di  $(q, \dot{q}, t)$ . Diremo dunque che l'azione é stazionaria lungo una certa traiettoria se su di essa assume, a meno di infinitesimi di ordine superiore



al primo, lo stesso valore corrispondente a traiettorie che differiscono da quella considerata per uno spostamento infinitesimo. Fissiamo dunque una certa traiettoria  $q(t)$  e se ne prende una da cui differisce di  $dq(t)$ .

$$\delta A = A(dq + q) - A(q) = \int_A^B [L(q + dq, \dot{q} + d\dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)] dt \quad (1.31)$$

Sfruttiamo lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine per una  $f(x, y)$ :

$$f(x, y) \cong f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \quad (1.32)$$

Ponendo  $x - x_0 = x'$  e  $y - y_0 = y'$  abbiamo:

$$f(x' + x_0, y' + y_0) - f(x_0, y_0) \cong \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}x' + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}y' = \vec{\nabla}f(x, y) \cdot (x', y') \quad (1.33)$$

da cui si ha, evidentemente:

$$\delta A = \int_A^B \left[ \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} \right] dt \quad (1.34)$$

Sia  $\lambda$  un parametro rispetto al quale eseguire il cambio di traiettoria:

$$d\dot{q} = \frac{d\dot{q}}{d\lambda} d\lambda = \frac{d}{d\lambda} \frac{dq}{dt} d\lambda = \frac{d}{dt} \frac{dq}{d\lambda} d\lambda = \frac{d}{dt} dq \quad (1.35)$$

Attraverso i seguenti passaggi:

$$\delta A = \int_A^B \left[ \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left( \frac{d}{dt} dq \right) \right] dt = \int_A^B \frac{\partial L}{\partial q} dq dt + \int_A^B \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left( \frac{d}{dt} dq \right) dt \quad (1.36)$$

Applicando il teorema di integrazione sul secondo di questi integrali, e tenendo presente che  $dq$  valutato tra  $a$  e  $b$  è zero in quanto gli estremi sono in comune a tutti i moti ammissibili, si arriva alla seguente equazione fondamentale:

$$\delta A = \int_A^B \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] dq dt \quad (1.37)$$

In ottemperanza al principio variazionale deve aversi  $\delta A = 0 \forall dq \neq 0$ . Ciò implica:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (1.38)$$

Che è proprio l'equazione di Lagrange. Essa è stata ricavata indipendentemente dal secondo principio della dinamica, usando il principio variazionale di Hamilton. Quanto mostrato fino a questo punto può essere visto come una vera e propria dimostrazione di  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

### 1.5.1 Applicazione equazione di Eulero-Lagrange

Estrapoliamo il principio di inerzia nel caso della traslazione e della rotazione in assenza di forze ( $U(\vec{r}) = 0$ ).

Nel caso traslazionale

$$L = T - U = T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (1.39)$$

ed inserendo tale lagrangiana nell'equazione di Lagrange otteniamo

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{x} = \text{costante} \Rightarrow \text{Principio di inerzia} \quad (1.40)$$

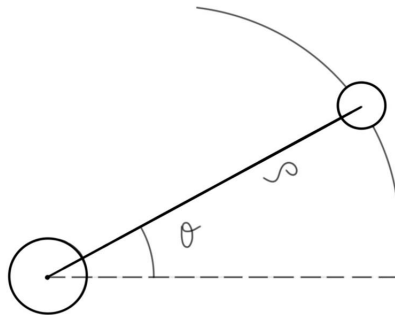
Nel caso rotazionale

$$L = T - U = T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (1.41)$$

da cui

$$\frac{d}{dt}I\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{\theta} = \text{costante} \Rightarrow \text{Principio di inerzia} \quad (1.42)$$

Nel caso del sistema Terra-Sole



**Figura 1.2:** Sistema terra-sole

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{\rho}$$

Questo é un sistema a 2 gradi di libert ,  $L = L(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta})$

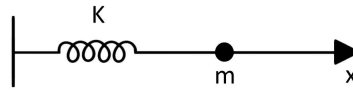
$$1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$$

$$2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Dalla 2 si evince immediatamente la seconda legge di Keplero:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{costante} = m\rho^2\dot{\theta} \Rightarrow \text{Conservazione del momento angolare}$$

Infine riportiamo il caso dell'oscillatore armonico



**Figura 1.3:** Oscillatore armonico semplice

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 = L(q, \dot{q}) \text{ con } q = x.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

Che é appunto l'equazione del moto dell'oscillatore preso in esame.

## 1.6 Formulazione Hamiltoniana

Nella formulazione Lagrangiana, conoscendo la funzione  $L = L(t, q, \dot{q})$  e le condizioni iniziali, il moto del sistema risulta univocamente determinato come soluzione di un sistema di  $n$  equazioni differenziali del secondo ordine. Nella formulazione Hamiltoniana il moto é determinato dalla soluzione di un sistema di  $2n$  equazioni differenziali del primo ordine. Ci aspettiamo che questo sia possibile in quanto sappiamo dall'analisi che in generale un'equazione differenziale di ordine  $k$  é equivalente a un sistema di equazioni del primo ordine in  $k$  funzioni incognite. Un esempio semplice é:

$$\ddot{x} = a(x, t)$$

É equivalente a: 
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = a(x, t) \end{cases}$$

Per passare dalla formulazione Lagrangiana a quella Hamiltoniana ci serviamo della *Trasformata di Legendre*, la quale parte prendendo in esame una funzione  $F = F(x_1, \dots, x_n, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  tale che:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i,j=1\dots n} \neq 0$$

Definiamo delle nuove variabili:

$$y_i = \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x_i} \quad (i = 1 \dots n).$$

Allora esiste una trasformata  $G$ , tale che:

$$x_i = \frac{\partial G}{\partial y_i} \quad \text{che genera il seguente legame funzionale}$$

$$G = G(y, \alpha) = \sum_{i=1}^n y_i x_i(y, \alpha) - F(x(y, \alpha), \alpha).$$

E inoltre si ha:

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_i}.$$

Applicando alla meccanica la trasformata di Legendre, ricaviamo dalle equazioni di *Lagrange* quelle di *Hamilton*. La nostra funzione  $F$  é ora la lagrangiana:

$$L = L(\dot{q}, q, t, \alpha)$$

dove  $\alpha$  sono eventualmente le masse e le cariche dei punti del sistema. Definiamo la trasformata di *Legendre* di  $L$  rispetto alle  $\dot{q}$ . Si dice che  $y_i$  e  $x_i$  sono due variabili coniugate se rispettano la relazione:

$$y_i = \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x_i} \leftrightarrow x_i = x_i(y, \alpha).$$

Definiamo l'impulso generalizzato come:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

La condizione  $\det \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i,j=1\dots n} \neq 0$  é noto che viene rispettata dalla Lagrangiana. Essendo soddisfatta tale condizione il sistema puó essere risolto per le  $\dot{q}$ :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \leftrightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t, \alpha).$$

La trasformata  $H$  é:

$$H(q, p, t, \alpha) = \sum_i p_i \dot{q}_i(q, p, t, \alpha) - L(\dot{q}(q, p, t, \alpha), q, t, \alpha). \quad (1.43)$$

con

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}; \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

(Le variabili non alterate sono  $q, t, \alpha$ )

Le equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Le equazioni di Hamilton invece:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \\ \frac{d}{dt} q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

Dove la funzione  $H$ , trasformata di Legendre della Lagrangiana, é detta Hamiltoniana. Ora  $\dot{q}$  e  $L$  vanno lette nelle nuove variabili. Le variabili  $(t, q, \dot{q})$  sono dette Lagrangiane. Le variabili  $(t, q, p)$  sono dette Hamiltoniane. Questo procedimento é appunto applicabile solo se l'Essiano(o Jacobiano)  $\det \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i,j=1\dots n}$  é appunto diverso da zero. Ci sono alcune situazioni in cui questa condizione non é rispettata e quindi non é possibile passare dalla formulazione Lagrangiana a quella Hamiltoniana. Un esempio é la *Relativita' Generale*. Ora diamo una interpretazione a questa nuova funzione chiamata Hamiltoniana. Consideriamo la Lagrangiana  $L = T - U$ . L'energia cinetica  $T$  la possiamo scrivere come:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

L'Hamiltoniana é:

$$H = \sum_i (p_{x_i} \dot{x}_i + p_{y_i} \dot{y}_i + p_{z_i} \dot{z}_i) - \tilde{L}$$

dove il tilde indica che ci stiamo riferendo alle variabili Hamiltoniane. Tenendo conto che la velocità  $\dot{x}$  é in variabili Hamiltoniane quando la si esprime in funzione dell'impulso, e quindi:

$$\tilde{x}_i = \frac{p_{x_i}}{m_i}$$

allora riscriviamo la Lagrangiana ed esplicitiamo i termini dell'Hamiltoniana:

$$H = \sum_i (p_{x_i} \tilde{x}_i + p_{y_i} \tilde{y}_i + p_{z_i} \tilde{z}_i) - \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{m_i} (p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2) + U.$$

Attraverso a questo punto banali passaggi si arriva a:

$$H = \tilde{T} + U = \tilde{E}. \quad (1.45)$$

Cioé l'Hamiltoniana non é l'energia totale del sistema. Nota l'energia totale, per conoscere  $H$  basta trasportarla in funzione di  $p$  e  $q$ . L'Hamiltoniana viene anche detta Energia Totale Generalizzata. Quindi un sistema meccanico può essere direttamente espresso secondo l'approccio Hamiltoniano, é sufficiente assegnare l'energia totale dello stesso. É noto che se la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo l'energia si conserva. Vogliamo far vedere che:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \leftrightarrow \frac{dH}{dt} = 0$$

E siccome  $H$  é l'energia totale allora essa si conserva. Sappiamo che se  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  allora anche  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , in quanto  $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$ . Calcoliamo  $\frac{dH}{dt}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che se non c'è dipendenza esplicita dal tempo nell'Hamiltoniana allora l'energia totale del sistema si conserva! Ciò significa che possono variare energia cinetica e potenziale, ma lo faranno in maniera tale da lasciare inalterata la loro somma.

## 1.7 Parentesi di Poisson

Una funzione  $F(p, q, t)$  é detta "integrale primo" delle equazioni del moto o "costante del moto" se per ogni moto del sistema dato assume un valore costante  $c$ . Consideriamo  $F(p, q, t)$  e calcoliamone la derivata totale rispetto a  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \left( \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \end{aligned}$$

Tale espressione viene riscritta come:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Data una coppia di funzioni  $F(p, q, t)$  e  $G(p, q, t)$  si può definire una tale espressione detta *parentesi di Poisson*:

$$\{F, G\} = \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right), \quad (1.46)$$

dove la sommatoria generalizza il passaggio da una particella a  $n$  particelle. Ora facciamo una osservazione davvero molto importante. Se  $F$  è  $F(p(t), q(t))$  allora non essendoci dipendenza esplicita dal tempo la sua derivata parziale è zero. Se questo è il caso, e dai conti trovo che la parentesi di Poisson tra  $F$  e  $H$  è uguale a zero significa che la grandezza fisica  $F$  ha derivata totale nulla, e quindi è una costante del moto. Le proprietà delle parentesi di Poisson sono:

- $\{F, G\} = -\{G, F\}$
- $\{F, G + K\} = \{F, G\} + \{F, K\}$
- $\{FG, K\} = F\{G, K\} + \{F, K\}G$
- $\{\{F, G\}, K\} + \{\{K, F\}, G\} + \{\{G, K\}, F\} = 0$

Un'ultima cosa da dire riguarda il teorema di *Poisson* il quale afferma che se  $F$  e  $G$  sono due costanti del moto, allora anche la loro parentesi di *Poisson* è una costante del moto:

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad \frac{dG}{dt} = 0 \implies \frac{d}{dt}\{F, G\} = 0.$$

## 1.8 Equazione di Hamilton-Jacobi

Diamo ora l'espressione di quella che è l'equazione più generale della meccanica classica. In essa infatti, ricade tutto, dalla meccanica all'elettromagnetismo. Abbiamo ommesso il come si perviene a questa equazione per una questione di semplicità di comprensione, ma non vogliamo comunque perdere generalità. L'equazione di *Hamilton – Jacobi* è:

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.47)$$

dove  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ . La funzione  $S$  è detta funzione generatrice, e rappresenta un artificio matematico grazie al quale possiamo risolvere il nostro problema. Essa è l'incognita dell'equazione, essendo l'Hamiltoniana pari all'energia totale generalizzata. Infatti nota  $S$  possiamo derivarla rispetto a  $q_i$  e ottenere l'impulso generalizzato  $p_i$ , noto il quale è possibile risalire alla posizione generalizzata  $q_i$ , infatti noto l'impulso generalizzato posso prenderlo e inserirlo all'interno dell'equazione H-J, e in particolare quindi nell'Hamiltoniana la quale dipende esplicitamente sia da  $p$  che da  $q$ , nota la funzione generatrice che avremmo già calcolato a quel punto della trattazione, si risolve H-J rispetto alla posizione generalizzata, e quindi il problema è risolto. Dunque dato un sistema, il primo passo per risolvere  $H - J$  è scrivere l'energia generalizzata dello stesso, e poi ricavare dall'equazione la funzione generatrice  $S$ . Detto in modo più formale, risolvere  $H - J$  significa trovare una classe di soluzioni:

$$S = S(q_1, \dots, q_n, t, \tilde{q}_i, \dots, \tilde{q}_n)$$

dipendente da  $n$  parametri  $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$  e che soddisfi la condizione  $\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{q}_i \partial \tilde{q}_j} \right\| \neq 0$ . É la soluzione di un'equazione differenziale alle derivate parziali e quindi dipende da varie funzioni arbitrarie. S dunque non é la soluzione generale, ma a partire da essa formalmente é possibile ottenere l'integrale generale ripristinando l'equazione di Hamilton-Jacobi.

## 1.9 Separazione delle variabili

Un metodo utile per trovare l'integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi é la separazione delle variabili, ed é utilizzabile quando l'Hamiltoniana del sistema presenta una certa struttura, in particolare non dipende in modo esplicito dal tempo (la dipendenza dal tempo sará al piú quindi contenuta in  $q_i$  o  $p_i$ ). Consideriamo tale Hamiltoniana:

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Imponiamo che la soluzione abbia forma:

$$S(q, t) = W(q) + f(t)$$

non siamo, in questa fase, interessati alla forma piú generale di  $S$ . Derivando tale forma di  $S$  rispetto al tempo abbiamo:

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = -\frac{df}{dt}$$

avendo isolato al primo membro la dipendenza da  $q_i$  e al secondo la dipendenza da  $t$  é ovvio che i due membri cosí scritti devono essere simultaneamente uguali alla stessa costante che chiamiamo  $E$ :

$$\begin{cases} H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = E \\ \frac{df}{dt} = -E \end{cases} \quad (1.48)$$

Quindi si ha immediatamente che  $f(t) = -Et + \text{cost.}$ , ma la costante puó essere omessa in quanto la parte temporale della funzione generatrice subisce un processo di derivazione nel ritornare nell'equazione di Hamilton-Jacobi, e di conseguenza la costante additiva arbitraria non da contributo. Detto questo la parte temporale di  $S$  ha sempre questa forma, e quindi nel caso di Hamiltoniana non dipendente esplicitamente dal tempo possiamo ridurre l'equazione di Hamilton-Jacobi a:

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = E. \quad (1.49)$$

Nota  $W$  la funzione generatrice soluzione é  $S = W - Et$ , che dipende da  $n$  costanti arbitrarie tra cui  $E$ . Ora faremo vedere come questo discorso si applica alla risoluzione di un oscillatore armonico semplice. Vogliamo anticipare che con un esempio del genere questo approccio sembra che serva solo a complicare la vita, visto che con l'approccio Newtoniano standard ( $\vec{f} = m\vec{a}$ ) questo stesso problema é molto piú semplice. Ma quando da un sistema a un grado di libertá si passa giá solo a un sistema a due gradi di libertá allora si inizia a evidenziare la potenza di questo metodo. Riguardo la teoria sviluppata inerentemente a H-J questo é quello che é necessario e sufficiente per poter discutere del teorema che sta alla base della teoria che lega le onde alle particelle, il *Teorema dell'Eikonale*, di cui parleremo nel prossimo paragrafo.

## 1.10 Teorema dell'Eikonale

Vogliamo occuparci della relazione esistente tra la teoria di Hamilton-Jacobi e l'ottica geometrica. Al tempo di Hamilton la Meccanica Classica era considerata rigorosamente vera e nessun esperimento giustificava di considerarla come una approssimazione di una teoria piú generale. Il riconoscimento che la Meccanica Classica era solo un'approssimazione di una teoria ondulatoria poté avvenire solo dopo la scoperta di certi effetti dipendenti dalla lunghezza d'onda della particella (esperimenti di interferenza di Davisson e Germer). L'ottica geometrica sta all'ottica ondulatoria come la meccanica classica sta alla meccanica ondulatoria. Partiamo dall'ottica ondulatoria e in particolare dalla cosiddetta ottica ondulatoria scalare, ossia prendiamo in esame la sola equazione delle onde del campo scalare  $\phi$ :

$$\nabla^2 \phi + \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.50)$$

dove  $\frac{n^2}{c^2} = \frac{1}{v^2}$ , con  $c$  velocità della luce nel vuoto,  $n$  indice di rifrazione del mezzo,  $v$  velocità di propagazione della luce nel mezzo. Se  $\vec{\nabla} n = 0$  allora un'onda piana del tipo:

$$\phi = \phi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.51)$$

é soluzione dell'equazione. Il legame tra il numero d'onda e la pulsazione  $\omega$  si ricava sostituendo tale espressione di  $\phi$  nell'equazione delle onde:

$$k^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2 \quad (1.52)$$

e quindi un modo equivalente per scrivere la soluzione é:

$$\phi = \phi_0 e^{i \frac{\omega}{c} (\frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{\omega} c - ct)}$$

(l'argomento dell'esponenziale prende anche il nome di fase dell'onda). Nel vuoto  $n = 1$  e il numero d'onda vale  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  e possiamo ancora scrivere:

$$\phi = \phi_0 e^{i k_0 (\frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{\omega} c - ct)}.$$

Ci interessa ora studiare il caso dell'ottica geometrica, dove  $n$  non é esattamente costante ma varia lentamente nello spazio. In questo caso l'onda piana non é piú soluzione dell'equazione delle onde ma, supponendo che la variazione di  $n$  nello spazio si continua e piccola su lunghezze dell'ordine della lunghezza d'onda, possiamo cercare una soluzione che assomigli all'onda piana. Generalizzando, in luogo di  $\phi_0$  poniamo una funzione del punto, e lasciamo invariata la dipendenza dal tempo, come ci aspettiamo che accada in quanto la frequenza, che dipende solo dalla sorgente, non varia. Esprimiamo la dipendenza funzionale dallo spazio in termini di una funzione  $L(\vec{r})$  da determinarsi, detta lunghezza del cammino ottico oppure *Eikonale*. La soluzione proposta é:

$$\phi = e^{A(\vec{r})} e^{i k_0 (L(\vec{r}) - ct)} \quad (1.53)$$

Ponendo questa soluzione nell'equazione delle onde possiamo ricavare le equazioni per  $A(\vec{r})$  e  $L(\vec{r})$ . Eseguendo i vari passaggi si arriva a scrivere:

$$i k_0 [2 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} L + \nabla^2 L] \phi + [\nabla^2 A + |\vec{\nabla} A|^2 - k_0^2 |\vec{\nabla} L|^2 + n^2 k_0] \phi = 0$$



Ora, siccome sia  $A$  che  $L$  sono reali, i due pezzi devono essere singolarmente nulli:

$$\begin{cases} \nabla^2 A + |\vec{\nabla} A|^2 - k_0^2 |\vec{\nabla} L|^2 = -n^2 k_0 \\ 2\vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} L + \nabla^2 L \end{cases} \quad (1.54)$$

Come sar  ovvio a breve, dalla prima si possono ricavare informazioni asintotiche sulla forma dei raggi luminosi e dalla seconda informazioni asintotiche sull'intensit . Prendiamo in esame la prima. Ricordiamo che abbiamo supposto che  $n$  vari molto lentamente con la distanza e in particolare non cambi molto su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda. In sostanza la lunghezza d'onda   piccola rispetto alle dimensioni della regione di spazio in cui le propriet  del mezzo presentano variazioni (questa   proprio l'ipotesi dell'ottica geometrica). Dunque localmente  $\vec{\nabla} n = 0$  e in questo caso esiste la soluzione onda piana. Quindi, siccome adesso si ha che  $\phi_0 = e^{A(\vec{r})}$ , se l'indice di rifrazione   costante allora possiamo pensare che l'onda non si attenui, e di conseguenza  $A(\vec{r})$  stessa deve essere una costante, ma allora l'equazione presa in esame si riduce a:

$$|\vec{\nabla} L(\vec{r})|^2 = n^2. \quad (1.55)$$

Tale equazione   nota come *Equazione dell'Eikonale* dell'ottica geometrica. Le superfici a  $L$  costante determinate da queste equazione sono delle superfici a fase costante, e definiscono quindi i fronti d'onda. Le traiettorie dei raggi luminosi sono in ogni punto perpendicolari ai fronti d'onda. Adesso mostriamo la analogia tra la propagazione di un'onda e il moto di una particella. Bisogna prima di tutto osservare come l'equazione dell'Eikonale abbia la stessa struttura dell'equazione di Hamilton-Jacobi del caso conservativo (e ma infatti l'indice di rifrazione nell'equazione dell'Eikonale   costante, e l'onda non si attenua quindi   anch'essa in un caso conservativo).

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + U = E$$

e quindi in modo equivalente:

$$|\vec{\nabla} W|^2 = 2m(E - U). \quad (1.56)$$

Vediamo come  $W$  del moto della particella giochi il ruolo di  $L$  della propagazione dell'onda, e il termine  $\sqrt{2m(E - U)}$ , che tiene conto della massa della particella, fa la parte dell'indice di rifrazione  $n$ . Essendo  $W$  indipendente dal tempo, le superfici di livello di  $W$  nello spazio delle configurazioni hanno posizioni fisse. Una superficie caratterizzata da un valore costante di  $S$  deve coincidere a un dato istante con una particolare superficie a  $W$  costante. Tuttavia la superficie  $S$  cambia nel tempo secondo la legge  $S = W - Et$ , quindi con la stessa struttura della fase dell'onda, e quindi il moto della superficie  $S$    analogo alla propagazione del fronte d'onda. A poco a poco, stiamo arrivando a descrivere il moto di una particella come se fosse un'onda. Poich  le superfici a  $S$  costante cambiano forma nel tempo, la velocit  con cui si muovono le superfici (= velocit  dell'onda) non   uniforme. Definiamo velocit  dell'onda in un punto il rapporto fra la distanza percorsa dal fronte d'onda in un intervallo di tempo e l'intervallo di tempo stesso:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

O meglio, possiamo dire che per determinare la velocit  di fase dobbiamo cercare un punto che si muove a fase costante (cio  a  $S$  costante):

$$\frac{dS}{dt} = 0 \text{ con } S = S(\vec{r})$$

allora sviluppando la derivata totale si ha:

$$\vec{\nabla}W \cdot \frac{\vec{r}}{dt} - E = 0$$

Eseguendo il prodotto scalare e risolvendo rispetto a u:

$$u = \frac{E}{|\vec{\nabla}W| \cos\vartheta}.$$

Dove  $\vartheta$  é l'angolo compreso tra la velocità di propagazione dell'onda e la perpendicolare alle superfici a  $W$  costante. In questo modo  $\vec{u}$  non é univocamente determinata, ma la si definisce scegliendo il minimo tra i percorsi possibili, ossia quello ortogonale alla superficie a  $S$  costante, dunque  $\cos\vartheta = 1$ . Siccome sappiamo che l'impulso generalizzato della particella i-sima é:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \implies |\vec{\nabla}W| = p$$

allora  $u = \frac{E}{p} = \frac{E}{mv}$ . Dunque la velocità di un punto su una superficie a  $S$  costante é inversamente proporzionale alla velocità spaziale della particella il cui moto é descritto da  $S$ . Si noti poi che il moto della particella avviene in modo che la traiettoria sia sempre ortogonale a  $S$  costante. Infatti, la traiettoria é punto per punto individuata, come direzione, dalla quantità di moto e abbiamo detto appunto che  $\vec{p} = \vec{\nabla}W$ . Ora, quale delle possibili traiettorie ortogonali alle curve di livello di  $W$  la particella seguirá? Siccome abbiamo mostrato la completa analogia tra onde e particelle, cioè abbiamo fatto vedere che nell'equazione dell'Eikonale c'è tutto il necessario per poter trattare il moto di una particella e di conseguenza l'equazione d'onda contempla che la sua soluzione possa descrivere il moto di una particella, applichiamo il principio di *Fermat*, il quale dice che un raggio luminoso tra due punti A e B segue la traiettoria che minimizza il tempo di percorrenza:

$$\delta \int_A^B dt = 0, \quad dt = \frac{ds}{v} \tag{1.57}$$

ma siccome l'indice di rifrazione é definito come  $n = c/v$  allora  $v = c/n$ :

$$\delta \int_A^B n ds = 0, \quad \text{con } n \text{ funzione dello spazio}$$

ma  $n$ , in accordo con l'analogia tra Eikonale e  $W$ , si può riscrivere portando a:

$$\delta \int_A^B \sqrt{2m(E - U)} ds = 0. \tag{1.58}$$

L'equazione dell'Eikonale ci fornisce le curve di livello e il principio di *Fermat* le traiettorie dei raggi luminosi. Notando la corrispondenza:

$$W \leftrightarrow L, \quad Et \leftrightarrow ct$$

si può ottenere l'equazione fondamentale della meccanica quantistica, ossia l'equazione di *Schrödinger*. Adesso il discorso si fa molto delicato. Innanzitutto all'epoca non si riusciva a capire come descrivere le particelle da un certo punto in poi, quando le dimensioni diventavano dell'ordine degli orbitali atomici in buona sostanza. Quelle che fino a quel momento erano state trattate come particelle, e tutto aveva funzionato, fino a quel momento, alla perfezione, adesso esibiscono anche proprietà ondulatorie. Ciò sembrava giustamente assurdo, perché le onde sono onde, e le particelle sono particelle. Ma con il teorema dell'Eikonale, sfruttando l'equazione di Hamilton-Jacobi, abbiamo mostrato come in realtà una particella può essere descritta come se fosse un'onda, a livello meramente

matematico. Ma il punto adesso é non é che può essere descritta come un'onda, essa DEVE essere descritta fisicamente come un'onda in alcune condizioni e come particella in altre. Un elettrone non é semplicemente una particella, perché a volte esibisce proprietà di onda, e non é un'onda, perché a volte esibisce proprietà di particella, l'elettrone é entrambe le cose. E non solo l'elettrone, ma in realtà tutte le particelle sono anche onde. É questo il filo logico che dai risultati sperimentali portó *Schrödinger* a formulare l'equazione che porta il suo nome. L'ipotesi di *Schrödinger* é che l'energia di una particella si può scrivere come  $E = \hbar\omega$ . Innanzitutto bisogna capire qual é la lunghezza d'onda nel caso della meccanica.  $\lambda$  é data dalla velocità di fase dei fronti d'onda, soluzioni dell'equazione di Hamilton-Jacobi, moltiplicata per il periodo:

$$\lambda = uT = \frac{u}{\nu} = \frac{2\pi u}{\omega} = \frac{2\pi (E/P)}{(E/\hbar)} = \frac{2\pi \hbar}{p} = \frac{h}{p} \quad (\text{Ipotesi di De Broglie}).$$

Nel caso dell'equazione delle onde sappiamo che la soluzione si può scrivere come:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

e imponendo questa come soluzione abbiamo l'equazione per la componente spaziale assume forma:

$$\nabla^2 \phi_0 + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \phi_0 = 0$$

e siccome  $\frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,

$$\nabla^2 \phi_0 + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \phi_0 = 0$$

Per quanto spiegato prima, allora in corrispondenza della funzione d'onda luminosa, deve esistere nella meccanica ondulatoria una funzione  $\psi$  che tenga conto della natura ondulatoria e particellare nella Natura, e quindi tale funzione deve essere soluzione di un'equazione che ha la stessa struttura dell'equazione d'onda. Il punto sta nello sfruttare a questo punto l'ipotesi di *Planck* ( $\hbar = h/2\pi$ ), *Schrödinger* e *De Broglie* simultaneamente per riscrivere il coefficiente della  $\phi$  nell'equazione d'onda:

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2 p^2}{h^2} = \frac{p^2}{\hbar^2}$$

Ed essendo l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{p^2}{2m} + U = E \implies p^2 = 2m(E - U)$$

Si arriva finalmente:

$$\nabla^2 \psi_0 + \frac{8\pi^2 p^2}{h^2} \psi_0 = 0 \quad (1.59)$$

Che é proprio l'equazione di *Schrödinger*, indipendente dal tempo. Ora vogliamo ricostruire a partire dalla forma della soluzione generale e dalla forma dell'equazione indipendente dal tempo l'equazione di *Schrödinger* dipendente dal tempo. Riscriviamo:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \right) \psi_0 = E \psi_0,$$

moltiplichiamo ambo i membri per  $e^{-i\omega t}$  e integriamo in  $d\omega$ :

$$\int \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \right) \psi_0 e^{-i\omega t} d\omega = \int E \psi_0 e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right) \int \psi_0(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \hbar \int \omega \psi_0(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \hbar i \frac{\partial}{\partial t} \int \psi_0(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Ponendo  $\psi(\vec{r}, t) = \int \psi_0(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$ , si ottiene:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right)\psi(\vec{r}, t) = \hbar i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) \tag{1.60}$$

Che é l'equazione di *Schrödinger* nella sua forma generale.

## Capitolo 2

# Meccanica quantistica

Siccome le osservazioni sperimentali hanno portato a farci rendere conto di come la meccanica analitica sia solo una approssimazione di una teoria ondulatoria siamo arrivati a scrivere l'equazione di *Schrödinger*. Gli effetti quantistici in realtà sono presenti in ogni scala della Natura, ma diventano apprezzabili solo quando le dimensioni dei corpi raggiungono ordini di grandezza che per noi sono inosservabili a occhio nudo. Tale teoria consente di superare quel limite che ha la meccanica classica nel descrivere il *troppo piccolo*. Come principio della meccanica quantistica bisogna assumere, a causa delle osservazioni fatte, il dualismo onda particella. Ossia, una particella può, in certe condizioni, comportarsi come un'onda. Il principio di indeterminazione di Heisenberg scaturisce come conseguenza degli aspetti ondulatori della materia. Tale principio sostiene l'impossibilità di conoscere con arbitraria accuratezza e simultaneamente la posizione e l'impulso di una particella, anche se come vedremo la situazione è più generale di così. La Natura presenta, o sembra che presenti, un limite invalicabile, oltre il quale la determinazione non può andare. Alcuni fenomeni che si iniziarono a osservare verso la fine dell'ottocento non riuscivano a essere spiegati se non introducendo ipotesi del tutto nuove e contraddittorie rispetto alla fisica nota fino a quel tempo. Un esempio è proprio la quantizzazione dell'energia. In meccanica classica siamo abituati a grandezze fisiche che variano con continuità, in meccanica quantistica ciò non è detto. A fondamento della meccanica quantistica bisogna associare a una particella libera, di energia  $E$  e impulso  $\vec{p}$ , un'onda monocromatica di frequenza  $f$  e vettore d'onda  $\vec{k}$  tale che:

$$\begin{cases} E = hf = h \frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega & \text{Ipotesi Planck} \\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \Rightarrow |\vec{p}| = \frac{h}{\lambda} & \text{Ipotesi di De Broglie} \end{cases} \quad (2.1)$$

Dove  $h$  è la costante di Planck.

### 2.1 Interpretazione di Copenhagen

Giunti a questo punto ci siamo fatti in qualche modo un'idea di quella che è la meccanica quantistica. Quando si iniziò a parlare di questi argomenti molti fisici dell'epoca, essendo legati alla visione classica della Natura, pur accettando i risultati sperimentali sostenevano che essi fossero unicamente legati al fatto che, siccome misurare significa interagire e quindi alterare il sistema, nell'atto di misura la perturbazione del sistema quantistico era troppo importante, da qui la apparente natura probabilistica di tali sistemi. Con l'interpretazione di *Copenhagen* invece si mise un punto in tal senso. I sistemi quantistici sono intrinsecamente probabilistici, nel momento in cui i risultati sperimentali sono in accordo con il descriverli attraverso la funzione d'onda, e nel momento in

cui alle grandezze fisiche viene associato un operatore, i nostri modelli matematici impongono il principio di *Heisenberg* per il semplice fatto che tali modelli descrivano la Natura in accordo con i risultati sperimentali. Dunque, coloro i quali volevano ridurre la Meccanica Quantistica a un problema di misura, dovettero arrendersi di fronte all'evidenza dei fatti. Secondo tale interpretazione, la funzione d'onda, soluzione dell'equazione di *Schrödinger*, contiene in sé tutte le informazioni che è possibile ottenere da quel sistema fisico. La  $\psi$  di per sé è una funzione olomorfa, con parte reale e immaginaria, e non ha una diretta interpretazione fisica, ciò che ha fisicamente è il suo modulo quadro, il quale rappresenta la densità di probabilità di trovare una particella in un certo volume di spazio. La funzione d'onda specifica le distribuzioni di probabilità per le misurazioni di qualunque osservabile fisica. Tuttavia, al contrario della meccanica statistica classica, il ricorso alla probabilità non è dovuto alla nostra ignoranza delle condizioni iniziali, ma è intrinseca e relativa ad ogni sistema individuale. Secondo questa interpretazione la funzione d'onda descrive un'insieme di possibilità tutte copresenti e solo il processo della misura la fa collassare in un unico e solo stato osservabile. Come vedremo per struttura dell'equazione di *Schrödinger* il problema è che non so a priori quale si manifesterà nell'atto di misura, e magari potrebbe anche manifestarsi una combinazione lineare delle soluzioni. Da qui per esempio il paradosso del gatto di *Schrödinger*; esso è sia vivo che morto semplicemente per un fatto statistico, e noi non sappiamo qual è la verità finché aprendo la scatola non "misuriamo" che fine ha fatto il gatto.

## 2.2 Principi della meccanica quantistica

Quello che viene espresso nell'interpretazione di Copenaghen può essere formalizzato nei seguenti principi:

- Al concetto di traiettoria bisogna sostituire quello di stato dipendente dal tempo. Lo stato quantistico di un corpuscolo è caratterizzato da una funzione d'onda  $\psi(\vec{r}, t)$  che contiene tutte le informazioni che sono possibili ottenere dal corpuscolo.
- $|\psi(\vec{r}, t)|^2$  rappresenta la densità di probabilità. La probabilità di trovare una particella nel punto  $\vec{r}$  in un volume  $dV$  all'istante  $t$  è:

$$P(\vec{r}, t) \propto |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV \quad (2.2)$$

La probabilità coincide con il secondo membro se la  $\psi(\vec{r}, t)$  è normalizzata su tutto lo spazio, cioè:

$$\iiint_V |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1 \quad (2.3)$$

- Il principio di sovrapposizione si applica alla misura di una grandezza fisica qualunque  $A$ .
  - i) Il risultato appartiene necessariamente all'insieme dei cosiddetti autovalori di  $A$  (cioè possibili valori di misura di  $A$ ).
  - ii) A ciascun autovalore di  $A$  corrisponde un autostato  $\psi_a(\vec{r})$ . Se  $\psi(\vec{r}, t) = \psi_a(\vec{r})$  la misura che possiamo compiere all'istante  $t_0$  deve dare necessariamente l'autovalore  $a$ .
  - iii) Se la funzione d'onda è arbitraria, la probabilità  $P_a$  di trovare, effettuando la misura all'istante  $t_0$ , l'autovalore  $a$ , si ottiene decomponendo  $\psi(\vec{r}, t_0)$  rispetto alle autofunzioni  $\psi_a(\vec{r})$ :

$$\psi(\vec{r}, t_0) = \sum_a C_a \psi_a(\vec{r}) \Rightarrow P_a = \frac{|C_a|^2}{\sum_a |C_a|^2} \quad (2.4)$$

- La misura per la grandezza A da il valore a, la funzione d'onda subito dopo la misura é:

$$\psi(\vec{r}, t_0) = \psi_a(\vec{r}) \quad (2.5)$$

## 2.3 Interpretazione della funzione d'onda

Come abbiamo visto nel primo capitolo l'equazione di *Schrödinger* é:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) \quad (2.6)$$

Ora vogliamo metterne in evidenza proprietà e aspetti notevoli che la riguardano. Consideriamo in primo luogo il caso di una particella libera, quindi  $U(\vec{r}, t) = 0$  (Per semplicità di calcolo ci mettiamo nel caso monodimensionale):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi(x, t) = i\hbar \partial_t \psi(x, t) \quad (2.7)$$

Possiamo usare la separazione delle variabili, dunque affermare che  $\psi(x, t) = \varphi(x) \vartheta(t)$  ci permette di risolvere l'equazione.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \vartheta(t) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = i\hbar \varphi(x) \frac{d\vartheta(t)}{dt}$$

Dividendo per  $\varphi(x) \vartheta(t)$  si ottiene:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = i\hbar \frac{1}{\vartheta(t)} \frac{d\vartheta(t)}{dt}$$

Avendo isolato in ciascuno dei due membri la variabilità rispetto a ciascuna delle due variabili, affinché sia rispettata l'equazione i membri devono essere necessariamente uguali entrambi a una medesima costante. La parte spaziale é:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = -A^2$$

Risolvendo tale equazione si ottiene una forma del tipo:

$$\varphi(x) = c_1 e^{iBx} + c_2 e^{-iBx}$$

La parte temporale:

$$i \hbar \frac{1}{\vartheta(t)} \frac{d\vartheta(t)}{dt} = -A^2$$

Che risolta restituisce:

$$\vartheta(t) = D e^{-iCt}$$

Componendo la  $\psi(x, t)$  abbiamo:

$$\psi(x, t) = \varphi(x) \vartheta(t) = a_1 e^{i(Bx - Ct)} + a_2 e^{-i(Bx + Ct)} \tag{2.8}$$

Tale equazione ha la struttura di sovrapposizione di due onde piane, la prima progressiva e l'altra regressiva, dove il vettore d'onda  $k$  vale in modulo  $B$  e la pulsazione  $\omega$  vale in modulo  $C$ . Se eseguiamo il modulo quadro di tale funzione d'onda otteniamo evidentemente una costante:

$$|\psi(x, t)|^2 = a_1^2 + a_2^2 \tag{2.9}$$

Questo cosa significa? Il modulo quadro della funzione d'onda rappresenta la densità di probabilità di trovare la particella. L'integrale in un dato volume  $V$  restituisce la probabilità di trovare la particella in quel volume. Una densità uniforme implica che comunque si scelga  $V$  sarà equiprobabile trovare la particella. In questo caso, particella libera, non abbiamo alcuna informazione sulla sua posizione. Osserviamo che per contro, conosciamo esattamente il suo impulso, in quanto per un'onda monocromatica la lunghezza d'onda è esattamente definita, e in accordo con l'ipotesi di De Broglie allora è l'impulso a essere esattamente definito,  $\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \hat{k}$ . Quanto detto è un modo per mostrare come il principio di indeterminazione di Heisenberg, che poi principio in fin dei conti già a questo punto principio non è, sia contenuto all'interno dell'equazione di *Schrödinger*. Quando si prova a confinare la particella, l'informazione sulla sua posizione non può che aumentare, ma a causa della sua natura ondulatoria non può che diminuire l'informazione sul suo impulso. Le funzioni d'onda appartengono allo spazio delle funzioni quadrato sommabili  $L^2$ , che è una particolarizzazione di  $L^p$  spazio funzionale di Hilbert. Siccome sappiamo che una generica  $\psi(\vec{r}, t)$  può essere espressa come sovrapposizione di infinite onde piane  $\psi_j(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega_j t)}$ , possiamo pensare alle onde piane come l'insieme di base di tale sottospazio. In  $L^2$  viene definito *prodotto scalare funzionale* la quantità:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) g(x) dx \tag{2.10}$$

Dove  $f^*(x)$  è il *complesso coniugato* di  $f(x)$ . Osserviamo subito che tale prodotto può essere visto come la *trasformatadiFourier* di  $g(x)$  posto che sia  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ :



$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, g(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-ikx} dx = \hat{g}(x) \quad (2.11)$$

Anticipiamo un risultato notevole per far meglio comprendere perché andremo a considerare solo la parte spaziale delle onde piane. Come vedremo, é possibile dimostrare che se il potenziale é indipendente dal tempo allora la funzione d'onda potrà sempre esprimersi come  $\psi(\vec{r}, t) = \varphi(x) \vartheta(t)$  dove la parte temporale avrà sempre forma  $\vartheta(t) \propto e^{-i\omega t}$ , e di conseguenza per separazione delle variabili per noi in quel caso l'equazione di *Schrödinger* diventa l'equazione che ha come soluzione  $\varphi(x)$ . Eseguiamo a questo punto il prodotto scalare tra due onde piane  $\psi(x) = e^{ikx}$  e  $\psi(x) = e^{iqx}$ :

$$(e^{iqx}, e^{ikx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-q)x} dx \quad (2.12)$$

- vale 1 se  $k = q$  (prodotto scalare di un'onda piana per se stessa)
- vale 0 se  $k \neq q$  (prodotto scalare tra due onde piane diverse)

Tali onde, basi del sottospazio di  $L^2$  a cui appartengono le funzioni d'onda, vengono dunque definite come un insieme di base ortonormale.

## 2.4 Trasformata di Fourier

Come é noto dal teorema di Fourier un segnale qualsiasi può essere scomposto come sovrapposizione di onde piane, una serie per essere precisi. La trasformata di Fourier consente di andare a calcolare i pezzi delle componenti, ossia ampiezza, fase e frequenza di ciascuna onda piana. Data una funzione  $x(t)$  definiamo la seguente come trasformata di Fourier di  $x(t)$ :

$$F[x](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.13)$$

L'antitrasformata invece:

$$F^{-1}[F[x]](t) = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F[x(t)] e^{i\omega t} d\omega \quad (2.14)$$

## 2.5 Operatori e grandezze fisiche

La meccanica quantistica si fonda sul concetto di operatore. A causa dell'interpretazione statistica sappiamo che ogni misura della grandezza  $A$  nello stato  $\psi(\vec{r}, t)$  può dare un risultato diverso (appartenente all'insieme degli autovalori di  $A$ ). Ad ogni grandezza fisica  $A$  andiamo ad associare un operatore  $\hat{A}$ .

$$\hat{A}\psi = a\psi \quad (2.15)$$

Scritta in tal modo abbiamo una equazione agli autovalori dove  $a$  é l'autovalore e  $\psi$  é l'autofunzione. Consideriamo una particella libera nello stato

$$\psi(x, t) = \varphi e^{i(kx - \omega t)}$$

di impulso  $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$ . Vogliamo definire l'operatore impulso  $\hat{P}$  in modo che sia:

$$\hat{P}\psi(x, t) = (\hbar k)\psi(x, t) \quad (2.16)$$

Dunque data la particella libera:

$$\hat{P}\varphi e^{i(kx - \omega t)} = \hbar k \varphi e^{i(kx - \omega t)}$$

Il concetto é che dobbiamo capire che espressione deve avere l'operatore impulso applicato all'onda piana per restituire l'impulso dell'ipotesi di De Broglie per l'onda piana stessa. Svolgendo i calcoli si perviene appunto all'espressione:

$$\hat{P} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

Da cui generalizzando:

$$\hat{P} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (2.17)$$

Dunque al vettore impulso classico  $\vec{P}$  in meccanica quantistica si associa l'operatore impulso  $\hat{P}$ , con l'idea nell'atto di misurazione dello stesso ad essere misurato é il suo autovalore, con la funzione d'onda come autofunzione. Nella stessa ottica consideriamo l'energia associata alla particella:

$$E = \hbar\omega$$

e definiamo l'operatore energia come:

$$\hat{E}\psi = \hbar\omega\psi \quad (2.18)$$

da cui svolgendo i calcoli si perviene alla seguente espressione per tale operatore quantistico:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.19)$$

La posizione classica  $\vec{r}$  viene adottata nello stesso modo "giustamente" in meccanica quantistica. Consideriamo l'Hamiltoniana

$$H = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U \Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{P} \cdot \hat{P}}{2m} + U = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U$$

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \Rightarrow \text{Equazione di Schrödinger} \quad (2.20)$$

Quello che vogliamo mettere in luce é che a ogni grandezza fisica  $A(\vec{r}, \vec{P})$  possiamo associare il corrispondente operatore quantistico effettuando la sostituzione  $\vec{P} \Rightarrow \hat{P}$ . Ribadiamo dunque che i soli valori misurabili appartengono all'insieme degli autovalori associati all'operatore quantistico  $\hat{A}(\vec{r}, \hat{P})$ . In matematica tali autovalori possono essere in generale numeri complessi, ma dovendo essere i risultati della misura fisicamente dobbiamo avere autovalori reali. In meccanica quantistica gli operatori che rappresentano osservabili fisiche sono detti hermitiani. Un operatore hermitiano soddisfa la condizione:

$$\int_V \phi_i^* (\hat{A} \phi_j) dV = \int_V (\phi_i \hat{A})^* \phi_j dV \quad (2.21)$$

dove  $\phi_i$  e  $\phi_j$  sono 2 autofunzioni associate all'operatore  $\hat{A}$ . Si può dimostrare che gli autovalori degli operatori hermitiani sono reali e che le loro autofunzioni sono ortogonali:

$$\int_V \phi_i^* \phi_j dV = \delta_{ij} \quad (2.22)$$

Si può verificare che a uno stesso autovalore siano associate  $n$  autofunzioni, in tal caso l'autovalore é detto  $(n - 1)$  volte degenerare. Questo concetto sará fondamentale quando parleremo di armoniche sferiche. Di fatto in generale accade che ad uno stesso libello energetico siano associate piú autofunzioni soluzioni della componente angolare dell'equazione di *Schrödinger*. Ogni misura appartiene all'insieme degli autovalori di  $\hat{A}$ , e ciascuna di esse ha una diversa probabilità di manifestarsi espressa come:

$$P_k = \frac{|C_k|^2}{\sum_{j=1}^n |C_j|^2} \quad (2.23)$$

Essendo

$$\phi = C_1 \phi_1 + \dots + C_n \phi_n$$

### 2.5.1 Commutatore

In meccanica quantistica gli operatori descrivono gli osservabili e i loro commutatori misurano la precisione con cui due osservabili possono essere misurati simultaneamente. Di fatto il commutatore viene usato per formalizzare il principio di indeterminazione di Heisemberg. Gli operatori in generale non sono commutativi. Si prenda ad esempio:

$$\begin{aligned} \hat{x} \hat{P}_x \psi(x, t) &= -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \hat{P}_x \hat{x} \psi(x, t) &= -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\hbar \psi \\ \hat{x} \hat{P}_x \psi(x, t) - \hat{P}_x \hat{x} \psi(x, t) &= i\hbar \psi(x, t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Definiamo commutatore la quantità:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (2.25)$$

Vogliamo in primo luogo fare vedere come attraverso il commutatore si possa esprimere la forma piú generale del principio di indeterminazione di Heisemberg. Siano  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  due operatori hermitiani soddisfacenti alla relazione di commutazione:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C} \quad (2.26)$$

con  $\hat{C}$  operatore hermitiano. Dunque abbiamo appena asserito che tali operatori non commutano se  $\hat{C}$  é diverso da zero. Definendo il valor medio come:

$$\langle A \rangle = \int_V \psi^* \hat{A} \psi dV \quad (2.27)$$

definiamo l'operatore di scarto:

$$\widehat{\Delta A} = \hat{A} - \langle A \rangle \quad (2.28)$$

Attraverso una serie di calcoli si arriva a dimostrare che:

$$\langle \Delta A^2 \rangle \langle \Delta B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle \hat{C} \rangle^2 \quad (2.29)$$

Quindi se  $\hat{C} \neq 0$  allora il suo valor medio(reale)al quadrato non può che essere positivo e maggiore di zero, e noi stiamo dicendo appunto che il prodotto tra i valori medi degli scarti al quadrato delle grandezze  $A$  e  $B$  é sempre maggiore o al limite uguale, e ciò significa che se il valore della misura di  $A$  tende al suo valore atteso, quindi  $\langle A \rangle$ , dovendo rispettare la diseguaglianza in essere, il valore della misura di  $B$  non può che allontanarsi dal suo valore atteso, appunto  $\langle B \rangle$ . Questo é del tutto generale e vale per due qualunque grandezze fisiche i cui operatori non commutano. Abbiamo visto come la posizione e l'impulso non sono operatori commutativi, da qui la forma piú, e meno generale, del principio di Heisemberg, ossia che non é possibile conoscere simultaneamente con lo stesso grado di accuratezza la posizione e la velocità della particella. Mostriamo adesso una ulteriore e importantissima proprietá del commutatore. Faremo vedere che se due operatori commutano allora ammettono lo stesso set di autofunzioni. Siano:

$$\begin{cases} \hat{A}\varphi = a\varphi \\ \hat{B}\phi = b\phi \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\hat{A}\hat{B}\varphi = a c \varphi \hat{B}\hat{A}\varphi = b a \varphi$$

Dunque imponendo la commutativitá degli operatori, tralasciando la soluzione banale  $\psi = 0$ :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B}\psi - \hat{B}\hat{A}\psi = a(c - b)\psi = 0$$

si ha che deve necessariamente essere  $c = b$ . Ma se ciò é verificato significa che le autofunzioni  $\varphi$  e  $\phi$  devono coincidere. Da questo appunto abbiamo dimostrato quanto asserito ed ha una implicazione pratica notevole, ossia se voglio trovare un set di autofunzioni rispetto ad un operatore potrei dover risolvere un'equazione per esempio molto complessa, e allora mi basta trovare un altro operatore che commuti con il primo che però restituisca un'equazione piú semplice da risolvere, perché tanto hanno le stesse soluzioni. Riguardo il commutatore concludiamo con due proprietá inerenti la sua algebra:

$$\begin{cases} [\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}] \\ [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \end{cases} \quad (2.31)$$

### 2.5.2 Traslatore e Rotatore

Definiamo l'operatore traslatore nel seguente modo:

$$\hat{T}(a)\varphi(x) = \varphi(x + a) \quad (2.32)$$

vogliamo ricavare che espressione deve avere  $\hat{T}(a)$  affinché applicato alla funzione d'onda  $\varphi(x)$  ne restituisca la traslata da  $x$  a  $x + a$ . A tal fine ragioniamo all'inverso, esprimendo lo sviluppo di Taylor per  $\varphi(x + a)$ :

$$\varphi(x + a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^k(x)}{k!} (x + a - x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^k(x) a^k}{k!}$$

Ricordiamo ora che l'operatore impulso é  $\hat{P} = -i\hbar \partial_x$ , e di conseguenza vogliamo esprimere la derivata k-sima in termine di tale operatore:

$$\varphi^k(x) = \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial(x^k)}$$

e quindi

$$\varphi^k(x) = \left(\frac{i\hat{P}}{\hbar}\right)^k \varphi(x) \quad (2.33)$$

Avendo ritrovato questa espressione, procediamo con i calcoli:

$$\varphi(x+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{i\hat{P}}{\hbar}\right)^k a^k \varphi(x) \frac{1}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i\hat{P}a}{\hbar}\right)^k\right) \varphi(x)$$

Ora dobbiamo osservare di esserci ricondotti ad una struttura del tipo:

$$\hat{A} \varphi(x) = \varphi(x+a)$$

e di conseguenza possiamo dire che l'operatore traslatore ha espressione:

$$\hat{T} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i\hat{P}a}{\hbar}\right)^k\right)$$

Ma non é finita perché in realtà questa espressione non é una espressione qualunque, ma ha la struttura dello sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale zero della funzione esponenziale  $e^z$  avendo posto  $z = \frac{i\hat{P}a}{\hbar}$ , e dunque in definitiva abbiamo:

$$\hat{T} = e^{\frac{i\hat{P}a}{\hbar}} \quad (2.34)$$

A questo punto vogliamo parlare del rotatore ma per poterlo fare dobbiamo introdurre un operatore che non é ancora stato definito, ossia l'operatore momento angolare. In meccanica classica il momento angolare si calcola come  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ , in meccanica quantistica troviamo l'operatore momento angolare definito come  $\hat{l} = \vec{r} \times (-i\hbar \vec{\nabla})$ :

$$\hat{l} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} (-i\hbar) \quad (2.35)$$

Dunque le componenti del momento angolare quantistico risultano essere:

$$\begin{cases} \hat{l}_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \hat{l}_y = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{l}_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{cases}$$

Sapendo che il principio di indeterminazione di Heisenberg (ma essendo dimostrato in realtà é un teorema) vale per due operatori qualunque i quali non commutano, viene spontaneo chiedersi se é possibile conoscere esattamente il momento angolare nella sua interezza. Si trova che in realtà comunque si prendano a coppie le sue componenti,

il commutatore é diverso da zero:

$$\begin{cases} [\hat{l}_x, \hat{l}_y] = \hat{l}_x \hat{l}_y - \hat{l}_y \hat{l}_x = i \hbar \hat{l}_z \\ [\hat{l}_x, \hat{l}_z] = \hat{l}_x \hat{l}_z - \hat{l}_z \hat{l}_x = i \hbar \hat{l}_y \\ [\hat{l}_y, \hat{l}_z] = \hat{l}_y \hat{l}_z - \hat{l}_z \hat{l}_y = i \hbar \hat{l}_x \end{cases}$$

Questo significa che non possiamo conoscere esattamente e contemporaneamente le tre componenti del momento angolare. Al massimo possiamo conoscere il modulo del momento angolare e una sola delle sue componenti vettoriali. Infatti:

$$\begin{aligned} \hat{l}^2 &= \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 \\ [\hat{l}^2, \hat{l}_s] &= 0 \end{aligned}$$

con  $s$  che rappresenta il generico versore degli assi. Convenzione vuole, soprattutto per questioni di semplicitá, che come set di operatori atti a descrivere il momento angolare si prendano  $\hat{l}^2$  e  $\hat{l}_z$ . Infatti si sceglie  $\hat{l}_z$  perché in coordinate polari é di espressione molto semplice rispetto agli altri (lo mostreremo in particolare applicandolo all'atomo di idrogeno). Abbiamo dunque introdotto e spiegato il momento angolare, per cui possiamo tornare indietro a spiegare il rotatore. Definiamo il rotatore attraverso la relazione:

$$R(\theta) \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha + \theta) \tag{2.36}$$

In completa analogia a quanto fatto per il traslatore, per il rotatore troviamo l'espressione:

$$R(\theta) = e^{\frac{i\theta\hat{l}}{\hbar}} \tag{2.37}$$

Una applicazione utilissima di questi operatori (traslatore e rotatore) consiste nel verificare sotto quali condizioni possono commutare con l'hamiltoniano, e per quanto detto in precedenza, se, ad esempio, il traslatore commuta con l'hamiltoniano allora applicato alla funzione d'onda presenterá lo stesso set di autofunzioni che presenta l'hamiltoniano, permettendoci di risolvere l'equazione di *Schrödinger* in maniera molto piú semplice e rapida.

### 2.5.3 Potenziale periodico

Immaginiamo di avere un potenziale periodico della forma  $U(x) = U(x + a)$ , e facciamo vedere che in questo caso il traslatore  $\hat{T}(a)$  commuta con l'hamiltoniano  $\hat{H}$ :

$$[\hat{T}(a), \hat{H}] = [\hat{T}(a), \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{U}] = [\hat{T}(a), \frac{\hat{P}^2}{2m}] + [\hat{T}(a), \hat{U}] = [e^{\frac{ia\hat{P}}{\hbar}}, \frac{\hat{P}^2}{2m}] + [e^{\frac{ia\hat{P}}{\hbar}}, \hat{U}]$$

Inoltre, moltiplicando a destra  $\varphi(x)$  e esplicitando i commutatori:

$$\begin{aligned} [\hat{T}(a), \hat{H}] \varphi(x) &= \hat{T}(a) \left( \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{U} \right) \varphi(x) - \left( \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{U} \right) \varphi(x+a) = \\ &= \left( \frac{\hat{P}^2(x+a)}{2m} - \frac{\hat{P}^2(x)}{2m} \right) \varphi(x+a) + (\hat{V}(x+a) - \hat{V}(x)) \varphi(x+a) = 0 \end{aligned}$$

In quanto i due fattori moltiplicativi della  $\varphi(x+a)$  sono entrambi nulli (abbiamo omesso alcuni passaggi banalmente riproducibili). Dunque, se  $\hat{U}(x+a) = \hat{U}(x)$  allora il traslatore e l'hamiltoniano commutano, di conseguenza

le due equazioni:

$$\begin{cases} \hat{H} \varphi(x) = E \varphi(x) \\ \hat{T}(a) \varphi'(x) = \lambda \varphi'(x) \end{cases} \quad (2.38)$$

Presentano le stesse autofunzioni, dunque  $\varphi(x) = \varphi'(x)$ .

## 2.6 Stati stazionari della funzione d'onda

Quello che si vuole mettere in evidenza in questo paragrafo é il fatto che possiamo rivedere l'equazione *Schrödinger* rispetto alla sola componente spaziale. Ciò é sempre possibile se e solo se il potenziale associato al campo di forza é stazionario, e si dice dunque che la funzione d'onda definisce uno stato stazionario. Andiamo per ordine:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = i \hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) \quad (2.39)$$

Ora, in questa situazione non é possibile decomporre la  $\psi(\vec{r}, t)$  in prodotto di  $\varphi(\vec{r})$  e  $\vartheta(t)$ , in quanto la dipendenza dal tempo del potenziale non consente di isolare ai due membri la variabilitá spaziale e quella temporale. Dunque, se  $U = U(\vec{r})$  possiamo, imponendo  $\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) \vartheta(t)$  perveniamo al seguente sistema:

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r}) \\ \frac{d}{dt} \vartheta(t) = -\frac{iE}{\hbar} \vartheta(t) \end{cases} \quad (2.40)$$

La parte temporale ha soluzione che é proporzionale a  $e^{-i\omega t}$ , dove la sua costante di integrazione viene inglobata dal prodotto  $\varphi(\vec{r}) \vartheta(t)$ . Possiamo dunque concludere che, se il potenziale é stazionario, la funzione d'onda si può esprimere come prodotto della parte spaziale e di quella temporale, dove la parte temporale può essere vista sempre la stessa forma indipendentemente dalle condizioni al contorno. Dunque, nel caso di potenziale stazionario risolvere l'equazione di *Schrödinger* significa risolvere la parte spaziale per ottenere  $\varphi(\vec{r})$  e infine moltiplicare per  $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$  per ottenere  $\psi(\vec{r}, t)$ . Ora, l'equazione spaziale di *Schrödinger* ha la forma di una equazione agli autovalori:

$$\hat{H} \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r}) \quad (2.41)$$

L'autovalore é l'energia dello stato, l'autofunzione é  $\varphi(\vec{r})$ . Ciò ha implicazioni notevoli che verranno messe in evidenza in particolare quando affronteremo la teoria degli operatori e in particolare il commutatore. Dunque, essendo  $\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$  si ha:

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \psi \psi^* = \varphi \varphi^* e^{-\frac{iE}{\hbar}t} e^{\frac{iE}{\hbar}t} = |\varphi(\vec{r})|^2 \quad (2.42)$$

⇒ Se il potenziale é stazionario la densitá di probabilitá non dipende dal tempo.

## 2.7 Equazione di continuità

Consideriamo l'equazione di *Schrödinger*:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U \psi = i \hbar \partial_t \psi$$

Vogliamo mettere in evidenza come in tale equazione sia contenuta una struttura riconducibile all'equazione di continuità, con tutte le implicazioni del caso opportunamente interpretate. Il passo iniziale consiste nel moltiplicare a sinistra ambo i membri dell'equazione per il complesso coniugato della funzione d'onda:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi + \psi^* \psi U = i \hbar \psi^* \partial_t \psi \quad (i) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \nabla^2 \psi^* + \psi^* \psi U = i \hbar \psi \partial_t \psi^* \quad (ii)$$

Sottraendo la (ii) dalla (i) si perviene eseguendo i passaggi alla seguente equazione:

$$-\frac{i\hbar}{2m} \vec{\nabla} \cdot (\psi^* \vec{\psi} - \psi \nabla \psi^*) + \partial_t (\psi^* \psi) = 0 \quad (2.43)$$

Si ponga dunque:

$$\vec{J} = (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \nabla \psi^*) \left(-\frac{i\hbar}{2m}\right) \rho = \psi^* \psi = |\psi|^2$$

Da cui:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.44)$$

Tale relazione implica la continuità spaziale e temporale per la  $\psi$  ( $|\psi|^2$ ).  $\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} d\sigma dt$  rappresenta la probabilità che la particella fluisca al di fuori del volume  $V$  attraverso la superficie  $d\sigma$  nel tempo  $dt$ .

## 2.8 Alcune soluzioni esatte dell'equazione di Schrodinger

Analizzeremo varie configurazioni speciali per il potenziale esterno (e quindi del campo di forze), confrontando di volta in volta i risultati ottenuti con la meccanica quantistica e quelli che si otterrebbero con la meccanica classica. Una delle vittorie più schiaccianti della teoria quantistica a scapito della teoria classica è il cosiddetto effetto tunnel, di cui parleremo più avanti.

### 2.8.1 Buca di potenziale infinita

Consideriamo un potenziale  $V(x)$  di espressione:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -a \leq x \leq a \\ +\infty & \text{altrove} \end{cases} \quad (2.45)$$

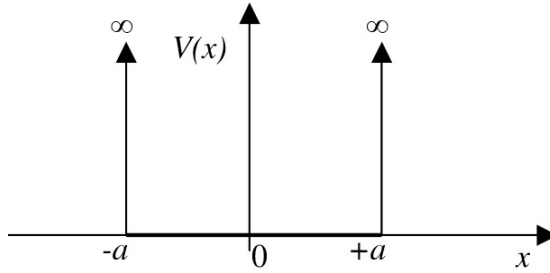
Avendo considerato un potenziale stazionario sappiamo di poterci focalizzare sulla componente spaziale della funzione d'onda.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r})$$

Che nel caso monodimensionale è:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$





**Figura 2.1:** Struttura del potenziale nella buca

All'interno della buca il potenziale é nullo, dunque la precedente equazione diviene omogenea e presenterá la seguente soluzione:

$$\varphi(x) = A \cos kx + B \sin kx \tag{2.46}$$

Avendo posto  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ . All'esterno della buca il potenziale é infinito, ma ciò significa che la particella dovrebbe avere energia infinita per  $\varphi(x) \neq 0$ . Affinché sia fisicamente coerente si deve evitare questa divergenza e imporre che la funzione d'onda si annulli per  $x \geq a$  e  $x \leq -a$ . Ciò significa che la particella ha probabilità nulla di trovarsi al di fuori della buca, non potendo superare una barriera energetica infinita. Da questo seguono le condizioni al contorno da imporre.

$$\begin{cases} \varphi(-a) = 0 = A \cos ka - B \sin ka \\ \varphi(a) = 0 = A \cos ka + B \sin ka \end{cases} \tag{2.47}$$

Escludendo la soluzione banale  $A = B = 0$  che non presenta rilevanza fisica nella situazione presa in esame, si

hanno le seguenti altre soluzioni:  $\begin{cases} A = 0 \Rightarrow \sin ka = 0 \Rightarrow ka = n\pi \Rightarrow k = \frac{N\pi}{2a} \text{ per } N \text{ pari} \\ B = 0 \Rightarrow \cos ka = 0 \Rightarrow ka = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \frac{N\pi}{2a} \text{ per } N \text{ dispari} \end{cases}$

Dove  $l = 2a$  é la lunghezza della buca. Consideriamo l'energia della particella libera

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow E_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 N^2}{2m l^2} \tag{2.48}$$

Questa relazione descrive i livelli energetici della particella all'interno della buca.

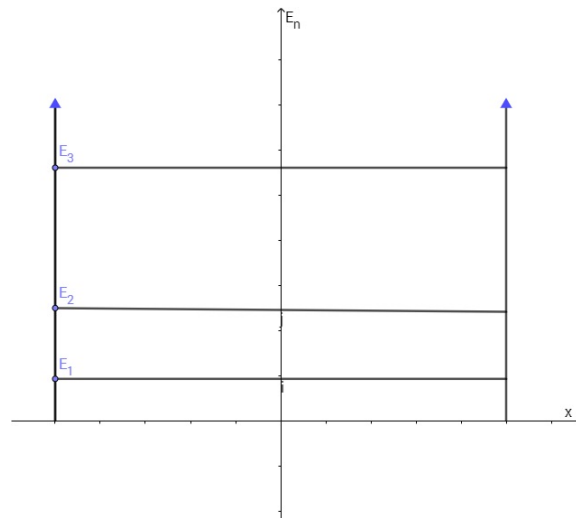
Sapendo che  $\hat{H} \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r})$ , tali livelli energetici discreti rappresentano gli autovalori dell'hamiltoniano. Rappresentiamo i livelli energetici (inserire figura). Le condizioni al contorno implicano la quantizzazione dell'energia. Le autofunzioni hanno forma:

$$\begin{cases} \varphi_N(x) = B_N \sin\left(\frac{N\pi x}{l}\right) & \text{per } N \text{ pari} \\ \varphi_N(x) = A_N \cos\left(\frac{N\pi x}{l}\right) & \text{per } N \text{ dispari} \end{cases} \tag{2.49}$$

Le costanti  $A_N$  e  $B_N$  vanno determinate imponendo la condizione di normalizzazione:

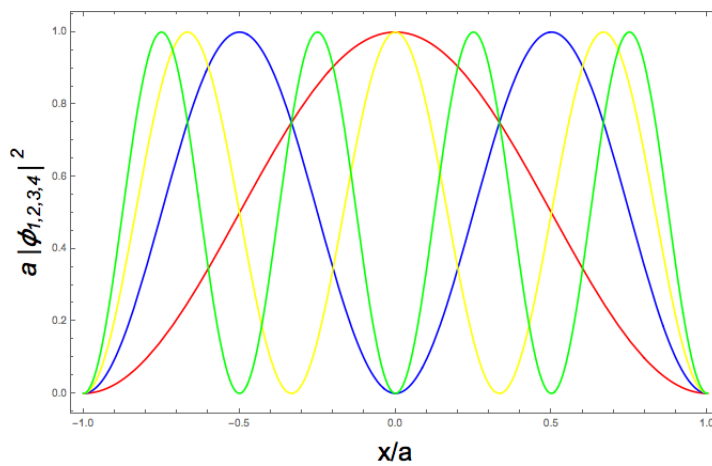
$$\int_{-a}^{+a} \varphi(x) \varphi^*(x) dx = 1 \Rightarrow A = B = \frac{1}{\sqrt{a}} \tag{2.50}$$

Le autofunzioni associate agli autovalori dell'energia, rappresentati nel grafico precedente, hanno i seguenti andamenti al variare di N: (Inserire i Grafici) É da mettere in evidenza la situazione con  $N = 2$ , per la quale la densità di probabilità é simmetrica rispetto all'origine, e proprio nell'origine é nulla. Il fatto che rispetto all'origi-



**Figura 2.2:** Livelli energetici quantizzati da n

ne abbia probabilità diversa da zero di essere trovata la particella e nell'origine invece non può essere è una chiara contrapposizione al concetto classico di traiettoria.



**Figura 2.3:** Andamenti della densità di probabilità della buca infinita. In blu abbiamo il caso per  $N = 2$

### 2.8.2 Buca di potenziale rettangolare

Sia:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{per } |x| \leq a \\ 0 & \text{per } |x| \geq a \end{cases}$$

Suddividiamo l'asse reale in 3 regioni e risolviamo l'equazione di *Schrödinger* in ognuna di esse. Nella regione intermedia la particella si comporta come libera.

- In I e III si ha:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \varphi(x) + (E - V_0) \varphi(x) = 0$$

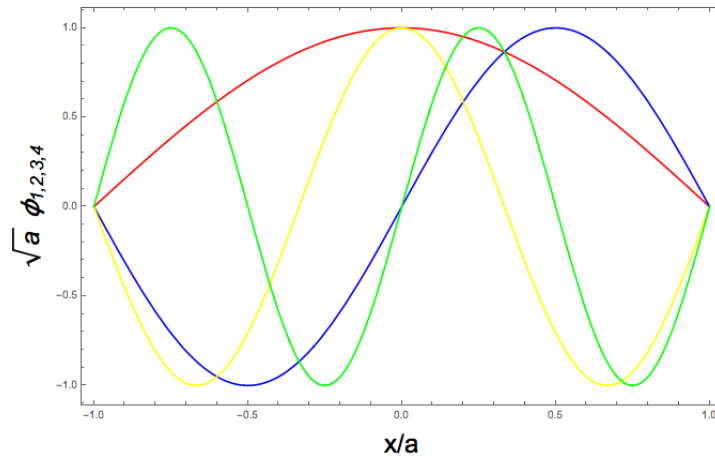


Figura 2.4: Andamenti della funzione d'onda nella buca infinita. In blu abbiamo il caso per  $N = 2$

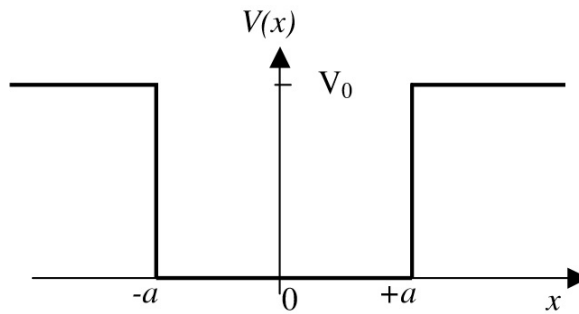


Figura 2.5: Struttura del potenziale nel caso di buca finita

- In II:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \varphi(x) + E \varphi(x) = 0$$

Le soluzioni nelle tre regioni sono:

- I:

$$\varphi(x) = A e^{iqx} + B e^{-iqx}$$

- II:

$$\varphi(x) = C e^{ikx} + D e^{-ikx}$$

- III:

$$\varphi(x) = E e^{iqx} + F e^{-iqx}$$

Con:

$$q = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \quad e \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Come condizioni al contorno bisogna imporre la continuità delle funzioni d'onda con le loro derivate prime nei

punti di discontinuità del potenziale: 
$$\begin{cases} \varphi_I(-a) = \varphi_{II}(-a) \\ \varphi_{II}(a) = \varphi_{III}(a) \\ \varphi'_I(-a) = \varphi'_{II}(-a) \\ \varphi'_{II}(a) = \varphi'_{III}(a) \end{cases}$$
 Abbiamo però 6 costanti da determinare. Osser-

viamo che affinché le funzioni d'onda soluzioni nelle regioni I e III siano quadrato sommabili devono necessariamente essere nulli, rispettivamente, B ed E. Date le condizioni al contorno dunque ora abbiamo un sistema determinato. Se si analizzasse il caso in cui l'energia della particella è minore del livello del potenziale, ritroveremmo una situazione in cui esiste una probabilità diversa da zero di trovare la particella stessa, contro ogni previsione della meccanica quantistica.

### 2.8.3 Effetto Tunnel

Consideriamo una barriera finita di potenziale:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{per } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

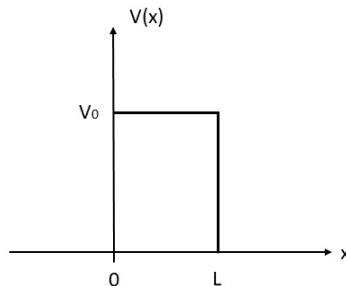


Figura 2.6: Struttura del potenziale nel caso di barriera finita

e una particella di energia  $E < V_0$ . In I e III ( $x \leq 0$  e  $L \leq x$ ) si ha:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = E \varphi(x)$$

Mentre la presenza di potenziale nella regione II ( $0 \leq x \leq L$ ) fa sì che:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V_0 \varphi(x) = E \varphi(x)$$

Le soluzioni nelle 3 regioni sono date da:

$$I : \varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$II : \varphi(x) = C e^{qx} + D e^{-qx}$$

$$III : \varphi(x) = E e^{ikx} + F e^{-ikx}$$

Con

$$\begin{cases} q = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar} \\ k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \end{cases}$$

Ora dobbiamo capire come calcolare i coefficienti. Facendo il seguente ragionamento partiamo subito col dire che  $F$  é nullo. Ma andiamo con ordine. Se il fascio di particelle avanza da sinistra verso destra nella regione  $I$  osserviamo l'onda progressiva proporzionale ad  $A$  e quella regressiva proporzionale a  $B$ , quest'ultima dovuta alla riflessione sulla barriera di potenziale  $U_0$ . Essendo  $U_0 > E$  classicamente nelle regioni  $II$  e  $III$  non si dovrebbe osservare nessuna particella, e invece  $C, D$  ed  $E$  possono essere diversi da zero. In  $II$  abbiamo esponenziali smorzati, non funzioni oscillanti, e ritroviamo un'onda progressiva  $C e^{qx - i\omega t}$  che ha attraversato la barriera in  $x = 0$  e una regressiva dovuta alla riflessione da parte della barriera in  $x = l$ . In  $III$  non possiamo che avere un'onda progressiva che si propaga nel senso delle  $x$  crescenti, e per tale ragione  $F = 0$ . Le condizioni al contorno vanno imposte anche adesso imponendo la continuità del potenziale:

$$\begin{cases} \varphi_I(0) = \varphi_{II}(0) \\ \varphi_{II}(l) = \varphi_{III}(l) \\ \varphi'_I(0) = \varphi'_{II}(0) \\ \varphi'_{II}(l) = \varphi'_{III}(l) \end{cases}$$

In questo modo abbiamo 4 equazioni in 5 incognite. Definiamo il coefficiente di trasmissione  $T$  come la ampiezza di probabilità che la particella raggiunga la regione  $III$ :

$$T = \frac{E E^*}{C C^*} \quad (2.51)$$

Dove  $E$  é l'ampiezza dell'onda in  $III$ ,  $C$  é l'ampiezza dell'onda progressiva in  $II$ . Eseguendo i calcoli si perviene alla seguente espressione per  $T$ :

$$T = \left( 1 + \frac{U_0^2 \sinh^2\left(\frac{l\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}\right)}{4E(U_0 - E)} \right)^{-1} \quad (2.52)$$

(inserire grafico) Data la definizione di  $T$  abbiamo un nuovo legame funzionale tra i coefficienti, e quindi 5 equazioni in 5 incognite

## 2.9 Problemi tridimensionali

Vogliamo ora fornire gli strumenti di approccio a problemi non monodimensionali. Ciò tornerà utile, in particolare, quando studieremo l'atomo di idrogeno introducendo le armoniche sferiche. Supponiamo un potenziale del tipo:

$$V(\vec{r}) = V_x(x) + V_y(y) + V_z(z) \quad \text{potenziale rettangolare} \quad (2.53)$$

Consideriamo l'equazione di *Schrödinger* stazionaria, dove esprimiamo la funzione d'onda come:

$$\varphi(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Attraverso banali passaggi, ponendo che sia:

$$E = E_x + E_y + E_z$$

si perviene a:

$$\begin{cases} \frac{-\hbar^2}{2m} \partial_x^2 X(x) + X(x) V_x = X(x) E_x \\ \frac{-\hbar^2}{2m} \partial_y^2 Y(y) + Y(y) V_y = Y(y) E_y \\ \frac{-\hbar^2}{2m} \partial_z^2 Z(z) + Z(z) V_z = Z(z) E_z \end{cases} \quad (2.54)$$

Se si considera una particella libera nello spazio si ha:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i^2 X_i + E_i X_i = 0$$

Che ha come soluzione:

$$X_i = A e^{i x \frac{\sqrt{2m E_i}}{\hbar}}$$

E dunque generalizzando:

$$\varphi(\vec{r}) = \prod_{j=1}^3 \varphi_j(x_j) = \frac{1}{(V)^{\frac{3}{2}}} e^{\left(\frac{i \vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right)} \quad (2.55)$$

Supponiamo ora che il potenziale sia a simmetria sferica,  $V = V(r)$ . Introducendo le coordinate polari abbiamo che il potenziale dipende solo dalla distanza. Esprimendo il laplaciano in coordinate polari e imponendo che la funzione d'onda abbia una struttura del tipo  $\varphi(r, \varphi, \vartheta) = R(r) Y(\varphi, \vartheta)$ , andiamo in un primo momento a separare la dipendenza radiale e quella angolare (svolgendo i calcoli si mette in evidenza che a un membro si riesce a isolare a sola variabilità radiale e all'altro la sola variabilità angolare, e ciò implica che le componenti radiale e angolare dell'equazione di *Schrödinger* devono essere uguali alla stessa costante  $\alpha$ .)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{\hbar^2 \alpha}{2m r^2} - V \right) R = 0 \quad (2.56)$$

Questa equazione tiene conto solo della variabilità rispetto a r. Il potenziale inoltre compare solo in questa equazione e non in quella che tiene conto della variabilità di  $\varphi$  e  $\vartheta$ . Ciò implica che l'equazione radiale, dipendendo dal potenziale, sarà diversa per ogni problema. Invece per l'equazione che tiene conto di  $\varphi$  e  $\vartheta$  si ricavano proprietà che sono indipendenti dal particolare problema in esame.

$$\frac{1}{\text{sen} \vartheta} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \text{sen} \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\text{sen} \vartheta^2 Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -\alpha \quad (2.57)$$

Questa é la componente angolare dell'equazione di *Schrödinger*. Ritenendo che  $Y(\varphi, \vartheta) = H(\vartheta) \phi(\varphi)$  scri-

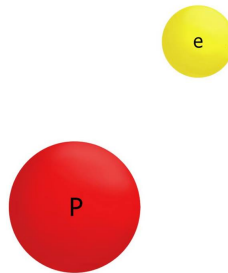
viamo le cosiddette armoniche sferiche:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left( \sin\vartheta \frac{\partial H}{\partial\vartheta} \right) + \left( \alpha - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta} \right) H = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 \varphi} + m^2 \phi = 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

Il termine  $m^2$  viene fuori, al pari di  $\alpha$ , dall'ulteriore separazione di variabili. Tali equazioni sono responsabili del momento angolare.

## 2.10 Atomo di Idrogeno

Adesso vogliamo mostrare come si risolve l'equazione di *Schrödinger* nel caso di atomo di idrogeno. Consideriamo due particelle di masse  $m_1$  e  $m_2$ , la prima dell'elettrone e la seconda del nucleo. Consideriamo di avere un potenziale indipendente dal tempo, passando dunque allo studio della sola componente spaziale della funzione d'onda, la quale dipende dalle posizioni delle due particelle,  $\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ . L'hamiltoniano per questo problema a due



**Figura 2.7:** Sistema elettrone protone. Atomo idrogenoide

corpi si scrive come:

$$\hat{H}_{op} = \frac{-\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 + \frac{-\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 - \frac{Z e^2}{r_{12}} \quad (2.59)$$

Questa forma dell'hamiltoniano porta nel termine del potenziale una dipendenza simultanea da entrambe le variabili, e ciò non permette la separazione delle stesse. Per semplificare il problema si fanno alcune posizioni:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{p} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

In questo modo la nuova espressione dell'hamiltoniano é data da:

$$\hat{H}_{op} = \frac{-\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 - \frac{Z e^2}{r} \quad (2.60)$$

con

$$M = m_1 + m_2 \text{ e } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

In questo modo abbiamo ottenuto per l'hamiltoniano una forma nella quale in un termine é isolata la dipendenza da una variabile e nell'altro termine é isolata l'altra, infatti il potenziale dipende solo da  $\vec{r}$ , posizione relativa, che adesso é una delle due variabili e non una composizione come nel caso precedente. Ció rende possibile formalmente separare le variabili con la tecnica abituale. Dunque,  $\varphi(\vec{r}, \vec{R}) = \varphi_r \varphi_R$ :

$$\begin{cases} \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 + \varphi_R E_R = 0 & (1) \\ \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \varphi_r + \left( \frac{Z e^2}{r} + E_r \right) \varphi_r = 0 & (2) \end{cases} \quad (2.61)$$

$$(1): \quad \varphi_R(\vec{R}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{(i\vec{k} \cdot \vec{R})} \quad E = \frac{(\hbar k)^2}{2M}, \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

$$\hat{P} \varphi_R(\vec{R}) = -i \hbar \vec{\nabla}_R \varphi_R(\vec{R}) = \hbar \vec{k} \varphi_R(\vec{R})$$

L'operatore momento ha un valore predeterminato, mentre la posizione é del tutto indeterminata.

(2): Si vuole effettuare una adimensionalizzazione per snellire la notazione

$$\vec{r} \Rightarrow \vec{r} = \frac{\vec{r}}{a_0} \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}$$

$$E \Rightarrow E = \frac{E}{R_y} \quad R_y = \frac{m e^4}{2 \hbar^2}$$

In questo modo l'equazione diventa:

$$-\left( \frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{Z}{r} \right) \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r})$$

Scrivendo  $\varphi(\vec{r}) = R(r) H(\vartheta) \phi(\varphi)$ , ossia affermando che la posizione relativa tra le due particelle possa comunque esprimersi in funzione della distanza dell'elettrone dal nucleo e delle variabili angolari, e ricordando l'espressione del laplaciano in coordinate polari, scriviamo, identicamente a quanto fatto per le armoniche sferiche, il seguente sistema:



$$\begin{cases} \nabla_r^2 R(r) + 2\left(\frac{Z}{r} + E\right) R(r) - \frac{l(l+1)}{2r^2} R(r) = 0 \\ \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \text{sen}\vartheta \frac{\partial H(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{\text{sen}^2\vartheta} \right) H(\vartheta) = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi(\varphi)}{\partial^2 \varphi} + m^2 \phi(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

Abbiamo ovviamente omesso molti passaggi, macchinosi e facilmente riproducibili. Per ogni fattore della  $\varphi(r, \vartheta, \varphi)$  abbiamo scritto un'equazione. Iniziamo con il commentare l'ultima del sistema. Essa ha evidentemente soluzione:

$$\phi(\varphi) = \phi_0 e^{\pm i m \varphi}$$

avendo un potenziale stazionario la densità di probabilità è funzione solo dello spazio, ed essendo  $\phi$  una funzione periodica dobbiamo imporre che:

$$\phi(\varphi) = \phi(\varphi + 2\pi)$$

Ma questo può essere vero se e solo se:

$$e^{i m 2\pi} = 1$$

e questo implica che il numero  $m$  deve necessariamente essere un numero intero. Le soluzioni accettabili non sono tutte ma solo quelle in cui  $m$  è intero. Non esistono perciò soluzioni a variabili continue, ma solo discrete. La quantizzazione, che era uno dei fatti nuovi dal punto di vista sperimentale, viene fuori come una esigenza matematica quando si impongono condizioni al contorno di natura fisica. La costante  $\phi_0$  si determina imponendo la condizione di normalizzazione:

$$\iiint_{\text{Tutto lo spazio}} \varphi^*(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV = 1$$

Ossia:

$$\int_0^{+\infty} r^2 |R(r)|^2 dr \int_0^\pi \text{sen}\vartheta |H(\vartheta)|^2 d\vartheta \int_0^{2\pi} |\phi(\varphi)|^2 d\varphi = 1$$

da cui si ottiene che:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Da adesso in poi la matematica si fa significativamente più complessa. Dobbiamo osservare che, in particolare in meccanica quantistica, spesso ci si rende conto che della matematica preesistente a determinate osservazioni fisiche risulti poi essere effettivamente un supporto per la Natura. Passiamo alla (2). Tale equazione ammette come soluzione un polinomio di Legendre:

$$H(\vartheta) = \text{sen}^{|m|} \vartheta (A_0 + A_1 \cos \vartheta + A_2 \cos^2 \vartheta + \dots) \quad (2.63)$$

Imponendo tale forma di  $H(\vartheta)$  come soluzione nella (2) si arriva a dimostrare che i coefficienti devono soddisfare una relazione di ricorrenza:

$$A_{k+2} = A_k \frac{(k + |m|)(k + |m| + 1) - l(l + 1)}{(k + 1)(k + 2)} \quad (2.64)$$

Ora dovendo essere  $H(\vartheta)$  limitata, in quanto una probabilità divergente non ha senso, ciò equivale a chiedere

che i coefficienti si annullino da un certo punto in poi. Il numeratore di  $A_{k+2}$  deve annullarsi, e ciò implica  $k + |m| = l$ , ed essendo  $k$  e  $m$  interi anche  $l$  deve essere intero. Inoltre  $k \geq 0$ ,  $m \geq 0$  implica  $l \geq 0$ . Le funzioni  $H(\vartheta)$  classificate da  $l$  sono dunque discrete.  $A_0$  e  $A_1$  si ricavano con la condizione di normalizzazione. Le soluzioni sono tabellate da  $l$  e  $m$  interi e sono:

$$H_{l,m}(\vartheta) = (-1)^{\binom{|m|-m}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \vartheta) \quad (2.65)$$

dove  $P_l^{|m|}(\cos \vartheta)$  é un polinomio di Legendre, la cui forma é:

$$P_l^{|m|}(\cos \vartheta) = (-1)^m \operatorname{sen}^{|m|} \vartheta \frac{d^{|m|} P_l(\cos \vartheta)}{d \cos^{|m|} \vartheta} \quad (\text{funzione associata di Legendre})$$

Il polinomio associato di Legendre é:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

Possiamo definire un'armonica sferica come:

$$Y_{l,m}(\omega) = H_{l,m}(\vartheta) \phi_m(\varphi) \quad (2.66)$$

che descrive la parte angolare della funzione d'onda. La parte angolare della funzione d'onda é quantizzata, ovvero dipende da due interi  $(l, m): l \geq m$ . Studiamo ora la (1) detta equazione radiale. Definiamo la funzione  $P(r) = r R(r)$ . In termini di questa nuova funzione l'equazione diventa:

$$\frac{d^2 P(r)}{dr^2} + 2 \left[ E + \frac{Z}{r} - \frac{l(l+1)}{2r^2} \right] P(r) = 0$$

la risolviamo in alcuni casi limite:

•

$$r \ll 1 \quad (\text{molto vicino al nucleo}) \quad \frac{d^2 P(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{2r^2} P(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_1 = r^{l+1} \\ P_2 = r^{-l} \end{cases}$$

Ora, se  $r$  tende a zero,  $P_2$  tende all'infinito, e quindi la soluzione che ha fisicamente senso non é questa, invece  $P_1$  tende a zero con  $r$ , in accordo con il fatto che la funzione d'onda deve essere limitata.

•

$$r \gg 1 \quad (\text{molto distante dal nucleo}) \quad \frac{d^2 P(r)}{dr^2} + 2EP(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(r) = e^{\pm r \sqrt{-2E}}$$

Se  $E > 0$  abbiamo un esponenziale con argomento immaginario, dunque una funzione oscillante. Ma se é oscillante per  $r$  che diverge non si annulla, come dovrebbe essere visto che deve tendere a zero la probabilità di trovare l'elettrone. Deve dunque essere  $E < 0$ . Inoltre per  $r$  che diverge la soluzione con il segno  $+$  tende all'infinito. In definitiva le soluzioni sono:

$$P(r) = \begin{cases} r^{l+1} & \text{se } r \ll 1 \\ e^{-r \sqrt{-2E}} & \text{se } r \gg 1 \text{ con } E < 0 \text{ (stato legato)} \end{cases}$$

Il punto é che ci risulta piú complesso risolvere direttamente la (1), e quindi cerchiamo la soluzione per via asintotica, ossia, abbiamo trovato la soluzione nei due casi limite per  $r$ , ma nel mezzo? E allora noi imponiamo che l'equazione differenziale abbia come soluzione:

$$P(r) = r^{l+1} e^{-r\sqrt{-2E}} (A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots)$$

quindi componiamo la soluzione come prodotto della stessa soluzione in due casi limite e un polinomio di *Legendre*. Nel ricavare i coefficienti  $A_k$  imponendo questa come soluzione si ottiene la seguente relazione di ricorrenza:

$$A_k = -2 A_{k-1} \frac{Z - (l+k)\sqrt{-2E}}{(l+1)(l+k+1) - l(l+1)}$$

Si dimostra che se  $A_k$  rispetta tale relazione di ricorrenza la serie infinita diverge, per  $r$  che tende all'infinito, come  $e^{2e\sqrt{-2E}}$ . Siccome  $e^{2e\sqrt{-2E}}$  diverge piú velocemente rispetto alla velocità con cui  $e^{-r\sqrt{-2E}}$  converge a zero, l'intera funzione d'onda dunque diverge. Bisogna limitare la funzione imponendo che gli  $A_k$  si annullino da un certo punto in poi:

$$Z - (l+k)\sqrt{-2E} = 0, \quad l+k = \frac{Z}{\sqrt{-2E}}$$

Chiamiamo  $l+k = n \in \mathbb{N}$ .  $k \geq 1$ , come si nota dalla relazione di ricorrenza,  $l \geq 0$ , come visto in precedenza, e quindi  $n > l$ :

$$n = 1, 2, 3, \dots; \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ed infine, essendo  $l \geq m$ :

$$m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l.$$

A breve daremo un'interpretazione di tali  $n, l$  e  $m$ . Osserviamo che possiamo generare il polinomio di *Legendre* attraverso un polinomio di *Laguerre* e la funzione Ipergeometrica confluyente. Tale ipergeometrica ha forma:

$$F(\alpha, \beta, x) = 1 + \frac{\alpha x}{\beta 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)x^2}{\beta(\beta+1)2!} + \dots \quad (2.67)$$

Si dimostra che se  $\alpha$  é intero negativo (come nel nostro caso),  $F$  si riduce a un polinomio di grado  $\alpha$ . E quindi in questo caso le soluzioni possono esprimersi in funzione del polinomio di *Laguerre*:

$$L_n^m(x) = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} e^x x^{-m} \frac{d^{(n-m)}}{dx^{(n-m)}} e^{-x} x^n \quad (2.68)$$

Dunque il polinomio di *Laguerre* può essere espresso in funzione dell'ipergeometrica:

$$L_n^m(x) = (-1)^m \frac{(n!)^2}{m!(n-m)!} F[-(n-m), m+1, x] \quad (2.69)$$

In conclusione, facendo alcuni passaggi, la parte radiale della funzione d'onda normalizzata si scrive:

$$R_{n,l}(x) = b_{n,l} \left(\frac{2Z}{na_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Z}{n}r} \left(\frac{2Zr}{n}\right)^l L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{n}\right) \quad (2.70)$$

il coefficiente  $b_{n,l}$  può essere ricavato dalla condizione di normalizzazione. Alla fine abbiamo che la funzione d'onda dipende da 3 numeri:

$$\varphi_{n,l,m}(\vec{r}) = R_{n,l}(r) Y_{l,m}(\omega) \quad (2.71)$$

con  $E_n = -\frac{Z^2}{2n^2}$ . Abbiamo dunque trovato gli autovalori e le autofunzioni associate all'hamiltoniano  $\hat{H}$  relativi all'equazione  $\hat{H}\varphi = E\varphi$ .

Il set di autofunzioni é discretizzato da n,l e m: 
$$\begin{cases} n = \text{numero quantico principale} \\ l = \text{numero quantico azimutale} \\ m = \text{numero quantico magnetico} \end{cases}$$

Abbiamo una terna di numeri che individuano lo stato quantico. Gli autovalori dipendono solo da n. Dunque c'è un problema di degenerazione relativo al fatto che stati quantici con diversi l e m possono avere le stesse energie. Ricordiamo di aver eseguito una adimensionalizzazione, e quindi:

$$E_n = \frac{-Z^2 e^4 m}{2\hbar^2 n^2} \quad (\text{dove } m \text{ qui sta per massa}) \quad (2.72)$$

Fissato n, i valori possibili per l sono n e per m sono  $2l + 1$  valori. Gli stati ad n fissati sono perciò:

$$n_g = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2$$

Lo stato quantico caratterizzato da n é  $n^2$  volte degenerare. Per  $n = 1$  non é degenerare. Per  $n = 2, l = 1$  e  $m = -1, 0, 1$ . Il numero quantico n é legato all'energia. Vediamo ora l'interpretazione di l e m che sono collegate al momento angolare. Ricordiamo quanto detto riguardo gli operatore e la commutazione delle componenti del momento angolare stesso. Di fatto non é possibile conoscere con esattezza il momento angolare di un sistema quantistico. Al massimo possiamo conoscere il modulo del momento angolare e una sola delle sue componenti vettoriali. Infatti se si esegue il commutatore tra l'operatore  $\hat{l}^2$  e una, comunque scelta, delle componenti di  $\hat{l}$  si ottiene zero. Convenzione vuole che come set di operatori atti a descrivere il momento angolare si prendano  $\hat{l}^2$  e  $\hat{l}_z$  (si sceglie  $\hat{l}_z$  perché é piú semplice in coordinate polari). Ci chiediamo ora quanto vale il momento angolare per l'atomo di idrogeno:

$$\hat{l}_x = i\hbar(\text{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \text{cotan}\vartheta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}) \quad (2.73)$$

$$\hat{l}_y = i\hbar(-\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \text{cotan}\vartheta \text{sem}\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}) \quad (2.74)$$

$$\hat{l}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} \quad (2.75)$$

e quindi

$$\hat{l}_z \varphi(r, \vartheta, \varphi) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} R_{n,l}(r) H_{l,m}(\vartheta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} = \hbar m \varphi(r, \vartheta, \varphi)$$

Possiamo dire con certezza che la componente z del momento angolare per l'elettrone dell'atomo di idrogeno vale  $\hbar m$ . Calcoliamo ora:

$$\hat{l}^2 \varphi(r, \vartheta, \varphi) = -\hbar^2 \nabla_\omega^2 R_{n,l}(r) Y_{l,m}(\omega) = -\hbar^2 R_{n,l}(r) \nabla_\omega^2 Y_{l,m}(\omega)$$

E quindi siccome la parte radiale non gioca alcun ruolo da questo punto di vista:

$$\hat{l}^2 Y_{l,m} = \hbar^2 (l + 1) l Y_{l,m}$$

Si puó dunque affermare che il modulo del momento angolare é dato da  $\hbar\sqrt{(l + 1)l}$ . Dunque, il numero quantico

$m$  definisce la componente di  $\hat{l}$  lungo una certa direzione, il numero quantico  $l$  definisce il modulo di  $\hat{l}$ . Il momento angolare non può variare con continuità, ma può dunque assumere solo valori discreti. Per  $n = 1$ ,  $l = 0$ , e a  $l = 0$  il modulo del momento angolare è nullo e si associa alla  $|\varphi(\vec{r})|^2$  simmetria sferica.

$$n = 1 \quad l = 0 \quad |\vec{l}| = 0$$

$$n = 2 \quad l = 0, 1 \quad |\vec{l}| = 0, \hbar\sqrt{2}$$

$n = 3 \quad l = 0, 1, 2 \quad |\vec{l}| = 0, \hbar\sqrt{2}, \hbar\sqrt{6}$  Non solo la lunghezza, ma anche la direzione di  $\vec{l}$  è quantizzata perché lo è  $l_z$ . Se  $l = 1$  allora  $m = 1, 0, -1$ , e ciò implica che  $\vec{l}$  non può mai essere orientato esattamente su uno degli assi. Se lo fosse una componente coinciderebbe esattamente con il vettore, e quindi le altre 2 sarebbero esattamente nulle, contro Heisenberg. Vediamo inoltre che:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \nabla_\omega^2 + U(r)$$

si ha

$$[\hat{H}, \hat{l}^2] = 0 \quad ; \quad [\hat{H}, \hat{l}_z] = 0$$

e questo perché  $\nabla_r$  è un operatore che agisce solo su  $r$ , mentre  $\hat{l}^2$  solo su  $\omega$ . Inoltre  $-\frac{\hbar^2}{2m r^2} \nabla_\omega^2 = \frac{1}{2m r^2} \hat{l}^2$ , e un operatore commuta con se stesso. Infine il potenziale dipende solo da  $r$ , essendo in un campo di forze centrale. Discorso analogo per  $[\hat{H}, \hat{l}_z] = 0$ . In spettroscopia gli stati al variare di  $l$  si indicano come segue:

- $l=0$  si indica con S
  
- $l=1$  si indica con P
  
- $l=2$  si indica con d
  
- $l=3$  si indica con f

Dagli esperimenti è stato osservato che non tutte le transizioni si verificano. Per giustificare questo fatto si era ricavata una regola di selezione secondo la quale se un elettrone si trova in uno stato quantico  $(n, l, m)$  e passa a  $(n', l', m')$  le uniche transizioni permesse sono quelle per cui avviene:

$$\Delta l = l' - l = \pm 1; \Delta m = m' - m = 0 \pm 1.$$

Queste regole vengono fuori come una conseguenza naturale della teoria quantistica. Noto lo stato quantico iniziale e quello finale si può conoscere la probabilità di transizione. Se si effettua esplicitamente il calcolo si trova che devono essere rispettate le regole precedentemente scritte. Non esiste alcuna condizione da rispettare su  $n$ . L'energia non dipende da  $m$  perché implicherebbe una dipendenza dalla direzione, ma in un campo di forze coulombiano non esistono direzioni privilegiate e quindi  $E$  non dipende da  $\vec{l}$ . La probabilità di transizione si calcola integrando in tutto lo spazio la funzione d'onda complessa coniugata dello stato iniziale per la funzione d'onda dello stato finale.

## 2.11 Spin

I livelli energetici nell'atomo di idrogeno risolto con l'equazione di *Schrödinger* sono definiti dall'espressione:

$$E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{2 \hbar^2 n^2} = \frac{C}{n^2}$$

Ora per  $n = 1$  abbiamo lo stato fondamentale  $\varphi_{1,0,0}$ , dove dovremmo osservare un solo elettrone e il nucleo. A  $n = 1$  corrisponde la minima distanza media dell'elettrone dal nucleo, quindi la minima energia, ma perché gli altri elettroni non ricadono dopo un pó nello stato fondamentale? Che é appunto quello che si evince dalla teoria e da riprove sperimentali attraverso l'analisi spettroscopica. Di fatto, la logica classica imporrebbe proprio questa situazione, ma tale logica imporrebbe anche che l'elettrone in  $1S$  debba collassare sul nucleo, cosa che non accade. Il fatto é che noi immaginiamo in maniera intuitiva gli elettroni che orbitano intorno al nucleo come un micro sistema planetario, e la Fisica Classica ci dice che un elettrone accelerato (ció che sarebbe di fatto in un tale sistema) deve emettere energia nella forma di onde elettromagnetiche, e di conseguenza dovrebbe spiraleggiare fino a collassare sul nucleo, e la teoria ci dice che questo dovrebbe avvenire nel giro di pochi microsecondi. Ma questo in effetti non succede, e la ragione sta nel fatto che é sbagliato cercare di visualizzare in questo modo l'elettrone, cioé come una particella che orbita attorno al nucleo, senza tenere conto del fatto che in realá l'elettrone stesso esibisce proprietá di onda. E' tale dualismo la causa. In un primo momento comunque, per spiegare ció, si pensó che due elettroni tutti con gli stessi numeri quantici non possono condividere lo stesso livello energetico. Ma poi si osservó che nello stato fondamentale dell'elio era possibile trovare due elettroni. Questa osservazione sui numeri quantici diversi a volte funzionava e altre no. Questo effetto inoltre non era previsto dall'equazione di *Schrödinger*. Sono state queste le osservazioni che per spiegare i risultati sperimentali portarono a parlare di spin. Gli elettroni devono avere a questo punto un'altra proprietá intrinseca, oltre la massa e la carica, la quale come vedremo sará chiamata spin e comporterá il passaggio da  $n^2$  a  $2n^2$  livelli di degenerazione. Analizziamo brevemente la situazione sperimentale. La spettroscopia consente di analizzare le righe spettrali impresse su uno schermo da un'onda elettromagnetica. Di fatto la riga spettrale é la prova che c' é stata l'emissione di un'onda elettromagnetica, che per un atomo, in accordo con l'ipotesi di *Bohr*, deve significare che un elettrone ha transitato da un livello energetico piú alto verso uno piú basso, e analizzando la distanza tra le righe spettrali é possibile risalire alla lunghezza dell'onda, dunque alla sua frequenza e di conseguenza all'energia ( $E = \hbar 2\pi f$ ), quindi al salto energetico fatto dall'elettrone. Quando le misure divennero sufficientemente accurate gli sperimentatori si resero conto che in realá alcune bande non erano singole ma bensí composte da sotto bande molto vicine tra loro. Questa struttura prende il nome di struttura fine. Tale fatto però non trova giustificazione nell'equazione di *Schrödinger* come dipendente solo da  $n$ . Si pensó dunque a una dipendenza da  $l$ , visto che non può comunque dipendere da  $m$ . L'unica spiegazione plausibile sembra essere che tale equazione non é scritta tenendo conto degli effetti relativistici, ma gli elettroni si muovono intorno al nucleo con una velocitá nell'ordine di  $c/100$ , e quindi a questo punto sembra palese dover dare una correzione relativistica. Dunque, l'equazione di *Schrödinger* non prevedeva due elettroni nello stato fondamentale, cosa che invece si verificava e non prevedeva nell'energia una dipendenza da  $l$ , che sembra essere l'unica spiegazione plausibile per spiegare la struttura fine dell'elio (che era l'oggetto di sperimentazione all'epoca). Non siamo ancora, in questa fase, all'equazione di Dirac, ma si arrivó comunque a una correzione semiempirica di *Schrödinger* nel caso relativistico. L'hamiltoniano in questo caso può essere scritto nel seguente modo:

$$\hat{H} = m c^2 \sqrt{1 + \frac{\hat{P} \cdot \hat{P}}{m^2 c^2}} + U \quad (2.76)$$

A seguito di questa correzione si arrivò a scrivere un'equazione per i livelli energetici in cui effettivamente compariva una dipendenza da  $l$ , molto lieve, in accordo con la situazione sperimentale:

$$E_{n,l} = \quad (2.77)$$

Dunque, quando sono ad esempio a  $n = 3$ , si hanno:  $l = 0, 1, 2; m = -2, -1, 0, 1, 2$ . E quindi:  $\varphi_{1,0,0}; \varphi_{2,0,0}; \varphi_{2,1,1}; \varphi_{2,1,-1}; \varphi_{3,1,1}; \varphi_{3,1,-1}; \varphi_{3,2,2}; \varphi_{3,3,-2}$ .

Gli esperimenti trovarono appunto una transizione tra gli stati a parità di  $n$  con una lievissima emissione di energia, come a indicare appunto una  $E$  anche da  $l$ , cosa che risulta nella correzione relativistica. Ora resta da spiegare perché nello stato fondamentale dell'elio si potevano osservare due elettroni e non di più, e inoltre anche così bisognava dare una spiegazione alla struttura fine che si osservava a parità di  $n, l$  e  $m$ . Analizzando il diagramma dei livelli energetici dell'elio si osservano due sistemi distinti, e inoltre a parità di  $n$  e  $l$  si potevano osservare anche differenze di energia. La correzione relativistica data in precedenza prevedeva una dipendenza  $E(n, l)$  mentre gli esperimenti mostravano una dipendenza  $E(n, l, j)$  dove  $j$  è un parametro che deve ancora essere interpretato. Si ottengono inoltre, sperimentalmente, le seguenti regole di selezione:

$$\Delta l = \pm 1; \Delta j = 0, \pm 1$$

La spiegazione a questo tipo di struttura fine dell'atomo di elio venne data nel 1926 da *Uhlenbeck* e *Goudsmit*. Essi ipotizzarono l'esistenza, accanto al momento angolare orbitale, di un momento angolare intrinseco dell'elettrone. Tale momento angolare intrinseco, chiamato spin, venne interpretato, dai suoi scopritori, come dovuto a una rotazione dell'elettrone su se stesso, ammettendo una sua estensione spaziale. La corrente interpretazione dello spin dell'elettrone è quella di proprietà intrinseca della particella, proprietà che si manifesta nell'interazione con altre particelle. Per interpretare i risultati spettroscopici, *Uhlenbeck* e *Goudsmit* introdussero i seguenti postulati:

- Lo spin  $\vec{S}$  è un vettore ed ha le dimensioni di un momento angolare;
- Al momento angolare di spin  $S$  dell'elettrone è associato un momento magnetico intrinseco avente direzione opposta a  $\vec{S}$ , in accordo con il segno negativo della carica;
- Al vettore spin  $\vec{S}$  dell'elettrone viene associato il numero quantico  $S = \frac{1}{2}$ .

Il vettore spin, avendo le dimensioni di un momento angolare, soddisfa le regole dei momenti angolari in meccanica quantistica: all'operatore  $\hat{S}$  corrispondono i seguenti autovalori:

$$\hat{S} \begin{cases} \hat{S}^2 \Rightarrow s(s+1)\hbar^2 \\ \hat{S}_z \Rightarrow \pm s\hbar \end{cases}$$

Dove il segno  $\pm$  corrisponde alle due possibili orientazioni dello spin: orientamento positivo (spin up) e orientamento negativo (spin down). Possiamo parlare dunque di momento angolare totale dell'elettrone:

$$\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$$

dove  $\hat{l}$  é il momento angolare orbitale e  $\hat{s}$  é lo spin. Per concludere la nostra trattazione sullo spin apriamo una parentesi sulla legge di composizione dei momenti angolari in meccanica quantistica:

$$\hat{L} = \hat{l}_1 + \hat{l}_2$$

come si calcolano gli autovalori associati a  $\hat{L}$ , momento angolare risultante? Dato che  $\hat{l}_1$  e  $\hat{l}_2$  rispettano separatamente le regole della meccanica quantistica si ha:

$$\hat{l}_1 \begin{cases} \hat{l}_1^2 \Rightarrow l_1 \hbar^2 (l_1 + 1), l_1 = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \\ \hat{l}_{1z} \Rightarrow \hbar m_1, m_1 = l_1, l_1 - 1, \dots, 0, \dots, -l_1 \end{cases}$$

idem per  $\hat{l}_2$ . Dunque per  $\hat{L}$  abbiamo:

$$\hat{L} \begin{cases} \hat{L}^2 \Rightarrow L \hbar^2 (L + 1), L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2| \\ \hat{L}_z \Rightarrow M \hbar, M = L, L - 1, \dots, -L \end{cases}$$

Tornando al singolo elettrone avente momento angolare totale  $\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$ :

$$\hat{j} \begin{cases} \hat{j}^2 \Rightarrow j \hbar^2 (j + 1), j = l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2} \\ \hat{j}_z \Rightarrow m_j \hbar, m_j = j, j - 1, \dots, -j \end{cases}$$

I vettori  $\vec{s}$  e  $\vec{l}$  non possono essere orientati in maniera arbitraria, ma devono farlo in modo che tale sistema sia rispettato. Concludiamo dicendo che l'aver introdotto questo nuovo numero quantico  $s$ , che per l'elettrone vale  $\frac{1}{2}$ , porta a raddoppiare i livelli di degenerazione e si passa appunto da  $n^2$  a  $2n^2$ . Avendo introdotto lo spin come quarto numero quantico possiamo enunciare la forma finale del principio di esclusione di Pauli:

”In un sistema di due o piu' elettroni non possono coesistere due elettroni caratterizzati dagli stessi numeri quantici”.

La funzione d'onda dunque deve dipendere anche dallo spin, il quale essendo un vettore, porta a parlare di dipendenza dalle coordinate di spin:

$$\varphi(\vec{r}) \Rightarrow \varphi(\vec{r}, \vec{s})$$



## Capitolo 3

# Elementi di relatività speciale

Con questo ulteriore capitolo andiamo a mostrare come superare l'altro limite della meccanica classica, ossia il *troppo veloce*. Per la descrizione dei processi che avvengono nella natura occorre un sistema di riferimento. Con sistema di riferimento si intende l'insieme di un sistema di coordinate, che serve a determinare la posizione delle particelle nello spazio, e di un orologio per indicare il tempo legato al sistema stesso. Esistono sistemi di riferimento nei quali il moto libero dei corpi, cioè il moto dei corpi non sottoposti all'azione di forze esterne, avviene a velocità costante. Tali sistemi di riferimento sono detti inerziali. Se due sistemi di riferimento si trovano l'uno rispetto all'altro in moto traslatorio uniforme e se uno di essi è inerziale, è evidente che è inerziale anche il secondo (ogni moto libero anche in questo sistema sarà rettilineo uniforme). Esiste quindi un numero arbitrario di sistemi di riferimento inerziali, che si trovano l'uno rispetto all'altro in moto traslatorio uniforme. L'esperienza dimostra la validità del cosiddetto *principio di relatività*. Secondo questo principio tutte le leggi della Natura sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali. In altri termini, le equazioni che esprimono le leggi della natura sono invarianti rispetto alle trasformazioni delle coordinate e del tempo, corrispondenti ad un cambiamento di riferimento inerziale. Ciò significa che l'equazione descrivente una legge della Natura, espressa mediante le coordinate e il tempo, ha la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. L'interazione di particelle materiali viene descritta in meccanica classica mediante l'energia potenziale d'interazione, la quale è una funzione delle coordinate delle particelle interagenti. È facile vedere che questo metodo di descrizione presuppone valida l'ipotesi che le interazioni si propaghino istantaneamente. Infatti, secondo questa descrizione, le forze che le altre particelle esercitano su una particella data dipendono, in ogni istante di tempo, soltanto dalla posizione delle particelle in questo stesso istante. Il cambiamento della posizione di qualsiasi particella interagente si riflette istantaneamente sulle altre particelle. L'esperienza mostra, tuttavia, che non esistono nella natura interazioni istantanee. Per questa ragione, la meccanica, che parte dall'ipotesi della propagazione istantanea delle interazioni, contiene una certa imprecisione. In realtà, se uno dei corpi interagenti subisce qualche cambiamento, la ripercussione su un altro corpo del sistema si produrrà dopo un certo intervallo di tempo. Soltanto alla fine di questo intervallo di tempo il secondo corpo subirà processi dovuti a questo cambiamento. Dividendo la distanza tra i due corpi interagenti per questo intervallo di tempo, troviamo la << *velocità di propagazione delle interazioni* >>. Notiamo che questa velocità si potrebbe più propriamente chiamare velocità massima di propagazione delle interazioni. Essa determina soltanto quell'intervallo di tempo necessario affinché il cambiamento subito da un corpo cominci a manifestarsi su un altro corpo. È evidente che l'esistenza di una velocità massima di propagazione delle interazioni significa anche che non può esistere nella natura un moto con velocità superiore a questa. In effetti, se tale moto potesse aver luogo, lo si potrebbe utilizzare per realizzare una interazione con velocità superiore alla velocità massima di propagazione delle interazioni. Dell'interazione, che si propaga da una particella all'altra, si parla spesso come di un << *segnale* >> emesso dall'una per << *informare* >> l'altra circa un cambiamento da essa su-

bito. Si parla allora della velocità di propagazione delle interazioni come della  $\langle\langle \textit{velocità di un segnale} \rangle\rangle$ . Dal principio di relatività segue, in particolare, che la velocità di propagazione delle interazioni è la stessa in tutti i sistemi inerziali di riferimento. La velocità di propagazione delle interazioni è quindi una costante universale. Come si vedrà, questa velocità costante è anche la velocità di propagazione della luce nel vuoto; per questo la chiameremo *velocità della luce*. Essa viene indicata di solito con la lettera  $c$ , e il suo valore numerico è:

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \frac{cm}{s}$$

Il valore di elevato di questa velocità spiega il fatto che nella maggioranza dei casi la meccanica classica è in pratica sufficientemente precisa. Le velocità con le quali abbiamo generalmente a che fare sono talmente piccole rispetto a  $c$ , che la precisione dei risultati praticamente non viene alterata se supponiamo la velocità della luce infinita. Il principio di relatività, insieme al postulato dell'esistenza di una velocità limite di propagazione delle interazioni, è chiamato *principio di relatività di Einstein* (fu enunciato da Einstein nel 1905); ricordiamo qui che il principio di relatività di Galilei considera infinita la velocità di propagazione delle interazioni. La meccanica basata sul principio di relatività di Einstein (lo chiameremo semplicemente principio di relatività) è detta relativistica. Nel caso limite in cui le velocità dei corpi sono trascurabili rispetto a quella della luce, si può trascurare l'effetto di una velocità limite di propagazione delle interazioni sul moto. La meccanica relativistica coincide allora con la meccanica ordinaria che parte dall'ipotesi che la propagazione delle interazioni sia istantanea; questa meccanica si chiama newtoniana o classica. Il passo limite della meccanica relativistica alla meccanica classica può essere effettuato formalmente ponendo nelle formule della meccanica relativistica  $c \Rightarrow +\infty$ . Già in meccanica classica lo spazio è relativo, cioè le relazioni spaziali tra differenti eventi dipendono soltanto dal sistema di riferimento nel quale vengono descritti. L'asserzione che due eventi avvengono a istanti diversi in uno stesso punto dello spazio, o in generale, a una determinata distanza l'uno dall'altro, acquista un senso soltanto se è indicato il sistema di riferimento al quale questa asserzione si riferisce. Il tempo in meccanica classica è invece assoluto; in altri termini, si suppone che le proprietà del tempo non dipendano dal sistema di riferimento. Ciò significa che se due eventi arbitrari sono simultanei per un osservatore, essi sono simultanei per ogni altro osservatore. In generale, l'intervallo di tempo tra due eventi dati deve essere identico in tutti i sistemi di riferimento. È facile a questo punto convincersi quanto sia profonda la contraddizione tra il concetto di tempo assoluto e il principio einsteiniano di relatività. È sufficiente ricordare a questo proposito che in meccanica classica, fondata sul concetto di tempo assoluto, è valida la legge universalmente nota di composizione delle velocità secondo la quale la velocità di un moto composto è semplicemente uguale alla somma (vettoriale) delle velocità componenti. Essendo universale, questa legge dovrebbe essere applicabile anche alla propagazione delle interazioni. Risulterebbe allora che la velocità di propagazione in diversi sistemi di riferimento deve essere diversa, ciò che è in disaccordo con il principio di relatività. L'esperienza però conferma interamente sotto questo aspetto il principio di relatività. Le misure eseguite per la prima volta da *Michelson* rivelarono la totale indipendenza della velocità della luce dalla direzione della sua propagazione; secondo i postulati della meccanica classica, la velocità della luce nel verso della traslazione della Terra dovrebbe essere differente dalla velocità nel verso opposto. Così, il principio di relatività conduce a risultati secondo i quali il tempo non è assoluto. Il tempo scorre diversamente in diversi sistemi di riferimento. Di conseguenza, l'asserzione che due eventi dati sono separati da un intervallo di tempo determinato acquista un significato solo se è indicato il sistema di riferimento al quale si riferisce questa asserzione. In particolare, gli eventi simultanei in un certo sistema di riferimento non lo saranno in un altro sistema. Per illustrare questo fatto, facciamo un esempio semplice. Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali  $K$  e  $K'$  con rispettivi assi coordinati  $xyz$  e  $x'y'z'$ ; il sistema inerziale  $K'$  si sposta rispetto al sistema  $K$  verso destra lungo gli assi  $x$  e  $x'$  (figura). Supponiamo che un punto  $A$  sull'asse  $x'$  vengano emessi segnali in due direzioni opposte. Siccome la velocità di propagazione del segnale nel sistema  $K'$ , come in qualsiasi altro sistema inerziale, è la stessa in ambedue le direzioni ed è uguale a  $c$ , i segnali giungeranno nei punti  $B$  e  $C$  equidistanti da  $A$  in uno stesso istante (nel sistema

$K'$ ). Tuttavia, é facile vedere che questi due eventi (arrivo del segnale in  $B$  e  $C$ ) non saranno affatto simultanei per un osservatore che si trovi nel sistema  $K$ . In effetti, la velocità dei segnali relativamente al sistema  $K$ , in accordo con il principio di relatività, é sempre uguale a  $c$ , e poiché il punto  $B$  si muove (relativamente al sistema  $K$ ) incontro al segnale emesso, mentre il punto  $C$  si allontana dal segnale (emesso da  $A$  verso  $C$ ), nel sistema  $K$  il segnale arriverá prima nel punto  $B$  e poi nel punto  $C$ . Quindi il principio di relatività di Einstein introduce cambiamenti fondamentali nei concetti principali della fisica. I concetti di spazio e di tempo che abbiamo appreso dall'esperienza di tutti i giorni sono approssimativi poiché nella vita comune noi abbiamo a che fare soltanto con velocità molto piccole rispetto alla velocità della luce.

### 3.1 Intervallo

Useremo spesso in seguito il concetto di evento. Un evento é definito dal punto e dall'istante in cui avviene. Un evento relativo ad una particella materiale é quindi determinato dalle tre coordinate di questa particella e dall'istante in cui esso si é verificato. Per ragioni di chiarezza, é talvolta comodo utilizzare un immaginario spazio quadridimensionale sui cui assi si pongono le tre coordinate spaziali e il tempo. In questo spazio un evento sará rappresentato da un punto. Tali punti sono detti *punti d'universo*. A ogni particella corrisponde una certa linea (*linea d'universo*) in questo spazio quadridimensionale. I punti di questa linea definiscono le coordinate della particella in tutti gli istanti. Una particella materiale in moto rettilineo uniforme ha per linea d'universo una retta. Traduciamo ora il principio d'invarianza delle velocità della luce in linguaggio matematico. A tale scopo consideriamo due sistemi di riferimento  $K$  e  $K'$  che si muovono l'uno rispetto all'altro con velocità costante. Scegliamo gli assi coordinati in modo tale che gli assi  $x$  e  $x'$  coincidano, e gli assi  $y$  e  $z$  siano paralleli agli assi  $y'$  e  $z'$ ; indichiamo con  $t$  e  $t'$  il tempo rispettivamente nei sistemi  $K$  e  $K'$ . Supponiamo che il primo evento consista nell'emissione di un segnale che si propaga alla velocità della luce da un punto con coordinate  $(x_1, y_1, z_1)$  all'istante  $t_1$  nel sistema di riferimento  $K$ . Osserveremo la propagazione di questo segnale dal sistema  $K$ . Supponiamo che il secondo evento consista nell'arrivo del segnale nel punto  $(x_2, y_2, z_2)$  all'istante  $t_2$ . La velocità di propagazione del segnale é  $c$  e, di conseguenza, il cammino percorso é uguale a  $c(t_2 - t_1)$ . D'altra parte questa stessa distanza é  $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$ . Quindi in  $K$  scriviamo:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$$

Gli stessi eventi, ossia la propagazione del segnale, si possono osservare anche dal sistema  $K'$ . Siano  $(t'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$  le coordinate del primo evento nel sistema  $K'$ , e  $(t'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$  quelle del secondo evento. Essendo la velocità della luce la stessa in  $K$  e  $K'$ , abbiamo una relazione analoga alla precedente:

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0$$

Se  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  sono le coordinate di due eventi arbitrari, la grandezza:

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (3.1)$$

si chiama *intervallo* tra questi due eventi. Dall'invarianza della velocità della luce segue che se l'intervallo di due eventi é nullo in un sistema di riferimento, esso sará nullo in qualsiasi altro sistema. Se due eventi sono infinitamente vicini, il loro intervallo si scrive:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.2)$$

La forma che assume *l'intervallo* permette di considerarlo dal punto di vista matematico formale come la distanza tra due punti in un immaginario spazio quadridimensionale (sui cui assi poniamo  $x, y, z$  e il prodotto  $ct$ ). Esiste, tuttavia, una differenza sostanziale tra l'espressione corrispondente nella geometria ordinaria: il quadrato dell'intervallo si ottiene sommando i quadrati delle differenze delle coordinate rispetto ai diversi assi con segni diversi anziché uguali. Come abbiamo accennato sopra, se  $ds = 0$  in un sistema di riferimento inerziale, si ha  $ds' = 0$  anche in un altro sistema. D'altra parte,  $ds$  e  $ds'$  sono infinitesimi dello stesso ordine. a queste considerazioni segue che  $ds^2$  e  $ds'^2$  debbono essere proporzionali:

$$ds^2 = a ds'^2$$

dove il coefficiente  $a$  può dipendere solamente dal valore assoluto della velocità relativa dei due sistemi inerziali. Esso non può dipendere dalle coordinate e dal tempo; in caso contrario i differenti punti dello spazio e del tempo non sarebbero più equivalenti, cosa che è in disaccordo con l'uniformità dello spazio e del tempo. Esso non può dipendere neppure dalla direzione della velocità relativa perché ciò sarebbe in contraddizione con l'isotropia dello spazio. Consideriamo ora tre sistemi di riferimento  $K, K_1$  e  $K_2$  e supponiamo che  $V_1$  e  $V_2$  siano le velocità del moto di  $K_1$  e  $K_2$  rispetto a  $K$ . Abbiamo allora:

$$ds^2 = a(V_1) ds_1^2, \quad ds^2 = a(V_2) ds_2^2.$$

Per la stessa ragione possiamo scrivere:

$$ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2.$$

Dove  $V_{12}$  è il valore assoluto della velocità di  $K_2$  rispetto a  $K_1$ . Confrontando queste relazioni, otteniamo:

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}) \quad (3.3)$$

La grandezza  $V_{12}$  dipende non soltanto dai valori assoluti dei vettori  $V_1$  e  $V_2$ , a anche dall'angolo che essi formano. Questo angolo non entra affatto nel primo membro della precedente equazione. Ne segue dunque che questa relazione può essere valida soltanto se la funzione  $a(V)$  si riduce ad una costante, uguale a 1, come risulta dalla stessa relazione. Abbiamo dunque:

$$ds^2 = ds'^2$$

e dall'uguaglianza di intervalli infinitesimi segue l'uguaglianza anche di intervalli finiti:  $s = s'$ . Abbiamo così ottenuto un risultato di estrema importanza: l'intervallo fra due eventi è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali, cioè è un invariante rispetto alla trasformazione di un sistema di riferimento inerziale in un qualsiasi altro. Questa invarianza è dunque l'espressione matematica della costanza della velocità della luce. Supponiamo ancora che  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  siano le coordinate di due eventi in un sistema di riferimento  $K$ . Si domanda se esiste un sistema di riferimento  $K'$  nel quale questi due eventi coincidono nello spazio. Poniamo:

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Il quadrato dell'intervallo tra gli eventi nei sistemi  $K$  e  $K'$  sono, rispettivamente:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2, \quad s'_{12}^2 = c^2 t'_{12}^2 - l'_{12}^2$$

E, in virtù dell'invarianza dell'intervallo:

$$l_{12}^2 = l'_{12}^2.$$

Vogliamo che nel sistema  $K'$  i due eventi abbiano luogo nello stesso punto, cioè  $l'_{12} = 0$ . Allora:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Di conseguenza, il sistema cercato esiste se  $s_{12}^2 > 0$ , cioè se l'intervallo fra i due eventi é reale. Gli intervalli reali sono detti del *genere tempo*. Se l'intervallo tra due eventi é del genere tempo, esiste allora un sistema di riferimento nel quale i due eventi sono avvenuti in uno stesso punto. Il tempo trascorso tra questi due eventi in questo sistema é:

$$t'_{12} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}.$$

Quando i due eventi sono relativi allo stesso corpo, il loro intervallo é sempre del genere tempo. In effetti, lo spazio percorso dal corpo tra i due eventi non può essere superiore a  $ct_{12}$ , non potendo la velocità del corpo superare  $c$ . Quindi si ha sempre:

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Vediamo ora se é possibile trovare un sistema di riferimento tale che i due eventi siano simultanei. Come nel caso precedente per i sistemi  $K$  e  $K'$  si ha:  $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$ . Vogliamo che  $t'_{12} = 0$ , quindi:

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

Di conseguenza il sistema cercato può essere trovato solo nel caso in cui l'intervallo  $s_{12}$  tra i due eventi é immaginario. Gli intervalli immaginari sono detti del *genere spazio*. In tal modo, se l'intervallo tra i due eventi é del genere spazio, esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi sono simultanei. La distanza tra i punti dove questi eventi hanno avuto luogo in questo sistema é:

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = i s_{12}. \quad (3.4)$$

La classificazione in intervalli del genere tempo e spazio é, in virtù della loro invarianza, un concetto assoluto. Ciò significa (figura) che le proprietà di un intervallo di essere del genere tempo o spazio non dipende dal sistema di riferimento. Prendiamo un evento qualunque, chiamiamolo evento O, come origine del tempo e delle coordinate spaziali. In altri termini, il punto d'universo O sarà l'origine delle coordinate nel sistema quadridimensionale sui cui assi poniamo  $(x, y, z, t)$ . Vediamo ora quali sono le relazioni del dato evento O con tutti gli altri eventi. Per fissare le idee, prendiamo una sola coordinata spaziale e il tempo ponendoli sui due assi. Il moto rettilineo uniforme di una particella che passa per  $x = 0$  e  $t = 0$  sarà rappresentato da una retta passante per O e formante con l'asse delle  $t$  un angolo la cui tangente é uguale alla velocità della particella. Essendo  $c$  la più grande velocità possibile, esiste allora un angolo massimo che questa retta può formare con l'asse delle  $t$ . Nella figura sono tracciate due rette che rappresentano la propagazione di due segnali (alla velocità della luce) in due direzioni opposte passanti per l'evento O. Tutte le rette rappresentanti il moto di particelle possono trovarsi soltanto all'interno delle regioni  $aOc$  e  $dOb$ . Sulle rette  $ab$  e  $cd$  abbiamo, evidentemente,  $x = \pm ct$ . Consideriamo dapprima eventi i cui punti d'universo si trovano all'interno della regione  $aOc$ . É facile vedere che in tutti i punti di questa regione  $c^2 t^2 - x^2 > 0$ . In altre parole, gli intervalli tra un qualsiasi evento di questa regione e l'evento O sono del *genere tempo*. Essendo in questa regione  $t > 0$ , tutti gli eventi in essa avvengono << dopo >> l'evento O. Due eventi separati da un intervallo del *genere tempo* non possono essere simultanei in alcun sistema di riferimento. Di conseguenza, non é neppure possibile trovare un sistema di riferimento dove qualche evento della regione  $aOc$  avvenga << prima >> dell'evento O, cioè che si abbia  $t < 0$ . In tal modo, tutti gli eventi della regione  $aOc$  sono posteriori a O, a prescindere dal sistema di riferimento. Questa regione può quindi essere chiamata regione del << futuro assoluto >> rispetto all'evento O. Analogamente, tutti gli eventi della regione  $bOd$  sono nel

$\ll$  *passato assoluto*  $\gg$  rispetto all'evento O, cioè gli eventi di questa regione sono anteriori a O i tutti i sistemi di riferimento. Consideriamo infine le regioni  $dOa$  e  $cOb$ . L'intervallo tra qualsiasi evento di queste regioni e l'evento O é del genere spazio. Qualunque sia il sistema di riferimento, questi eventi avvengono sempre in differenti punti dello spazio. Queste regioni si possono quindi chiamare  $\ll$  *regioni di allontanamento assoluto*  $\gg$  rispetto a O. Tuttavia, i concetti di  $\ll$  *simultaneo*  $\gg$ ,  $\ll$  *prima*  $\gg$  e  $\ll$  *dopo*  $\gg$  per gli eventi di queste regioni sono relativi. Per ogni evento di queste regioni esistono sistemi di riferimento dove esso é posteriore a O, altri sistemi dove esso é anteriore a O e, infine, un sistema di riferimento dove esso é simultaneo a O. Notiamo che se si considerano tutte e tre le coordinate spaziali invece di una sola, in luogo di due rette intersecantisi si avrebbe un  $\ll$  *cono*  $\gg$   $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$  nel sistema quadridimensionale con coordinate  $x, y, z, t$ ; l'asse del cono (chiamato *cono di luce*) coincide con l'asse delle  $t$ . Le regioni del  $\ll$  *futuro assoluto*  $\gg$  e del  $\ll$  *passato assoluto*  $\gg$  sono rappresentate allora dalle due falde interne di questo cono, rispettivamente. Due eventi possono essere legati da un rapporto di causalità soltanto nel caso in cui il loro intervallo sia del genere tempo. Questo risultato segue immediatamente dall'impossibilità che qualche interazione si propaghi più velocemente della luce. Come abbiamo appena visto, i concetti di  $\ll$  *prima*  $\gg$  e  $\ll$  *dopo*  $\gg$  hanno un senso assoluto solo per questi eventi; questa é una condizione indispensabile perché i concetti di causa e di effetto abbiano senso.

### 3.2 Tempo proprio

Supponiamo di osservare da un sistema di riferimento inerziale un orologio animato da un moto arbitrario rispetto a noi. In ogni istante questo moto può essere considerato uniforme. Possiamo quindi in ogni istante fissare rigidamente all'orologio un sistema di coordinate che sarà (con l'orologio) un sistema di riferimento inerziale. In un intervallo di tempo infinitesimo  $dt$  (secondo un orologio fisso che si trova cioè nel nostro sistema di riferimento) l'orologio in movimento percorre la distanza:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Si domanda: quale sarà l'intervallo di tempo  $dt'$  indicato dall'orologio in moto? Nel sistema di coordinate legato all'orologio in movimento quest'ultimo é fermo, cioè  $dx' = dy' = dz' = 0$ . In virtù dell'invarianza dell'intervallo,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2,$$

quindi

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}.$$

Ma

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} = v^2$$

dove  $v$  é la velocità dell'orologio in moto; perciò

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

L'integrazione di questa espressione dá l'intervallo di tempo indicato dall'orologio in movimento, quando l'orologio fisso indicherá il tempo  $t_2 - t_1$ :

$$\Delta t' = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.5)$$

Il tempo indicato da un orologio, solidale con un corpo dato, é detto *tempo proprio* di questo corpo. Tale equazione esprime il tempo proprio in funzione del tempo misurato nel sistema di riferimento rispetto al quale si considera il moto. Come si può vedere il tempo proprio di un corpo in moto é sempre minore del corrispondente intervallo di tempo nel sistema fisso. In altri termini, un orologio in moto va piú lentamente di uno fisso. Supponiamo ora di avere un altro orologio in moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale  $K$ . Il sistema  $K'$  solidale con il secondo orologio é anch'esso inerziale. Allora, l'orologio del sistema  $K'$ , dal punto di vista di un osservatore nel sistema  $K$ , ritarda rispetto all'orologio dell'osservatore. E al contrario, dal punto di vista del sistema  $K'$ , ritarda l'orologio nel sistema  $K$ . Per convincerci che non esiste alcuna contraddizione, consideriamo il seguente fatto. Supponiamo che in un certo istante l'orologio di  $K'$  incontri quello di  $K$  e che in questo istante essi indichino lo stesso tempo. Per confrontare l'andatura degli orologi di  $K$  e di  $K'$ , bisogna nuovamente confrontare le indicazioni dell'orologio di  $K'$  con un secondo orologio di  $K$ , ossia con quello incontrato dall'orologio di  $K'$  in un altro istante. Si scopre cosí che l'orologio di  $K'$  ritarda sull'orologio di  $K$  con quale viene confrontato. Per poter confrontare l'andatura degli orologi in due sistemi di riferimento, occorrono quindi piú orologi in un sistema e un orologio in un altro sistema. Risulta perció che questo processo non é simmetrico rispetto ai due sistemi considerati. In ritardo sará sempre l'orologio che viene confrontato con differenti orologi dell'altro sistema di riferimento. Se si prendono due orologi uno dei quali descrive una traiettoria chiusa per tornare alla posizione iniziale (dove si trova l'orologio fisso), risulterà in ritardo proprio l'orologio in moto (rispetto a quello fisso). Il ragionamento inverso, nel quale i ruoli degli orologi vengono invertiti non é valido perché l'orologio descrivente la traiettoria chiusa non compie un moto rettilineo e uniforme, e il sistema di riferimento relativo a esso non é inerziale. Siccome le leggi della natura sono identiche soltanto in sistemi di riferimento inerziali, i sistemi di riferimento relativi all'orologio fisso (sistema inerziale) e a quello in moto (sistema non inerziale) possiedono proprietá differenti, e il ragionamento secondo il quale l'orologio fisso dovrebbe ritardare é sbagliato. L'intervallo di tempo indicato da un orologio é uguale all'integrale  $\frac{1}{c} \int ds$  preso lungo la linea d'universo di questo orologio. Se l'orologio é fisso, la sua linea d'universo é una retta parallela all'asse del tempo; se invece l'orologio compie un moto non uniforme lungo una traiettoria chiusa e ritorna alla posizione di partenza, la sua linea d'universo é una curva passante per due punti sulla retta d'universo di un orologio fisso, corrispondenti all'inizio e alla fine del moto. D'altra parte, abbiamo visto che il tempo indicato da un orologio in quiete é sempre maggiore di quello di un orologio in moto. Si arriva quindi alla conclusione che l'integrale  $\frac{1}{c} \int ds$  preso tra due punti d'universo dati ha un valore massimo quando é esteso alla retta d'universo che congiunge questi due punti (in una geometria euclidea su una retta avrebbe avuto valore minimo).

### 3.3 Trasformazione di Lorentz

Ci proponiamo ora di trovare le formule di trasformazione da un sistema di riferimento inerziale in un altro, cioé le formule che permettono, conoscendo le coordinate  $x, y, z, t$  di un evento in un dato sistema di riferimento  $K$ , di trovare le coordinate  $x', y', z', t'$  dello stesso evento in un altro sistema di riferimento inerziale  $K'$ . Questo problema in meccanica classica si risolve molto facilmente. Essendo il tempo assoluto, abbiamo  $t = t'$ ; scegliendo poi le coordinate nel modo solito, le coordinate  $y$  e  $z$  saranno evidentemente uguali alle coordinate  $y'$  e  $z'$ , mentre le coordinate  $x$  e  $x'$  differiranno per la distanza percorsa da un sistema rispetto all'altro; se come origine del tempo si prende l'istante in cui i due sistemi delle coordinate coincidono e se si indica con  $V$  la velocità di  $K'$  rispetto  $K$ , questa distanza sará allora  $Vt$ . Quindi si ha:

$$x = x' + Vt, y = y', z = z', t = t'.$$

Queste sono le formule di trasformazione di Galilei. È facile verificare che questa trasformazione, come c'era da aspettarsi, non soddisfa la condizione della teoria della relatività: essa non lascia invariante l'intervallo tra due eventi. Per cercare le formule di trasformazione relativistiche, considereremo che dalle proprietà dello spazio è possibile ottenere delle limitazioni nelle forme analitiche di tale legge di trasformazione. Tali trasformazioni devono essere lineari, perché la linearità è una conseguenza dell'omogeneità e dell'isotropia dello spazio. Il punto di partenza è una legge di trasformazione del tipo:

$$\begin{cases} t' = t'(x, t) \\ x' = x'(x, t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{E quindi}$$

$$\begin{cases} t' = a_{11}t + a_{12}x \\ x' = a_{21}t + a_{22}x \end{cases} \quad \text{Le costanti } a_{ij} \text{ devono essere calcolate al fine di soddisfare quattro proprietà fisiche}$$

per la loro univoca determinazione. Infatti abbiamo:

- $O'$  di  $K'$  corrisponde alla condizione  $x' = 0$ , mentre per  $K$  deve soddisfare la condizione  $a_{21}t + a_{22}x = 0$ . Essendo  $V$  la velocità del sistema mobile deve aversi  $a_{21} + a_{22}V = 0$ .
- Se  $V = 0$  la trasformazione deve ridursi all'identità  $O' = O$ .
- La trasformazione inversa deve essere anch'essa lineare con la sola variazione del segno per la velocità relativa. Invertendo si ha:

$$t = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}t' - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}x'$$

$$x = -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}t' + \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}x'$$

Che deve essere uguale a

$$t = a_{11}t' - a_{12}x'$$

$$x = -a_{12}t' + a_{22}x'$$

- La velocità della luce deve valere  $c$  in tutti i sistemi di riferimento, cioè:  $c = \frac{x'}{t'} = \frac{a_{21} + a_{22}c}{a_{11} + a_{12}c}$

Riassumendo le quattro condizioni otteniamo la soluzione per le costanti  $a_{ij}$ :

$$\begin{cases} a_{12} = a_{21} \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \\ a_{21} + a_{22}V = 0 \\ \frac{a_{21} + a_{22}c}{a_{11} + a_{12}c} = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ a_{12} = \frac{a_{21}}{c^2} = \frac{-V}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Per compattare poniamo  $\beta = V/c$  e  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ . Alla fine la trasforma-



zioni di Lorentz sono le seguenti:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left( t - \frac{\beta}{c} x \right) \\ x' = \gamma \left( x - \beta c t \right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (3.6)$$

Invertendo, cioè risolvendo rispetto alle coordinate  $(x, y, z, t)$  si ha invece:

$$\begin{cases} t = \gamma \left( t' + \frac{\beta}{c} x' \right) \\ x = \gamma \left( x' + \beta c t' \right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (3.7)$$

É facile osservare come tali equazioni si riducono alle trasformazioni galileiane al limite per  $V \ll c$ . Se nelle formule si pone  $V > c$ , le coordinate  $(x, t)$  (o indifferentemente  $(x', t')$ ) diventano immaginarie; questo corrisponde all'impossibilità di un moto con velocità superiore a quella della luce. Non é nemmeno possibile avere un sistema di riferimento che si muova a una velocità uguale a quella della luce, in quanto i denominatori farebbero zero. Consideriamo ora un'asta in quiete nel sistema  $K$  e disposta parallelamente all'asse  $x$ . Sia  $\Delta x = x_2 - x_1$  la lunghezza dell'asta misurata in questo sistema. Cerchiamo allora la sua lunghezza dal punto di vista del sistema mobile  $K'$ . Sappiamo che:

$$x_1 = \gamma \left( x'_1 + \beta c t' \right)$$

$$x_2 = \gamma \left( x'_2 + \beta c t'_2 \right)$$

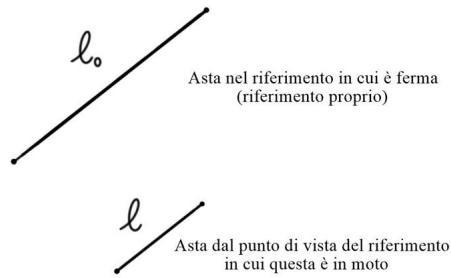
e quindi per  $\Delta x$  abbiamo:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

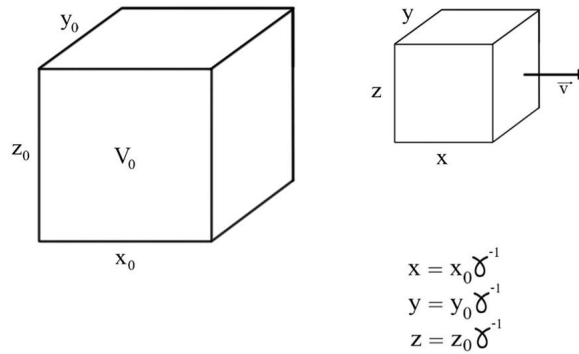
Si chiama *lunghezza propria* di un'asta la sua lunghezza nel sistema di riferimento dove essa é in quiete. Indicando con  $l_0 = \Delta x$  la lunghezza propria e con  $l$  la lunghezza della stessa asta misurata nel sistema  $K'$ , otteniamo la relazione:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (3.8)$$

Da questa formula é chiaro che la lunghezza dell'asta é maggiore nel sistema di riferimento dove essa é in quiete. La sua lunghezza, in un sistema in cui si muove con velocità  $V$ , diminuisce nel rapporto di  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ . Questo risultato della teoria della relatività prende il nome di *contrazione di Lorentz*. Poiché le dimensioni trasversali di un corpo in moto sull'asse  $x$  non cambiano, il suo volume risulterà anch'esso contratto secondo il fattore  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ .



**Figura 3.1:** Contrazione lunghezze per un moto rettilineo uniforme assiale



**Figura 3.2:** Contrazione volume per un moto rettilineo uniforme in generale

### 3.4 Cenni sui quadrivettori

L'insieme delle coordinate  $(x, y, z, ct)$  di un evento può essere considerato come le componenti di un raggio vettore quadridimensionale nello spazio quadridimensionale. Indicheremo con  $x^i$  le sue componenti, dove l'indice  $i$  assume valori 0,1,2,3 e dove

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Il quadrato della << lunghezza >> di un raggio quadrivettore è dato dall'espressione

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \tag{3.9}$$

Come si può facilmente osservare esso coincide con l'invariante relativistico, e quindi non varia per qualsivoglia trasformazione del sistema di coordinate quadridimensionale, quali sono in particolare le trasformazioni di Lorentz. In generale si chiama quadrivettore  $A^i$  l'insieme di quattro grandezze  $A^0, A^1, A^2, A^3$ , che si trasformano come le componenti  $x^i$  di un raggio quadrivettore per trasformazioni del sistema di coordinate quadridimensionale. Le trasformazioni di Lorentz ci danno:

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c} A'^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3.$$

Il quadrato del vettore di ogni quadrivettore é definito analogamente al quadrato di un raggio quadrivettore

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Per rendere piú comoda la scrittura di tali espressioni, introduciamo due << tipi >> di componenti dei quadrivettori indicandole rispettivamente con  $A^i$  e  $A_i$  aventi l'indice in alto e in basso. Teniamo intanto presente che

$$A_0 = A^0, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2, A_3 = -A^3.$$

Le grandezze  $A^i$  sono dette componenti *controvarianti* e  $A_i$  componenti *covarianti* del quadrivettore. Il quadrato di un quadrivettore assume allora la forma

$$\sum_{i=0}^3 A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3. \quad (3.10)$$

Queste somme si scrivono di solito nella forma  $A^i A_i$ , omettendo il segno di somma. Si adotta in generale la regola secondo la quale con ogni indice ripetuto due volte in una data espressione si sottintende la sommatoria, ma il segno di somma va omissso. Inoltre in ogni coppia di indici uguali uno deve essere scritto superiormente e l'altro inferiormente. Questo modo di esprimere una sommatoria su indici detti *muti* é molto comodo e semplifica notevolmente la scrittura delle formule. Secondo una regola piú generale inoltre, gli indici superiori e inferiori in ogni coppia di indici muti possono sempre essere scambiati di posto.

### 3.5 Quadrivelocita'

Partendo da un vettore velocità tridimensionale ordinario si può formare un quadrivettore. Il vettore

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \quad (3.11)$$

costituisce la quadrivelocità di una particella. Per trovarne le componenti osserviamo che essendo  $ds$  l'invariante relativistico (per spostamenti infinitesimi)

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

dove  $v$  é la velocità tridimensionale ordinaria della particella. Quindi:

$$u^i = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (3.12)$$

### 3.6 Energia e impulso

Per studiare il moto delle particelle partiremo dal principio di minima azione. Ci riferiremo all'integrale d'azione per una particella libera. É opportuno notare che questo integrale non deve dipendere dalla scelta del sistema di riferimento, cioè esso dev'essere invariante per trasformazioni di *Lorentz*. É evidente quindi che esso deve essere l'integrale di uno scalare. É chiaro inoltre che sotto il segno di integrazione ci debbono essere differenziali del primo ordine. Il solo scalare di questo tipo che si può formare per una particella materiale libera é l'intervallo  $ds$  o

$\alpha ds$ , dove  $\alpha$  é una costante. Ora esprimeremo l'azione in termini di invariante relativistico.

$$A = -\alpha \int_b^a ds,$$

Detto in altri termini, noi vogliamo mettere l'invariante relativistico in termini della lagrangiana, e quindi vogliamo che la definizione di azione data nel primo capitolo coincida con l'azione in termini di invariante relativistico, da qui il fattore correttivo  $\alpha$ .

L'integrale é che noi prendiamo in considerazione in termini di invariante relativistico é esteso alla linea d'universo compresa tra due eventi dati  $a$  e  $b$  che rappresentano le posizioni iniziale e finale occupate dalla particella in istanti determinati  $t_1$  e  $t_2$ , vale a dire tra i punti d'universo dati;  $\alpha$  é una costante che caratterizza la particella data. Essendo nota l'espressione dell'invariante relativistico si ha

$$A = - \int_{t_2}^{t_1} \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt,$$

dove  $v$  é la velocità della particella materiale. La lagrangiana per la particella quindi, tenendo conto di quanto visto nel capitolo di meccanica analitica, deve essere:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.13)$$

Come abbiamo già notato, la grandezza  $\alpha$  caratterizza la particella data. Ogni particella in meccanica classica é caratterizzata dalla sua massa  $m$ . Stabiliamo la relazione tra le grandezze  $\alpha$  e  $m$ , che puó essere trovata imponendo che nel passaggio al limite per  $c \Rightarrow \infty$  la nostra espressione di  $L$  si trasformi nella sua forma classica  $L = mv^2/2$ . Per realizzare questo passaggio, sviluppiamo  $L$  in serie di potenze  $v/c$ . Trascurando i termini di ordine superiore, si ottiene:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

I termini costanti della lagrangiana non incidono sulle equazioni del moto e si possono quindi omettere. Dal confronto si ha che  $\alpha = mc$ . Sostituendo:

$$L = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.14)$$

L'impulso di una particella é, come é noto, il vettore  $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$  (tale notazione esprime simbolicamente che  $\vec{p}$  é un vettore le cui componenti sono le derivate della lagrangiana rispetto alle componenti della velocità). Dagli ultimi sviluppi possiamo dunque affermare che:

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.15)$$

Per velocità piccole rispetto a  $c$  questa espressione si trasforma nell'impulso classico. La derivata dell'impulso rispetto al tempo é la forza agente sulla particella. Supponiamo ora che vari soltanto la direzione della velocità, cioè che la forza sia perpendicolare alla velocità. Allora

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Se invece varia soltanto il modulo della velocità, cioè la forza e la velocità sono collineari, si ha

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Vediamo che nei due casi la relazione tra forza e accelerazione è differente. Definiamo energia  $\varepsilon$  della particella la grandezza

$$\varepsilon = \vec{p} \cdot \vec{v} - L. \quad (3.16)$$

E quindi

$$\varepsilon = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.17)$$

Questa formula di grande importanza indica, in particolare, che in meccanica relativistica l'energia di una particella non si annulla per  $v = 0$ , ma prende il valore finito

$$\varepsilon = m c^2. \quad (3.18)$$

Questa è l'energia a riposo della particella. Sottolineiamo che pur parlando di particella non abbiamo mai sfruttato il suo carattere puntiforme. Di conseguenza, le formule ottenute sono ugualmente applicabili ad ogni corpo complesso, costituito da un gran numero di particelle;  $m$  rappresenterà allora la massa totale e  $v$  la velocità del corpo in blocco. In particolare,  $\varepsilon = m c^2$  è valida anche per ogni corpo che in blocco è in quiete. Notiamo che l'energia di un corpo libero (cioè l'energia di qualsiasi sistema isolato), in meccanica relativistica, è una grandezza del tutto determinata, sempre positiva, direttamente legata alla massa del corpo. Ricordiamo a questo proposito che l'energia di un corpo è determinata, in meccanica classica, con un'approssimazione a meno di una costante additiva e può essere sia positiva che negativa. L'energia di un corpo in quiete comprende, oltre all'energia di riposo delle particelle che lo compongono, l'energia cinetica delle particelle e la loro energia di interazione. In altri termini,  $m c^2$  non è uguale alla somma  $\sum_a m_a c^2$  (dove  $m_a$  sono le masse delle particelle) e, di conseguenza, nemmeno  $m$  è uguale a  $\sum_a m_a$ . Quindi nella meccanica relativistica la legge di conservazione della massa non sussiste: la massa di un corpo composto non è uguale alla somma delle masse dei suoi componenti. Resta valida soltanto la legge di conservazione dell'energia, che comprende anche l'energia a riposo della particella. Come è semplice dimostrare possiamo scrivere che

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2.$$

L'energia espressa in funzione dell'impulso è detta, come si sa, hamiltoniana:

$$H = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (3.19)$$

Per velocità piccole si ha approssimativamente

$$H \approx m c^2 + \frac{p^2}{2m}.$$

cioè, sottraendo l'energia di riposo, si ottiene la nota espressione classica della funzione di Hamilton.



## Capitolo 4

# La struttura del Sole

Gli aspetti teorici fin qui sviluppati possono trovare applicazione nello studio della struttura della nostra stella: il Sole. Secondo le leggi classiche il Sole non dovrebbe esistere (almeno nella modalità con cui ci appare), tuttavia esiste. Soltanto considerando l'interazione quantistica tra le particelle costituenti il Sole é possibile giustificare le sue principali caratteristiche. Il principio di Hisenberg trova la sua naturale collocazione e può essere elevato a legge della fisica. Ricaviamo le varie equazioni che regolano l'equilibrio all'interno di una stella. Inoltre per affrontare questo studio é necessario riportare lo studio del cosiddetto *corpo nero*. Si definisce corpo nero un qualsiasi corpo che termodinamicamente raggiunge un equilibrio tra la materia e la radiazione elettromagnetica. Il Sole é in buona approssimazione un corpo nero. Concludiamo il presente capitolo riportando il meccanismo responsabile dell'innesco della fusione dell'idrogeno in elio all'interno del Sole. Meccanismo perfettamente inteso se si considera l'unione dei fenomeni quantistici e quelli relativistici.

### 4.1 Corpo nero

La definizione di *corpo nero* risale a un lavoro di *Kirchoff* dove viene formulato, su base termodinamica, un teorema di importanza fondamentale circa le proprietà della radiazione termica, ossia della radiazione in equilibrio con un corpo posto a una data temperatura. Sia  $E_{\nu,T}d\nu$  il *potere emissivo* di un corpo mantenuto in equilibrio termico alla temperatura T per effetto dell'emissione e assorbimento della radiazione stessa; sia  $A_{\nu,T}d\nu$  il suo *potere assorbente*, cioè la frazione di energia radiante assorbita. Queste due grandezze rappresentano energia, rispettivamente emessa e assorbita, per unità di tempo, superficie e con frequenza compresa tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ . Kirchoff dimostró che il rapporto tra queste grandezze é rappresentato da una funzione universale che dipende dalla sola temperatura del corpo e dalla frequenza della radiazione:

$$\frac{E_{\nu}}{A_{\nu}} = B_{\nu}(T) \quad (4.1)$$

Per un corpo nero ideale abbiamo  $A_{\nu} = 1$ , cioè tutta la radiazione viene assorbita per poi essere riemessa, e quindi otteniamo:

$$E_{\nu} = B_{\nu}(T) \quad (\text{Funzione di Kirchoff}). \quad (4.2)$$

Una prima interpretazione del corpo nero fú quella di considerare una cavità con delle pareti impermeabili alla radiazione e a una temperatura uniforme, in modo che all'interno si possa considerare una fase di equilibrio tra materia e radiazione con continui assorbimenti ed emissioni di quest'ultima, Questo fenomeno in un certo senso accade nelle stelle, dove si raggiunge un equilibrio tra radiazione e materia. La radiazione interna alla cavità la si

puó considerare come un gas di fotoni. L'andamento analitico di  $B_\nu(T)$  segue la legge di *Planck* per il corpo nero:

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad [W m^{-2} Hz^{-1} sterad^{-1}] \quad (4.3)$$

dove  $k$  é la costante di *Boltzmann*. Quindi  $B_\nu(T)$  in termini dell'energia totale  $E$  si puó riscrivere:

$$B_\nu \approx \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta A_\perp \Delta \nu \Delta \omega}$$

Dove  $\Delta A_\perp$  é l'area della superficie ortogonale alla direzione della radiazione,  $\Delta \omega$  é l'angolo solido. Lo spettro d'energia del corpo nero puó essere assunto continuo finché le lunghezze d'onda della radiazione sono piccole rispetto alla dimensione della cavità. Definiamo  $B_\nu(T) = \text{Intensita' specifica}$ . L'elemento di area  $\Delta A_\perp$  lo si puó esprimere in termini dell'angolo formato tra la normale alla superficie e la direzione della radiazione:

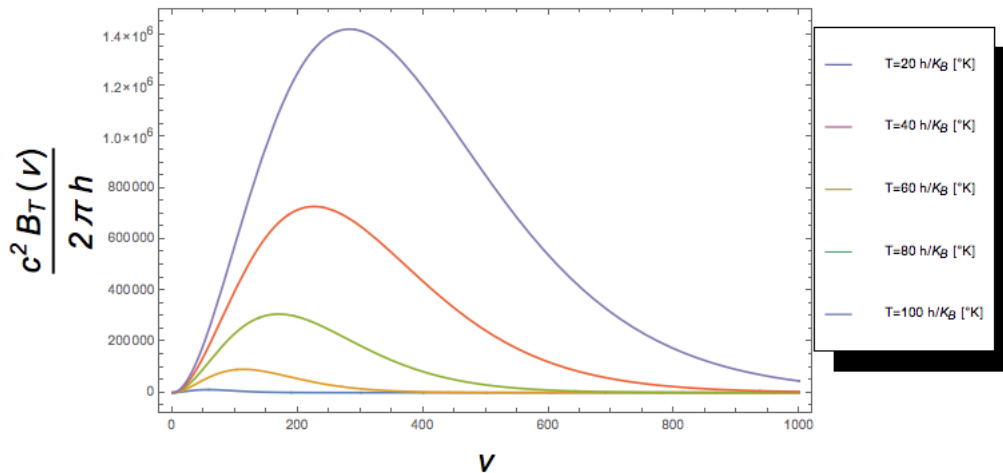
$$\Delta A_\perp = \Delta A \cos\vartheta$$

Possiamo esprimere l'intensità specifica anche in termini delle lunghezze d'onda  $\lambda$  della radiazione. Siccome al cresce della frequenza corrisponde una diminuzione della lunghezza d'onda abbiamo che:

$$B_\nu = -\frac{d\nu}{d\lambda} B_\nu(T) = -\frac{c}{\lambda^2} B_\nu(T)$$

e dato che  $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad [W m^{-3} sterad^{-1}]$$



**Figura 4.1:** Andamento della funzione di Planck parametrizzato rispetto alla temperatura

Definiamo *Intensita' totale*  $B(T)$ :

$$B(T) = \int_0^{+\infty} B_\nu(T) d\nu = \int_0^{+\infty} B_\lambda d\lambda \quad (4.4)$$



Il risultato é lo stesso, e alla fine dei conti abbiamo:

$$B(T) = AT^4 \quad (4.5)$$

dove  $A$  é una costante. Calcoliamo la densità di flusso  $F$  legata all'intensità totale. Notiamo che  $B(T)$  é l'intensità totale per una radiazione isotropa, in quanto non vi é dipendenza angolare. Quindi  $F$  é legata a  $B(T)$  dalla relazione:

$$F(T) = \int \cos\vartheta B(T) d\omega = \pi B(T) [W m^{-2}]$$

e quindi

$$F(T) = \sigma T^4 \quad (\text{Legge di Stefan - Boltzmann}), \quad (4.6)$$

dove

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{c^2 h^3 15}.$$

L'andamento di  $B_\lambda(T)$  per una temperatura parametrizzata é:(figura) Inoltre il valore di  $\lambda$  per cui si ottiene la massima emissione del corpo nero soddisfa la relazione:

$$\lambda_{max} T = \text{costante} \quad (\text{Legge degli spostamenti di Wien}). \quad (4.7)$$

Quindi aumentando la temperatura si ottiene una diminuzione della lunghezza d'onda e di conseguenza un aumento energetico dei fotoni. In definitiva, aumentando la temperatura si ottiene un gas di fotoni piú energetico. Per ottenere la relazione di *Wien* basta calcolare la derivata di  $B_\lambda(T)$ , supponendo che  $\exp(\frac{hc}{kT\lambda}) \gg 1$ . Sostituendo il valore di  $\lambda_{max}$  in  $B_\lambda(T)$  si ottiene il valore massimo di  $B_\lambda(T)$  che dipende dalla temperatura come una potenza alla quinta. Per ricavare la legge di *Wien* si é utilizzata l'approssimazione  $\frac{hc}{\lambda} \gg kT$ , e quindi é ovvio che possiamo scrivere:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} \quad (\text{Approssimazione di Wien}). \quad (4.8)$$

Notiamo che se  $\lambda \gg \lambda_{max}$ , otteniamo  $\frac{hc}{\lambda kT} \ll 1$  e quindi possiamo approssimare:

$$e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT}$$

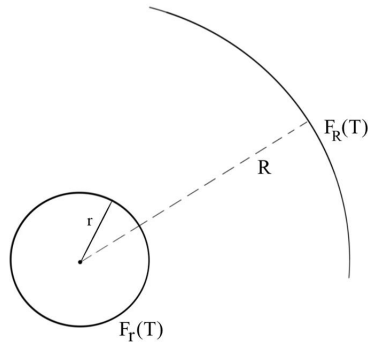
ottenendo

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{\lambda kT}{hc} = \frac{2ckT}{\lambda^4} \quad (\text{Approssimazione di Rayleigh - Jeans}). \quad (4.9)$$

Concludiamo dando delle informazioni sul flusso  $F(T)$ . Tale flusso integrato su una superficie ci dá la luminosità di una stella che é una potenza. Siccome la luminosità deve essere la stessa a qualsiasi distanza, in quanto é una proprietà intrinseca della stella, dobbiamo avere che il flusso  $F(T)$  sia proporzionale a  $1/r^2$ . Infatti, svolgendo i conti si arriva alle seguente equazione:

$$F_R(T) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 F_r(T) \quad (4.10)$$

dove  $R$  é la distanza che va dal centro della stella al punto in cui si effettua la misura, mentre  $r$  é il raggio della stella.



**Figura 4.2:** Relazione tra flusso in partenza dalla sorgente e flusso in arrivo nel punto di misura

## 4.2 Equilibrio di una stella

Dato che una stella la si considera come una sfera autogravitante di natura gassosa una prima condizione affinché vi sia equilibrio è che la forza di gravità che cerca di comprimere il gas sia equilibrata da una pressione interna. Consideriamo il seguente schema(figura): Sia  $dA$  la superficie di un elemento di massa  $dm$  e spessore  $dr$ . Sia  $M(r)$  la massa contenuta all'interno di una sfera di raggio  $r$ . Le forze esercitate sull'elemento di massa  $dm$  è:

$$dF_g = -\frac{G M(r) dm}{r^2} = -\frac{G M(r) \rho dA dr}{r^2}$$

$$dF_p = P(r) dA - (P(r) + dP(r)) dA = dF_p = -dP(r) dA$$

Affinché vi sia equilibrio, abbiamo:

$$dF_g + dF_p = 0$$

e quindi

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G M(r) \rho}{r^2}. \quad (4.11)$$

Questa equazione ci assicura solo che la pressione deve decrescere continuamente dalle zone centrali a quelle esterne di una stella, ma è lungi dal fornirci ulteriori informazioni quantitative, trattandosi di una sola equazione nelle tre funzioni incognite  $P(r)$ ,  $M(r)$  e  $\rho(r)$ . Notiamo, però, che  $M(r)$  e  $\rho(r)$  sono legate fra loro dalla condizione di continuità della massa. Infatti in un guscio sferico di raggio  $r$  è contenuta la massa  $dM(r)$ :

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$$

da cui

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (\text{Equazione di continuita' della massa}). \quad (4.12)$$

Ora ricaviamo la relazione che governa la produzione di energia. A tal fine consideriamo la luminosità  $L$ , cioè l'energia per unità di tempo, inoltre introduciamo il coefficiente  $\epsilon$  detto *coefficiente di energia prodotta*, che

rappresenta l'ammontare di energia rilasciata nell'unità di tempo e di massa. Con tale definizione abbiamo:

$$dL(r) = L(r + dr) - L(r) = \epsilon dM(r),$$

e siccome

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$$

otteniamo

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (\text{Equazione di conservazione dell'energia}). \quad (4.13)$$

Quest'ultima relazione implica che ad ogni variazione di luminosità vi sia una produzione (o un assorbimento) di energia nello strato di massa  $dm$ . La produzione di energia dipende dalla distanza dal centro. Essenzialmente quasi tutta l'energia è prodotta nelle zone centrali della stella. L'ultima equazione da ricavare è l'equilibrio termico. Infatti bisogna calcolare il gradiente di temperatura, ed è intuitivo supporre una diminuzione della temperatura verso l'esterno. A tal fine bisogna considerare prima in che modo vi è il trasporto di energia. Le possibilità sono: radiazione, convezione, conduzione. All'interno di stelle normali, la conduzione è molto inefficiente, in quanto gli elettroni responsabili del processo presentano un cammino libero medio molto piccolo e quindi non si manifesta una conduzione orizzontale. Lo stesso vale anche per la convezione, dove solo con un elevato gradiente termico si può osservare tale fenomeno. Quindi resta la radiazione come unico fenomeno responsabile del trasporto energetico dalle zone centrali verso l'esterno. La radiazione è dovuta alla produzione di fotoni che successivamente vengono assorbiti e riemessi negli strati più freddi superiori. Il nostro scopo è di legare il gradiente termico a un flusso radiativo. Bisogna tener presente che un campo di radiazione può esistere anche in assenza di gradiente di temperatura, ma in questo caso non vi è un flusso netto diverso da zero. Ricaviamo le relazioni per il campo radiativo. Consideriamo un cilindro di materia sulla cui base inferiore incide perpendicolarmente all'interno di un angolo solido  $d\omega$  un'intensità di radiazione  $I_\nu$ , che ha le stesse dimensioni della funzione  $B_\nu(T)$  del corpo nero. Supponendo di percorrere il tratto  $dr$ , l'intensità  $I_\nu$  cambia di una quantità  $dI_\nu$ , abbiamo dunque una variazione di energia data da:

$$dE = dI_\nu dA d\nu d\omega dt$$

Questa variazione per l'energia è la somma di due contributi: uno dovuto all'assorbimento della radiazione nel tratto  $dr$  (con il segno negativo) e l'altro dovuto all'emissione da parte della materia presente nel cilindretto. Consideriamo l'opacità della materia in questione,  $\alpha_\nu$ , otteniamo:

$$dE_{ass} = \alpha_\nu dI_\nu dA d\nu d\omega dt$$

con  $[\alpha_\nu] = [m]^{-1}$ . L'energia emessa, invece, dal volume di materia è:

$$dE_{em} = \delta_\nu dr dA d\nu d\omega dt$$

dove  $\delta_\nu$  è il coefficiente di emissione del mezzo ( $[\delta_\nu] = [W m^{-3} Hz^{-1} sterad^{-1}]$ ). Quindi la variazione totale di energia è:

$$dE = dE_{em} - dE_{ass}.$$

Dove, svolgendo i calcoli, si ottiene:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu. \quad (4.14)$$

Dove  $S_\nu = \delta_\nu/\alpha_\nu$  é detta funzione sorgente e  $d\tau_\nu = \alpha_\nu dr$  é detto spessore ottico. Quando  $S_\nu > I_\nu$  l'intensit  tende ad aumentare nella direzione della propagazione, mentre se  $S_\nu < I_\nu$  l'intensit  tende a diminuire. In condizioni di equilibrio termodinamico  $S_\nu = I_\nu$  non vi   variazione d'intensit  e la radiazione   quella del corpo nero. IN questo modo anche  $S_\nu$  coincide con la legge di distribuzione di *Planck*. Nel caso particolare delle stelle, in buona approssimazione, le propriet  del mezzo variano solo lungo una direzione. L'intensit , allora, sar  una funzione solo di  $z$  e  $\vartheta$  (angolo tra  $z$  e la direzione della propagazione).

$$dz = dr \cos\vartheta$$

Ridefinendo *ad hoc* lo spessore ottico otteniamo la formula usale per il trasferimento radiativo nelle atmosfere stellari:

$$\cos\vartheta \frac{dI_{nu}(z, \vartheta)}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \quad (4.15)$$

Siccome l'opacit  dipende dalla temperatura, dalla composizione chimica chimica e soprattutto dalla densit  si suole introdurre il coefficiente d'assorbimento di massa  $k_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\rho}$ . L'opacit    strettamente legata al cammino libero medio  $l$  e si dimostra:

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = l \quad (4.16)$$

Nel nostro caso particolare, quindi di una simmetria sferica, abbiamo una dipendenza solo radiale:

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu}{dr} = -k_\nu \rho I_\nu + \delta_\nu.$$

Bisogna notare che, essendo la propagazione radiativa sicuramente non radiale, in quanto presenta una buona componente random, dobbiamo considerare solo la componente radiale della propagazione radiativa in quanto solo lungo questa direzione vi sono delle variazioni fisiche. In buona sostanza, vogliamo considerare il cammino medio della radiazione. Questo   il motivo della sostituzione di  $z$  con  $r$  mentre il fattore  $\cos\vartheta$  resta. Sostituendo  $k_\nu$  con il suo valor medio e integrando l'equazione su tutte le frequenze e sull'angolo solido abbiamo, tenendo conto che  $\delta_\nu$  non dipende dall'angolo solido, perch  avendo la stella una simmetria sferica la radiazione che essa emette   isotropa, otteniamo un contributo nullo nell'integrazione:

$$\frac{d}{dr} 2\pi \int_0^\pi \cos^2\vartheta \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{+\infty} I_\nu d\nu = k\rho 2\pi \int_0^\pi \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{+\infty} I_\nu d\nu$$

Ricordando che il flusso  $F$  si scrive:

$$F = \int \cos\vartheta d\omega \int_0^{+\infty} B_\nu(T)$$

e approssimando  $I_\nu$  con  $B_\nu$ , otteniamo:

$$\frac{d}{dr} \frac{4\pi}{3} B(T) = -k\rho F$$

e dato che  $B(T) = AT^4$ : introducendo la costante di corpo nero  $a = 4\sigma /$ ,

$$\frac{4\pi}{3} \frac{d}{dr} \left( \frac{ac}{4\pi} T^4 \right) = -k\rho F(r)$$

e dato che

$$F(r) = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$$

si ottiene

$$\frac{dT}{dr} = \left(\frac{-3}{4ac}\right) \left(\frac{k\rho}{T^3}\right) \left(\frac{L(r)}{4\pi r^2}\right) \quad (\text{Gradiente temperatura radiativa}). \quad (4.17)$$

La derivata é negativa, quindi la temperatura aumenta verso l'interno. Quindi siccome l'equazione del trasporto deve essere letta nei due sensi: un gradiente di temperatura genera un flusso di energia, ma anche un afflusso di energia finisce con il generare un gradiente di temperatura. Leggendo questo in chiave stellare, comprende come l'esistenza di un flusso di radiazione emergente dalla struttura, implica che la temperatura deve crescere monotonamente verso l'interno, e che tale crescita deve necessariamente continuare finché c'è flusso o, in altre parole, finché nelle zone più interne c'è in qualche maniera produzione di energia che tende ad innalzare la temperatura nelle zone di produzione.

### 4.2.1 Pressione termodinamica e pressione quantistica

Andiamo a questo punto a ricavare le varie equazioni che governano lo stato fisico della materia costituente una stella. A tal fine calcoliamo la pressione generata dal gas di materia ma anche del gas di radiazione. Cominciamo col ricavare la pressione della materia in termini dell'energia totale. Consideriamo un parallelepipedo di spigoli  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  e calcoliamo la pressione su una faccia:

$$P = F/A = \sum [(\Delta p_z / \Delta t) / (\Delta x \Delta y)] = \frac{N \langle p_z \rangle / \Delta t}{\Delta x \Delta y}$$

Abbiamo scritto la quantità di moto totale come prodotto del numero di particelle che urtano la superficie per la

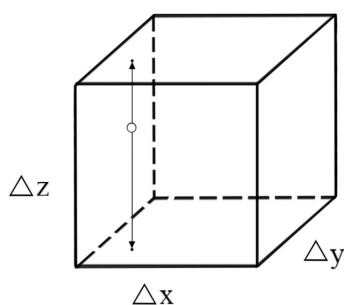


Figura 4.3: Urti delle particelle nella scatola

quantità di moto media. A causa dell'urto ogni particella subisce una variazione di quantità di moto  $\Delta p_z = 2p_z$ , e subirà un nuovo urto contro lo stesso muro dopo un'intervallo di tempo  $\Delta t = \frac{2\Delta z}{v_z}$ :

$$P = \frac{N p_z v_z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{N}{V} P_z v_z$$

Ma ricordando che  $p_z = m v_z$ :

$$P = \frac{N}{V} \frac{2}{3} \frac{m v^2}{2}$$

Il 3 al denominatore é originato dal fatto che abbiamo scritto il modulo della componente z della velocità in termini della velocità totale. Definiamo  $E$  energia totale:

$$E = N \frac{m v^2}{2} = N \epsilon$$

e quindi

$$P = \frac{2 E}{3 V} \quad (\text{Pressione gas classico}) \quad (4.18)$$

Ora, nel caso in cui il gas é composto da fotoni, quindi gas di radiazione, otteniamo:

$$P = F/A = \frac{\Delta p}{\Delta t} \frac{1}{A} = \frac{1}{V} \frac{h\nu c_x^2}{c^2}$$

e supponendo che  $c_x^2 = \frac{1}{3} c^2$

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V} \quad (\text{Pressione di radiazione}) \quad (4.19)$$

dato che  $u = \frac{E}{V}$  é la densità di energia, e che dalla teoria del corpo nero  $u = \frac{4\pi}{c} A T^4$ , inserendo la costante di corpo nero si arriva a:

$$P = \frac{a T^4}{3} \quad (\text{Pressione di corpo nero}) \quad (4.20)$$

Date le alte temperature all'interno di una stella il gas, in buona approssimazione, obbedisce all'equazione dei gas perfetti:

$$P = \frac{k}{M} \rho T \quad (4.21)$$

dove  $M$  é la massa molecolare. Calcoliamo la pressione dovuta agli elettroni sulla situazione degenera. La materia degenera é un particolare stato caratterizzato da elevatissima densità, tanto che il maggior contributo alla pressione é dato dal principio di esclusione di *Pauli*. Tale pressione trae origine dal fatto che i fermioni con gli stessi numeri quantici non possono occupare lo stesso stato quantico, e quindi quando si prova a comprimere oltre un certo punto la materia, questa inizia a esercitare una contropressione a causa del principio di esclusione, e ciò inizia ad avvenire dal momento in cui appunto tutti i livelli energetici differenti sono stati opportunamente occupati. Come abbiamo detto come equazione fondamentale usiamo quella di stato dei gas perfetti, dove ponendoci nel caso limite in cui usiamo il volume minimo necessario per un certo numero di particelle, la densità é così elevata che quella pressione non dipende dalla temperatura, non é una pressione termodinamica ma bensì una pressione quantistica, e quindi il gas non segue piú le leggi della termodinamica classica. Per impulso di *Fermi* si intende quel valore di impulso che i fermioni hanno quando occupano lo stato piú elevato, quindi quando quel sistema non può essere riempito con altri fermioni. Consideriamo un gas compreso in un volume  $V$  e che il momento delle particelle sia compreso tra  $p$  e  $p + dp$ ; dalla meccanica quantistica sappiamo che il numero di particelle possibile all'interno di un sistema può essere:

$$d^3 N = 2 \frac{V d^3 p}{h^3} = 2 \frac{V p^2 dp \sin\vartheta d\vartheta d\varphi}{h^3} \quad (4.22)$$

Integrando sull'angolo solido otteniamo

$$dN = \frac{8\pi V p^2 dp}{h^3}$$

dove  $h$  é il volume minimo a disposizione per ogni particella nello spazio delle fasi. Il 2 é introdotto per lo spin. Quindi il numero di particelle totale é dato da:

$$N = \frac{8\pi V p_F^2}{3 h^3} \quad (4.23)$$

e quindi il momento di Fermi vale:

$$p_F = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{h}{2}$$

Aumentando la densità di particelle aumenta il momento di Fermi. Supponendo che il gas non sia in condizioni relativistiche e quindi  $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ , l'energia totale é la seguente:

$$E = \int \epsilon dN = \int_0^{p_F} \frac{p^2 8\pi V p^2 dp}{2m h^3} = \frac{3^{\frac{5}{3}} h^2 V}{40 m \pi^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{5}{3}}}.$$

Ricordiamo che per un gas perfetto abbiamo ricavato che:

$$P = \frac{2}{3} \frac{E}{V}$$

e quindi sostituendo l'energia trovata in questa pressione troviamo l'espressione della pressione di natura quantistica che si oppone alla pressione gravitazionale della stella:

$$P = \frac{1}{20} (3/\pi)^{2/3} \frac{h^2}{m} (N/V)^{5/3} \quad (\text{Pressione gas degenerate non relativistico}) \quad (4.24)$$

Osserviamo come in questa pressione la temperatura del sistema non entra per niente in gioco. Possiamo dunque affermare che se fosse solo la pressione termodinamica a opporsi a quella gravitazionale la stella imploderebbe. Questa pressione esiste per il semplice fatto che i fermioni (elettroni nel nostro caso) non possono essere confinati in numero arbitrario in un volume arbitrario, ma possono essere confinati sempre obbedendo alle leggi imposte dalla meccanica quantistica. Nel caso relativistico sappiamo che l'energia é data dalla relazione:

$$\epsilon = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$$

e nel caso *ultrarelativistico*, in cui, l'energia di movimento della particella é molto maggiore della sua energia a riposo, possiamo approssimare l'energia con la formula:

$$\epsilon = cp \quad (\text{Limite ultrarelativistico}). \quad (4.25)$$

Quindi si svolgono da zero gli stessi calcoli di prima, con due differenze:

$$E = \int \epsilon dN$$

alla luce di  $\epsilon = cp$ . E siccome nel caso ultrarelativistico le particelle si comportano piú come radiazione che come particelle di un gas perfetto usiamo in luogo della pressione dei gas perfetti la pressione di radiazione:

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V}$$

Si ottiene:

$$P = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} hc \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{4}{3}} \quad (\textit{Pressione gas degenerare limite ultrarelativistico}) \quad (4.26)$$

Bisogna tenere presente che quanto detto é valido a rigore per una temperatura pari allo zero assoluto. Infatti per temperature diverse da zero e in particolare nel cuore di una stella, é impossibile avere un gas degenerare, in quanto a causa dell'agitazione termica senz'altro ci saranno particelle con energia superiore a quella di *Fermi*. Solo nelle zone centrali delle giganti rosse e nelle nane bianche si ottiene una situazione simile a quella ipotizzata. In entrambi i casi le pressioni sono indipendenti dalla temperatura, mentre nelle stelle normali il grosso contributo alla pressione viene dato dalla temperatura stessa.

### 4.3 Fusioni nucleari

La causa dell'origine dell'energia emessa da una stella é da individuare nelle fusioni nucleari che avvengono al centro dell'astro. Date le pressioni e le temperature presenti, l'atomo, come lo conosciamo, non esiste ma é presente un plasma di ioni, elettroni e radiazione. Dato che gli ioni sono carichi elettricamente dello stesso segno si instaura tra essi una repulsione coulombiana. Dunque la forza responsabile delle fusioni nucleari non va ricercata in quella elettromagnetica, bensí nella forza forte. Quest'ultima diviene dominante nella dinamica degli ioni su distanze nell'ordine di  $10^{-13}$  cm. Particelle sufficientemente energetiche possono giungere a superare tale distanza e "attivare" l'interazione forte. Quando e se ciò avviene, i nucleoni (protoni e neutroni) dei due nuclei che siano venuti in "contatto" formano per definizione un "nucleo composto", un nuovo insieme di nucleoni che, in comune, sono sotto il controllo delle forze forti. Non necessariamente il nucleo composto ammetterá configurazioni stabili. Ove ciò avvenga il nucleo composto potrà decadere sul suo stato fondamentale emettendo sotto forma di quanto  $\gamma$  l'energia in eccesso (ció é l'energia cinetica delle particelle interagenti piú il guadagno nell'energia di legame dei nucleoni). Bisogna notare che la massa del nucleo composto é inferiore alla somma delle masse dei costituenti prima della fusione. Questa differenza di massa é relazionata con l'energia in accordo con la relazione di *Einstein*  $E = mc^2$ . La differenza di massa é definita *energia di legame*. L'energia di legame per nucleone é data dalla seguente relazione:

$$Q = \frac{1}{A} [Z m_p + N m_n - m(Z, N)]c^2 \quad (4.27)$$

dove:

- $m_p$  : massa protone
- $m_n$  : massa neutrone
- $Z$  : numero elettronico (numero di protoni)
- $N$  : numero di neutroni
- $A = Z + N$  : numero atomico (numero di massa)



- $m(Z, N)$  : massa del nucleo prodotto.

In generale il sistema composto di nucleoni tenderá a decadere in una serie di canali con probabilitá che dipendono solo dal tipo di nucleoni presenti e dalla energia da questi posseduta (fissione nucleare). Sará cosí possibile che il nucleo composto si divida in due o piú frammenti, che emetta un nucleone singolo o una coppia elettrone-neutrino ( $e^- \nu^-$  o  $e^+ \nu^+$ ). Potrá in particolare ricadere nei componenti iniziali, realizzandosi cosí un processo di scattering nucleare. Si noti che il tipo stesso dei canali di decadimento del nucleo composto viene a dipendere dall'energia del medesimo. Ad esempio, solo fornendo al nucleo composto energia superiori all'energia di legame dei vari nucleoni sará possibile prevedere la frammentazione del nucleo nei suoi componenti. In processi di collisioni nucleari, il numero degli eventi di un prefissato tipo é correlato alle densitá e alla mutua velocitá dei fasci collidenti di particelle, attraverso la definizione di sezione d'urto:

$$n = N_i N_j \sigma(V) dV \quad (4.28)$$

- $n$ : numero di eventi nell'unitá di tempo e di volume
- $V$ : velocitá mutua tra le particelle
- $N_{i,j}$ : numero di particelle incidenti per unitá di volume
- $\sigma(V)$ : sezione d'urto

Notiamo che una collisione, in genere, é il risultato di diversi processi: scattering elastico o anelastico, fusione ecc., e la sezione d'urto resta sempre definita in questo modo per ogni singolo processo. Il prodotto  $N_i N_j$  rappresenta il numero delle possibili coppie di particelle per unitá di volume che si possono ottenere dallo scontro, e quindi  $\sigma(V) V$  rappresenta la probabilitá per coppia di particelle che avvenga un determinato processo. La probabilitá che avvenga un qualunque processo sará ovviamente la somma delle sezioni d'urto per i singoli processi, e corrisponderá per definizione alla probabilitá di formazione del nucleo composto. Definiamo *raggio del nucleo* la distanza alla quale si manifestano interazioni non coulombiane, condizione cruciale per il verificarsi di una possibile fusione. Questo fenomeno lo possiamo pensare di due tipi: 1-Gli ioni, superata la barriera coulombiana, giungono a interagire nuclearmente. 2-Il nucleo composto decade, dando luogo ai prodotti fissili di reazione. Dunque la probabilitá dell'intero processo puó essere scritta come segue:

$$P = \sigma(V) V = P_c P_N$$

dove  $P_c$  é la probabilitá che avvenga il punto 1, e viceversa  $P_N$ . Si trova che per temperature caratteristiche, l'energia delle particelle interagenti é in ogni caso inferiore all'altezza della barriera coulombiana, e che per avere energia sufficiente le particelle dovrebbero avere una velocitá superiore a quella della luce. Ció significa che classicamente l'interazione nucleare é proibita. Graficamente abbiamo: (figura) Per la distribuzione di Maxwell, si ottiene:

$$E_T = \frac{3}{2} kT \approx 1 \text{KeV}$$

Quindi statisticamente nessuna particella riesce ad avvicinarsi a un'altra per una distanza inferiore a circa  $e^2/E_T$ . Ma usando la meccanica quantistica si dimostra che la barriera coulombiana non é un limite invalicabile ma é

una probabilità, bassa, ma diversa da zero, che alcune particelle riescano a interagire nuclearmente, e quindi ad attraversare la barriera (effetto Tunnel). La probabilità di penetrazione  $P_c(V)$  è del tipo:

$$P_c(V) \sim e^{\left(\frac{-4\pi^2 Z_1 Z_2 e^2}{h v}\right)} \quad (\text{Penetrazione di Gamov}) \quad (4.29)$$

dove si mostra la rapida caduta della probabilità al decrescere della velocità delle particelle e al crescere dei numeri elettronici. Questo spiega perché nelle fusioni stellari sono favoriti elementi più leggeri. L'altro fattore importante è  $P_N$  che spesso presenta la maggiore incertezza nel calcolo del numero di processi di reazione avvenuti. Nel caso stellare in cui entrambi i gruppi di particelle sono termalizzati, anche le mutue velocità possono essere ricondotte a una distribuzione maxwelliana. Introducendo  $V = |v_i - v_j|$ , parliamo di  $N(V)$  come una grandezza tale che moltiplicata per un intervallo infinitesimo di velocità restituisce il numero di coppie di particella che hanno quella mutua velocità, e la sua espressione è la seguente:

$$N(V) = N_i N_j \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{V^2 \mu^{\frac{3}{2}}}{(kT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\mu V^2}{2kT}} \quad (4.30)$$

dove  $\mu$  è la massa ridotta, tipica di sistemi a due corpi. Volendo calcolare il numero totale di reazioni avvenute  $\nu$ :

$$\nu = \int_0^{+\infty} N(V) (P_c P_N) dV = \int_0^{+\infty} N(V) (\sigma(V)V) dV = \int_0^{+\infty} N_i N_j n(V) P dV. \quad (4.31)$$

dove abbiamo definito  $N(V) = N_i N_j n(V)$ . Grafichiamo gli andamenti di  $n(V)$  e  $P = \sigma(V)V$ : (figura). Il picco di *Gamov* rappresenta quel valore dell'energia che massimizza il prodotto tra le funzioni integrande, e di conseguenza il numero di reazioni avvenute. La quantità di energia rilasciata dal sistema dopo  $\nu$  fusioni è:

$$\nu = \nu Q \quad (4.32)$$

## 4.4 Cenni sui plasmi e i reattori a fusione

In questo capitolo vogliamo solo dare delle brevissime considerazioni finali per fornire un quadro generale. Parlare di meccanica quantistica e meccanica relativistica è il necessario punto di partenza dal momento in cui ci si pone l'obiettivo di andare a lavorare su alcune notevoli applicazioni di alta tecnologia. In questo paragrafo parliamo di quello che è a buon titolo il quarto stato della materia, ossia il plasma. La maggior parte della materia nell'universo si presenta in realtà nello stato di plasma. Sulla terra un esempio di plasmi possono essere i fulmini. Un plasma è un sistema la cui dinamica è dominata dalle forze elettromagnetiche, ed è l'insieme delle particelle cariche e dei campi da esse generati. In sostanza potremmo dire di avere un fluido, e quindi le equazioni generali atte alla descrizione di un tale sistema sarebbero le equazioni di *Navier - Stokes*, ma che devono tenere conto del termine di azione a distanza dovuto all'interazione elettromagnetica. Come abbiamo accennato il sole è fatto di plasma, e tra le particelle che costituiscono il plasma possono avere luogo reazioni nucleari. Lo stato di plasma viene raggiunto spontaneamente nella materia per temperature che raggiungono e superano  $T \approx 10^4 K$  una volta instauratosi l'equilibrio, quando l'agitazione termica è sufficientemente energetica da permettere un'elevata ionizzazione. La disciplina che studia la fisica dei plasmi viene chiamata *Magnetoidrodinamica*. Il modello magnetoidrodinamico può essere schematizzato come segue:

- Equazioni del campo elettromagnetico (equazioni di Maxwell);

- Equazioni di *Navier – Stokes* includendo le forze elettrodinamiche (forza di Lorentz);
- equazioni che collegano le proprietà dinamiche ed elettrodinamiche del fluido, campi, correnti, conducibilità elettrica, conducibilità termica e coefficienti di trasporto in genere, alle grandezze macroscopiche, temperatura, densità, pressione, velocità.

L'applicazione industriale del plasma sulla quale vogliamo porre l'attenzione è la produzione energetica, e in particolare il controllo delle reazioni di fusione nucleare. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, tali reazioni generano energia per difetto di massa, e possono avvenire quando la temperatura del plasma è sufficientemente elevata, perché in questo modo si ha una probabilità accettabile che per effetto tunnel possa avvenire una interazione a livello nucleare. Quindi se immaginiamo un reattore all'interno del quale possa avvenire in modo controllato un tale processo dobbiamo tenere conto delle condizioni fisiche che lo innescano. Per questo si parla di confinamento magnetico. Il plasma, essendo caratterizzato da proprietà di interazione elettromagnetica, va tenuto in sospensione nel reattore senza che questo tocchi le pareti del reattore stesso, perché non esistono materiali in grado di sopportare le temperature tipiche di questi processi (parliamo di milioni di Kelvin). Questo modo di procedere serve per inibire il trasferimento di calore. Evitando il contatto diretto si inibiscono la conduzione e la convezione, e inoltre essendo l'irraggiamento una modalità di trasferimento di energia mediante onde elettromagnetiche, il campo nel reattore serve anche a incanalare l'energia radiante. Attualmente la sfida è quella di riuscire a realizzare un reattore che sia in primis sicuro, e nel fare questo che riesca a produrre energia con bilancio netto positivo, in quanto per innescare le reazioni di fusione è necessario spenderne moltissima.



# Conclusioni

Questa tesi ha avuto l'obiettivo (almeno lo si spera) di mostrare un modello di approccio allo studio di tutti quei fenomeni che devono essere studiati con teorie che vanno oltre la fisica classica, e che inoltre hanno notevoli implicazioni anche e soprattutto a livello tecnologico-ingegneristico. Ne siamo convinti perché buona parte degli ingegneri al giorno d'oggi si trovano costantemente a dover avere a che fare con effetti quantistici e relativistici, e in futuro questo sarà sempre più vero.

In ragione di ciò, non si sta affermando che l'ingegnere deve avere le competenze matematiche e fisiche per una trattazione puramente speculativa, ma essere in grado di possedere le conoscenze concettuali che ci hanno condotto a parlare dell'equazione di Schrodinger esattamente come mostrare che i numeri quantici esistono per un'esigenza del modello matematico, come la Natura pur di mantenersi parzialmente conoscibile genera una pressione che opponendosi alla gravità rende la sua struttura stabile.

Tali aspetti contribuiscono alla formazione culturale dell'ingegnere. Basti pensare al fatto che per la fisica classica le fusioni nucleari non dovrebbero esistere, i decadimenti non dovrebbero esistere, molte delle stelle che vediamo in cielo non dovrebbero esistere. Lo studio di questi fenomeni è alla base di notevoli applicazioni nel campo ingegneristico.



# Ringraziamenti

Alla mia famiglia, che mi ha sostenuto in questi anni di studio.





# Bibliografia

- [1] Mencuccini C., Silvestrini V. Fisica I - Meccanica Termodinamica, Liguori editore
- [2] Mencuccini C., Silvestrini V. Fisica II - Elettromagnetismo Ottica, Liguori editore
- [3] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifshits Fisica teorica II, Riuniti editore
- [4] Jackson J.D., Elettrodinamica classica, Zanichelli
- [5] Ugarov V.A., Special Theory of Relativity, MIR
- [6] Spolskij E.V., Fisica Atomica vol. 1, MIR - Editori Riuniti
- [7] Bernardini C., Guaraldo C., Fisica del nucleo, MIR - Editori Riuniti
- [8] Sitenko A.G., Tartakovskij V.K., Lezioni di teoria del nucleo, MIR - Editori Riuniti
- [9] Cohen-Tannaoudji C., Diu B., Laloe F., Quantum mechanics vol. 1, John Wiley & Sons
- [10] Kaplan I., Nuclear physics, Addison-Wesley Publishing Company