

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA



**Studio della Meccanica Relativistica con  
Applicazione ai Fenomeni di Decadimenti in Fisica  
Nucleare e Subnucleare**

TESI DI LAUREA  
IN  
INGEGNERIA ENERGETICA

DI  
Pasquale Ragno  
864/188

29 Maggio 2015

RELATORE  
prof. Arturo Stabile

CORRELATORE  
prof. Stefania Petracca

Anno Accademico

2013 - 2014



*Alla mia famiglia*



# Indice

<b>Convenzioni e simboli matematici</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Introduzione</b>	<b>vii</b>
<b>1 Elettromagnetismo e crisi della Meccanica di Newton</b>	<b>1</b>
1.1 La meccanica di Newton . . . . .	1
1.2 Le trasformazioni di Galilei . . . . .	2
1.3 L'elettromagnetismo di Maxwell . . . . .	6
1.4 Non covarianza dell'elettromagnetismo per il boost di Galilei . . . . .	7
1.5 L'esperienza di Michelson e Morley . . . . .	9
1.6 Trasformazioni relativistiche per il boost di Lorentz . . . . .	11
1.7 Misura relativistica del tempo e dello spazio . . . . .	15
<b>2 Cinematica e Meccanica Relativistica</b>	<b>17</b>
2.1 Trasformazione di velocità ed accelerazione . . . . .	17
2.2 Spazio di Minkowski . . . . .	19
2.3 Quadrivettori e tensori . . . . .	21
2.4 Dinamica relativistica . . . . .	25
2.5 Decadimento di particelle . . . . .	29
2.6 Covarianza dell'elettromagnetismo . . . . .	30
<b>3 Teoria del nucleo</b>	<b>35</b>
3.1 Lo scattering Rutherford . . . . .	35
3.2 Sezione d'urto . . . . .	39
3.3 Protoni e neutroni . . . . .	40
3.4 Spettrografo di massa . . . . .	41
3.5 Statistiche degli isotopi . . . . .	43
3.6 Energia di legame . . . . .	44
3.7 Processo di decadimento . . . . .	46
3.8 Decadimento alfa . . . . .	49
3.9 Decadimento beta . . . . .	52
3.10 Modello semiempirico delle masse . . . . .	53
3.11 Famiglie radioattive . . . . .	56

<b>4</b>	<b>Reazioni nucleari</b>	<b>59</b>
4.1	Classificazione degli urti relativistici . . . . .	59
4.2	Energia di soglia . . . . .	60
4.3	Urto relativistico inclusivo . . . . .	62
4.4	Fissione nucleare . . . . .	66
4.4.1	Fissione indotta da neutroni . . . . .	68
4.4.2	Fissione dell'uranio . . . . .	69
4.5	Fusione . . . . .	70
4.5.1	Fusione in laboratorio . . . . .	71
4.5.2	Il Sole: la centrale a fusione nucleare . . . . .	73
4.6	Reattori nucleari . . . . .	73
4.6.1	Reattori a fissione nucleare . . . . .	74
4.6.2	Reattori a fusione nucleare . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Misura vita media del muone</b>	<b>77</b>
5.1	Raggi cosmici . . . . .	77
5.2	Come fermare il muone e misurarne la vita media . . . . .	79
5.3	Lavoro svolto in laboratorio . . . . .	82
	<b>Conclusioni</b>	<b>87</b>
	<b>Appendice A: Problema di Keplero</b>	<b>89</b>
	<b>Appendice B: Effetto Tunnel</b>	<b>91</b>
5.3.1	Stati stazionari . . . . .	92
5.3.2	Problemi unidimensionali . . . . .	93
	<b>Appendice C: Tavola periodica</b>	<b>97</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>99</b>

# Convenzioni e simboli matematici

Vettore:  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$

Modulo di un vettore:  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

Prodotto vettoriale:  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

Prodotto scalare:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

Quadrivettore in forma controvariante:  $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \mathbf{A})$

Quadrivettore in forma covariante:  $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -\mathbf{A})$

Tensore metrico:  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

Convenzione di Einstein:  $\sum_{\alpha, \beta=1}^3 A^\alpha B_\alpha^\beta = A^\alpha B_\alpha^\beta$

Passaggio tra quadrivettore covariante e controvariante:  $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu, A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$

Invariante relativistico (o modulo di un quadrivettore):  $A_\mu A^\mu = A^\mu A_\mu = A^{0^2} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$





# Abstract

Lo scopo del presente lavoro di tesi é lo studio analitico dei fenomeni nucleari propedeutici al successivo studio (laurea magistrale) degli aspetti ingegneristici connessi agli impianti nucleari. La parte iniziale del lavoro ha coperto lo studio dei fenomeni fisici che vanno dall'Elettromagnetismo di Maxwell (e crisi della meccanica newtoniana) all'impianto teorico della Relativit  Ristretta. Si   passato, quindi, nella parte centrale allo studio della teoria del nucleo per comprendere la sua struttura con modelli classici per la stabilit  e con modelli quantistici per i decadimenti fondamentali. La dinamica tra particelle   stata analizzata con lo studio degli urti relativistici dando spiegazione in termini del cosiddetto difetto di massa. Si   affrontato, quindi, gli argomenti pi  direttamente connessi all'interesse energetico: la fissione e fusione nucleare e le possibili applicazioni. Un'analisi dell'attuale stato dell'arte sui reattori nucleari   stata riportata. Infine come caso studio con relative simulazioni e misure in laboratorio (presso il Dipartimento di Fisica - Universit  degli Studi di Salerno)   stata svolta l'esperienza della misura dei tempi di decadimento della particella subnucleare di origine extraterrestre denominata *muone*.

Pasquale Ragno<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>e - mail address: pako.ragno91@libero.it



# Introduzione

*La fisica si occupa di descrivere e interpretare i fenomeni naturali utilizzando da un lato il metodo scientifico per l'analisi e la verifica, e dall'altro la matematica quale linguaggio universale con cui tradurre in concetti logico-deduttivo i fenomeni stessi.*

Tale approccio si è rivelato un formidabile strumento per allargare e approfondire la conoscenza umana in vastissime categorie dei fenomeni naturali: dal piano inclinato di Galilei nel XVII secolo alle teorie dell'infinitamente piccolo e dell'infinitamente grande del XXI secolo. Tra tutti i fenomeni osservati e studiati in questi ultimi circa 350 anni rientrano, rivestendo anche ruoli geopolitici mondiali, i fenomeni nucleari ed in particolare le reazioni di fissione e fusione nucleare. Soffermandoci sull'aspetto energetico le reazioni nucleari sono ad oggi per molti paesi industrializzati una fonte di energia alternativa ai combustibili fossili e la costruzione di sempre più nuove, e tecnologicamente avanzate, centrali nucleari è una sfida tecnologica per il XXI secolo. In questo solco si inseriscono anche alcuni degli obiettivi della formazione culturale degli ingegneri energetici.

Considerato che, durante lo svolgimento della prima fase del percorso universitario per ovvie e condivisibili ragioni di confinamento temporale e di argomenti non è possibile spingersi, nella direzione della fisica di base, oltre l'elettromagnetismo di Maxwell (nella sua formulazione "newtoniana"), in vista dei corsi della laurea specialistica in Ingegneria Energetica e per un mio personale interesse in una specializzazione nell'ambito dei reattori nucleari e delle centrali nucleari in generale, questo lavoro di tesi si giustifica nell'ottica di una preparazione propedeutica allo studio successivo degli aspetti ingegneristici.

Per quanto riguarda gli argomenti di fisica è stata data particolare cura nel procedere con lo sviluppo della fisica del XX secolo partendo dalle conoscenze consolidate, acquisite durante la prima fase di studi e che terminano oggi con questo lavoro, e spingendomi ad esplorare i nuovi campi della fisica unitamente al corrispondente bagaglio matematico, necessari per una migliore comprensione delle problematiche ingegneristiche e tecnologiche dei reattori nucleari.

Nel primo capitolo ho analizzato, partendo dalle leggi della dinamica di Newton e dalle leggi dell'elettromagnetismo di Maxwell, l'incongruenza teorica e sperimentali di queste leggi quando esse sono applicate in contesti microscopici oppure in regimi cinematici prossimi alla velocità della luce. Tali discordanze tra previsioni teoriche ed evidenze sperimentali sono state superate appunto generalizzando le conoscenze pregresse inserendo concetti più generali. Ed ecco quindi la nascita della Relatività Ristretta di Einstein quale risposta all'evidenza sperimentale della non validità delle leggi di composizione di Galilei e la costanza della velocità della luce (esperimento di Michelson e Morley).

Nel secondo capitolo la dinamica di Newton è stata riscritta giungendo all'equivalenza massa - energia e quindi al cosiddetto *difetto di massa*. Lo studio della Relatività Ristretta è stato accompagnato dall'introduzione dello spazio di Minkowski e dei quadrivettori. Questi ultimi sono uno strumento matematico che da un lato generalizza il concetto di vettore tridimensionale, dall'altro, invece, rende molto agevole lo studio degli urti in fisica nucleare e l'immediata stima dell'energie in gioco. Per una completezza nella trattazione reinterpreteremo l'elettromagnetismo in chiave relativistica giungendo ad una semplificazione delle equazioni di Maxwell.

Nel terzo capitolo l'attenzione passa alla struttura dell'atomo ed in particolare al nucleo (esperienza Rutherford). Si prosegue, quindi, con un'analisi qualitativa della composizione del nucleo introducendo i protoni e neutroni ed andando poi a misurare la deviazione di traiettoria che descrivono i nuclei in relazione alla loro massa (spettrografo di massa). A questo punto è possibile classificare gli isotopi e studiare la stabilità dei nuclei ed introdurre i decadimenti alfa, beta e gamma. Per il decadimento beta sono necessari strumenti matematici della teoria dei campi, mentre per la radiazione gamma bisogna studiare i livelli energetici del nucleo utilizzando una meccanica quantistica più robusta. In entrambi i casi questo esulerebbe troppo dall'intento preposto. Concludiamo il capitolo con il modello semiempirico (una trattazione classica) dell'energia di legame in un nucleo che restituisce un'ottima interpretazione della fisica nucleare.

Nel quarto capitolo si analizzano gli urti relativistici con le varie classificazioni e si prosegue, nello stesso, analizzando la fissione e la fusione nucleare, nonché le svariate applicazioni che si hanno di tale fenomeni nel campo ingegneristico e in Natura. Il capitolo termina con una panoramica sullo stato attuale delle centrali nucleari e su quale sarà la direzione da intraprendere per la tecnologia della prossima generazione di centrali.

Nell'ultimo capitolo sarà esposta la natura dei raggi cosmici e i loro processi di decadimento. Tra queste particelle vi è il muone del quale è possibile misurarne la vita media. La tesi si conclude, quindi, riportando l'esperienza svolta in laboratorio con annessa spiegazione degli strumenti utilizzati per la misura sperimentale.

Di fondamentale importanza per la comprensione di tutti i fenomeni trattati sono le appendici in cui vi è esposto il *problema di Keplero* per ricavare teoricamente la distribuzione angolare sperimentalmente ottenuta dall'esperienza di Rutherford e l'*effetto tunnel* che è alla base della comprensione del decadimento alfa.

# Capitolo 1

## Elettromagnetismo e crisi della Meccanica di Newton

In questo capitolo esporremo i principi della dinamica di Newton e come le equazioni della dinamica sono covarianti per trasformazioni di Galilei tra sistemi di riferimento. Questa covarianza non é possibile per l'elettromagnetismo di Maxwell ponendo una questione teorica sull'incongruenza tra le teorie esposte. L'esperienza di Michelson e Morley pone fine evidenziando come le trasformazioni di Galilei (e di conseguenza la teoria di Newton) sono inadatte a descrivere i fenomeni fisici le cui velocità sono prossime a quella della luce. Ricaveremo quindi le trasformazioni di Lorentz (generalizzazione di quelle di Galilei) che sono alla base della teoria della Relatività Ristretta di Einstein e concluderemo il capitolo mostrando il fenomeno della dilatazione dei tempi e della contrazione delle lunghezze.

### 1.1 La meccanica di Newton

L'opera di Newton é universalmente accettata come il punto di partenza dello sviluppo moderno della Fisica, in quanto enunciando le leggi della dinamica, completa l'opera dei suoi predecessori ed apre la strada a tutti gli studi successivi. La meccanica newtoniana si basa su tre principi fondamentali:

- Primo principio della dinamica (Detto anche principio di inerzia): *In un sistema inerziale, un corpo libero, cioè non sottoposto ad alcuna forza, mantiene il suo stato di moto rettilineo uniforme o di quiete finché non interviene una forza esterna a variare tale moto.* Questo principio é in realtà una conseguenza del principio di relatività, ma non vale il viceversa.
- Secondo principio della dinamica: *In un sistema di riferimento inerziale una forza impressa ad un corpo produce una variazione della sua quantità di moto nel verso della forza in maniera direttamente proporzionale alla forza applicata, cioè in formula*

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.1)$$

Nel caso di masse costanti il secondo principio ha una formulazione ridotta, che é quella piú nota: *L'accelerazione di un corpo é direttamente proporzionale alla forza da esso subita.* La costante di proporzionalità tra la forza e l'accelerazione é detta massa inerziale  $m_i$ . In simboli questo principio si riassume nella nota formula

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a} \tag{1.2}$$

- Terzo principio della dinamica: *in un sistema di riferimento inerziale, la quantità di moto e il momento angolare totale rispetto ad un polo fisso di un sistema materiale libero (cioé non sottoposto a forze esterne) si conservano. Da ciò discende il principio di azione e reazione: ad ogni azione corrisponde una reazione, uguale e contraria, agente sulla stessa retta di applicazione:*

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 \tag{1.3}$$

Ai principi di Newton si affianca, nella meccanica classica, il principio di relatività di Galilei che stabilisce la covarianza delle leggi della meccanica sotto cambiamenti di sistemi di riferimento, dette appunto trasformazioni galileiane.

## 1.2 Le trasformazioni di Galilei

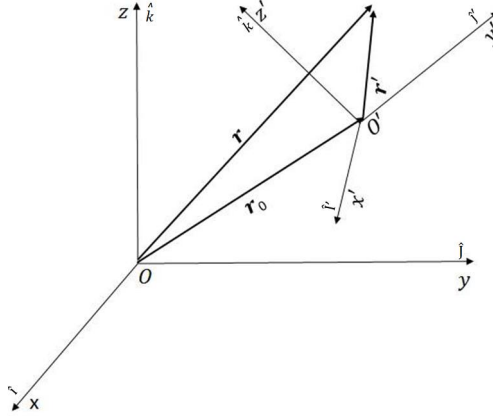
Le trasformazioni di Galilei sono strettamente collegate a quello che viene chiamato "principio di relatività Galileiano", secondo il quale risulta *impossibile determinare la velocità assoluta di un sistema di riferimento inerziale mediante esperimenti puramente meccanici*. Tale principio può essere sinteticamente formulato come segue:

- gli intervalli temporali sono gli stessi in tutti i sistemi inerziali;
- le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali.

Le trasformazioni di Galilei, in particolare, possono essere ricavate come conseguenza diretta di queste ipotesi. Il principio di relatività Galileiano sta dunque alla base della descrizione Newtoniana dei fenomeni dinamici, ma come vedremo successivamente non é compatibile coi fenomeni elettromagnetici descritti dalle equazioni di Maxwell.

Galilei mise a punto delle regole di trasformazione che permettevano di traslare l'analisi da un osservatore ad un altro. Inoltre quando si effettua una misura di un dato evento fisico in due riferimenti diversi, i due osservatori essendo lontani l'uno dall'altro devono scambiarsi dei segnali. Galilei era perfettamente conscio di tale problema, tanto che provó a misurare la velocità della luce fra due osservatori che comunicavano tramite segnali luminosi con delle lanterne. *Ne dedusse che la velocità della luce era rapidissima archiviando la questione come irrilevante ai fini pratici*. Si noti quindi che la quarta coordinata, il tempo, deve essere la stessa sia in sistemi inerziali che non inerziali. Cioé nell'ambito della meccanica classica tutti gli orologi marciano con lo stesso ritmo, di conseguenza gli intervalli temporali fra due eventi successivi saranno gli stessi per entrambi gli osservatori e la misura di un qualsiasi evento fisico avverrà sempre simultaneamente per tutti gli osservatori. Benché questa ipotesi sia ovvia, essa risulta non essere corretta quando si ha a che fare con situazioni in cui la velocità é confrontabile con la velocità della luce.

Si considerino allo scopo due riferimenti,  $S$  ed  $S'$ , di cui  $S'$  mobile di moto vario rispetto ad  $S$ . Si supponga inoltre che gli osservatori solidali ad  $S$  e  $S'$  siano dotati di due orologi per la misura dei tempi, preventivamente sincronizzati in modo che, per esempio, quando  $O$  coincide con  $O'$  entrambi gli orologi segnino zero. I riferimenti rispetto ai quali calcoleremo le grandezze fisiche sono i versori dei due sistemi:  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  che considereremo fissi nello spazio e  $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$  liberi di ruotare nello spazio ed in generale non paralleli alla terna di  $S$  (vedi figura 1.1).



**Figura 1.1:** Moto relativo tra due sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$  di origine rispettivamente  $O$  e  $O'$ . Il sistema  $S$  è considerato fisso (solidale con il laboratorio), mentre il sistema  $S'$  si muove di moto vario (può accelerare traslazionalmente e ruotare uniformemente e non lungo una qualsiasi combinazione di assi).

Siano  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  e  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  rispettivamente i vettori posizione di un generico punto rispetto al sistema  $S$  ed  $S'$  e la posizione dell'origine del sistema  $S'$  rispetto a  $S$ . Per la regola della somma vettoriale i tre vettori posizione devono soddisfare la condizione

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \quad (1.4)$$

che in termini delle terne di versori può essere riscritta come

$$x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}' = (x - x_0) \hat{i} + (y - y_0) \hat{j} + (z - z_0) \hat{k} \quad (1.5)$$

Moltiplicando scalarmente la (1.5) rispettivamente per  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$ ,  $\hat{k}'$  abbiamo

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \hat{i} \cdot \hat{i}' + (y - y_0) \hat{j} \cdot \hat{i}' + (z - z_0) \hat{k} \cdot \hat{i}' \\ y' = (x - x_0) \hat{i} \cdot \hat{j}' + (y - y_0) \hat{j} \cdot \hat{j}' + (z - z_0) \hat{k} \cdot \hat{j}' \\ z' = (x - x_0) \hat{i} \cdot \hat{k}' + (y - y_0) \hat{j} \cdot \hat{k}' + (z - z_0) \hat{k} \cdot \hat{k}' \end{cases} \quad (1.6)$$

che, introducendo la cosiddetta matrice delle rotazioni

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \hat{i} \cdot \hat{i}' & \hat{j} \cdot \hat{i}' & \hat{k} \cdot \hat{i}' \\ \hat{i} \cdot \hat{j}' & \hat{j} \cdot \hat{j}' & \hat{k} \cdot \hat{j}' \\ \hat{i} \cdot \hat{k}' & \hat{j} \cdot \hat{k}' & \hat{k} \cdot \hat{k}' \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

può essere riscritto come un prodotto riga per colonna

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

La matrice delle rotazioni  $\mathcal{R}$  tiene conto dei coseni degli angoli formati tra i versori del sistema  $S$  ed  $S'$ .

Nell'ipotesi che il sistema mobile sia in moto di traslazione (cioé i versori  $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$  sono fissi nello spazio) la matrice  $\mathcal{R}$  é indipendente dal tempo; una relazione analoga deve valere anche per le velocità misurate nei due sistemi. Infatti derivando rispetto al tempo la (1.8) si ottengono facilmente le relazioni per le componenti della velocità

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} v_x - v_{0x} \\ v_y - v_{0y} \\ v_z - v_{0z} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Derivando ulteriormente si ottengono le relazioni per le accelerazioni

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} a_x - a_{0x} \\ a_y - a_{0y} \\ a_z - a_{0z} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Nel caso di un sistema  $S'$  inerziale ( $\mathbf{a}_0 = 0$ ) si ottiene immediatamente la covarianza della legge di Newton (1.2). Infatti moltiplicando il tutto per la massa inerziale  $m_i$  che é invariante per cambi di sistemi si ottiene

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m_i a'_x \\ m_i a'_y \\ m_i a'_z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} m_i a_x \\ m_i a_y \\ m_i a_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m_i a'_x \\ m_i a'_y \\ m_i a'_z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

dove il vettore  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$  é la forza misurata nel sistema  $S$ . Quindi anche tra le forze misurate nei due sistemi inerziali diversi deve esistere la relazione matematica di passaggio

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

dalla quale si evince che se  $\mathbf{F} = 0$  anche  $\mathbf{F}' = 0^1$  (equivalenza tra sistemi di riferimento inerziale). Queste forze se sono diverse da zero lo devono essere in tutti i sistemi di riferimento (spesso vengono definite forze reali).

Nel caso particolare in cui il sistema mobile stia accelerando abbiamo ancora la covarianza dell'equazione di Newton ma a patto di introdurre una forza ulteriore che non é riscontrabile per l'osservatore fisso poiché essa dipende dallo stato dinamico del sistema mobile. Infatti partendo dalla relazione (1.10) abbiamo vettorialmente che

$$m_i \mathbf{a}' = \mathcal{R} \mathbf{F}_{\text{reali}} + \mathbf{F}_{\text{fitt}} \quad (1.13)$$

dove  $\mathbf{F}_{\text{fitt}} = -m_i \mathcal{R} \mathbf{a}_0$  é detta appunto forza fittizia.

<sup>1</sup>Ovviamente tale conclusione é sempre vera e  $\det \mathcal{R} \neq 0$ , ma trattandosi di fenomeni di rotazione per la richiesta che il modulo dei vettori si conservi il determinante deve essere sempre pari ad 1.



Un caso particolare di trasformazione é il cosiddetto boost di Galilei in cui il sistema  $S'$  si muove di moto rettilineo ed i suoi versori sono paralleli a quelli del sistema fisso. In questo caso la matrice di rotazione (1.7) diviene diagonale

$$\mathcal{R}_{\text{boost}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

e il set di equazioni (1.8) per le posizioni e (1.9) per le velocità divengono

$$\begin{cases} x' = x - u t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \quad (1.15)$$

avendo ipotizzato che il sistema mobile si stia muovendo con velocità in modulo pari ad  $u$  lungo l'asse  $\hat{i}$ .

Per concludere questa breve trattazione delle trasformazioni galileiane resta da considerare il caso generale in cui il sistema mobile può anche ruotare oltre che traslare. Per comprendere la seguente trattazione é fondamentale notare innanzitutto che nel sistema mobile l'osservatore quando effettua una misura di velocità ed accelerazione considera che i versori di  $S'$  siano fissi (dal suo punto di vista). Ciò vuol dire che ogni misura di velocità ed accelerazione saranno sempre "affette" da fenomeni di trascinamento dovuti al moto del sistema mobile.

Il punto di partenza é la relazione sulle posizioni (1.5) dalle quali effettuando la derivata temporale otteniamo

$$\begin{aligned} v'_x \hat{i}' + v'_y \hat{j}' + v'_z \hat{k}' + x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \frac{d\hat{k}'}{dt} = \\ = (v_x - v_{0x}) \hat{i} + (v_y - v_{0y}) \hat{j} + (v_z - v_{0z}) \hat{k} \end{aligned} \quad (1.16)$$

dove la velocità misurata dall'osservatore mobile é data da  $\mathbf{v}' = v'_x \hat{i}' + v'_y \hat{j}' + v'_z \hat{k}'$ . Utilizzando la nota formula di Poisson per le derivate dei vettori rotanti abbiamo

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega}_{\hat{j}'\hat{k}'} \times \hat{i}', \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega}_{\hat{i}'\hat{k}'} \times \hat{j}', \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega}_{\hat{i}'\hat{j}'} \times \hat{k}' \quad (1.17)$$

dove  $\vec{\omega}_{\hat{j}'\hat{k}'} = (0, \omega_y, \omega_z)$ ,  $\vec{\omega}_{\hat{i}'\hat{k}'} = (\omega_x, 0, \omega_z)$ ,  $\vec{\omega}_{\hat{i}'\hat{j}'} = (\omega_x, \omega_y, 0)$ . Introducendo il vettore velocità angolare  $\mathbf{\Omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  (velocità angolare dei versori mobili rispetto al sistema fisso) l'equazione (1.16) diviene

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}' \quad (1.18)$$

dove  $\mathbf{v}_0$  é la velocità di trascinamento traslazionale e  $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'$  é la velocità di trascinamento rotazionale del sistema mobile. Derivando ulteriormente otteniamo l'accelerazione. Sfruttando ancora la relazione di Poisson otteniamo

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 - \alpha \times \mathbf{r}' - \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}') - 2 \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t - \mathbf{a}_c \quad (1.19)$$

dove  $\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_0 + \alpha \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')$  é l'accelerazione di trascinarsamento che tiene conto della componente traslazionale, centripeto e tangenziale, mentre  $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'$  é l'accelerazione di Coriolis.

Infine moltiplicando per la massa inerziale ambo i membri della (1.19) e considerato che nel sistema fisso é valida l'equazione di Newton (1.2)

$$m_i \mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\text{reali}} + \mathbf{F}_{\text{fitt}} \quad (1.20)$$

dove  $\mathbf{F}_{\text{fitt}} = -m_i (\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c)$ . Anche nel caso piú generale abbiamo riottenuto la covarianza dell'equazione di Newton anche per sistemi di riferimento non inerziali dove apparentemente sembrerebbe violato il principio di inerzia. Il tutto ritorna a patto di associare ai sistemi di riferimento non inerziali delle forze non reali che si possono sperimentalmente testare soltanto in tali sistemi.

Concludiamo quindi questa panoramica affermando che l'equazione di Newton é covariante per forma rispetto alle trasformazioni galileiane. Non é richiesto quindi che le equazioni della fisica siano uguali nelle quantitá fisiche bensí nelle relazioni matematiche che legano tali quantitá.

### 1.3 L'elettromagnetismo di Maxwell

I fenomeni elettromagnetici nella loro vastitá di applicazione e nel loro smisurato campo di validitá sono riassumibili in pochissime leggi matematiche. In particolare le cosiddette leggi di Maxwell (contraltare della legge di Newton per i fenomeni meccanici) sono la base dell'elettromagnetismo per come oggi lo conosciamo fin dalla metá del secolo XIX. In formule abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \quad (\text{a}) & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad (\text{b}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad (\text{c}) & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J} \quad (\text{d}) \end{aligned} \quad (1.21)$$

dove i cosiddetti campi fisici sono il campo di induzione elettrica  $\mathbf{D}$  ed il campo magnetico  $\mathbf{H}$  che sono connessi rispettivamente alle sorgenti densitá di carica  $\rho$  (1.21-a) e densitá di corrente  $\mathbf{J}$  (1.21-d). L'operatore nabla é l'usuale vettore  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ . Ai campi  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  sono associati il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e quello di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  che non sono indipendenti ma sono legati dall'equazione (1.21-b) ed infine l'equazione (1.21-c) che assicura la non esistenza dei monopoli magnetici.

Al set di equazioni differenziali alle derivate parziali bisogna aggiungere ancora quattro equazioni. Le prime due sono equazioni costitutive che legano il campo elettrico a quello di induzione elettrica e quello magnetico a quello di induzione magnetica. In queste relazioni compaiono le proprietá della materia in cui le equazioni di Maxwell vengono studiate

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}}{\mu_0} \quad (1.22)$$

dove  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  sono rispettivamente la costante dielettrica del vuoto e la permeabilitá magnetica del vuoto. I campi  $\mathbf{P}$  ed  $\mathbf{M}$  sono la polarizzazione e la magnetizzazione del materiale. Nel caso di materiali isotropi le relazioni (1.22) divengono

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (1.23)$$

dove  $\epsilon$  e  $\mu$  sono relative al materiale.

La terza equazione determina per la conservazione della carica elettrica

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.24)$$

e per concludere resta l'equazione di forza che accoppia i campi elettromagnetici alla materia. Questa é la cosiddetta forza di Lorentz per la quale ogni particella dotata di una carica  $q$  ed immersa in un campo elettromagnetico ne risente. In formula abbiamo

$$\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.25)$$

da cui l'accelerazione subita dalla carica  $q$  (essendo dotata di massa  $m_i$ ) é la seguente

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m_i}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.26)$$

Nel caso in cui l'analisi avviene nel vuoto ( $\mathbf{P} = 0$ ,  $\mathbf{M} = 0$ ) le equazioni (1.21) collassano nelle piú note espressioni

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{a}) & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad (\text{b}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad (\text{c}) & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{d}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

dove abbiamo introdotto la velocità della luce  $c$  nel vuoto come  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ .

## 1.4 Non covarianza dell'elettromagnetismo per il boost di Galilei

Essendo le equazioni di Maxwell anch'esse delle leggi fisiche fu automatico chiedere se fossero o meno covarianti per trasformazioni di Galileo. Indipendentemente dalla motivazione speculativa vi era al tempo una motivazione ancora piú pratica. Infatti le equazioni di Maxwell sottendono una propagazione ondosa (le onde elettromagnetiche) la cui velocità nel vuoto é pari a  $\sim 3 \cdot 10^5$  Km/s. Tuttavia tali equazioni sono scritte e sembrano valide in ogni sistema di riferimento. In particolare non sta scritto da nessuna parte in quale sistema di riferimento la velocità di propagazione doveva essere tale.

Altro aspetto teorico non secondario era la consapevolezza che i fenomeni elettrici e magnetici doveva essere intercambiabili poiché la carica elettrica, sorgente del campo elettrico, in un dato sistema di riferimento può risultare in movimento per un altro osservatore. Osservatore che dal suo punto di vista non vede una carica ferma (quindi un campo elettrico nello spazio circostante) ma una corrente e di conseguenza misura un campo magnetico.

Riportiamo con un semplice calcolo di come le trasformazioni di Galilei non garantiscono la covarianza in forma delle equazioni di Maxwell (1.21). Innanzitutto costruiamo a partire dalle equazioni di Maxwell nel vuoto (1.27) l'equazione per le onde elettromagnetiche applicando il rotore alle due equazioni di destra

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ -\Delta \mathbf{B} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{c^2} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\Delta \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \\ -\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

avendo sfruttato la relazione  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\Delta \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$  (relazione analoga per  $\mathbf{B}$ ). Riutilizzando le equazioni di Maxwell abbiamo le equazioni d'onda per la propagazione del campo elettrico e del campo magnetico

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{B} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \square \mathbf{E} = 0 \\ \square \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

dove  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  é il d'alambertiano e  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  é il laplaciano.

Consideriamo ora il boost di Galileo (1.15) tra due sistemi di riferimento inerziali  $S$  e  $S'$ . Costruiamo il d'alambertiano nel sistema di riferimento mobile. Notiamo innanzitutto che sono valide le seguenti relazioni (se é vero il teorema sull'inversione dell'ordine differenziale)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z'} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\mathbf{u} \cdot \nabla' + \frac{\partial}{\partial t'} \right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

grazie alle quali possiamo costruire l'equazione d'onda nel sistema  $S'$

$$\begin{aligned} \square \mathbf{E} &= \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\mathbf{u} \cdot \nabla' + \frac{\partial}{\partial t'} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} \right] \mathbf{E} \\ &= \left[ \frac{1}{c^2} \left( -\mathbf{u} \cdot \nabla' + \frac{\partial}{\partial t'} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z} \right] \mathbf{E} \\ &= \left[ \frac{1}{c^2} \left( -\mathbf{u} \cdot \nabla' + \frac{\partial}{\partial t'} \right) \left( -\mathbf{u} \cdot \nabla' + \frac{\partial}{\partial t'} \right) - \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z'} \right] \mathbf{E} \\ &= \left[ \square' + \frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla')^2}{c^2} - 2 \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right] \mathbf{E} \neq \square' \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.31)$$

da cui si nota come l'equazione ottenuta non é conformemente invariante con la sua equivalente nel sistema  $S'$ . Questo aspetto é in contraddizione con la richiesta di universalitá dell'equazioni fisiche.

Tali equazioni, infatti, definiscono in modo univoco la velocità di propagazione della luce. Le velocità, però, non sono invarianti per trasformazioni di Galilei: passando da un riferimento inerziale ad un altro mediante una di queste trasformazioni la velocità della luce deve cambiare in accordo con la legge di trasformazione (1.18), e dunque deve cambiare la forma delle equazioni di Maxwell. Perció la teoria elettromagnetica di Maxwell non può essere invariante per le trasformazioni di Galilei, al contrario della meccanica Newtoniana.

Il confronto con la covarianza galileiana delle equazioni di Newton ci porta a considerare tre possibili alternative riguardo all'eventuale ruolo giocato da un principio di relativitá che, come quello Galileiano, sancisca l'equivalenza fisica tra sistemi inerziali.

- **Un principio di relatività solo in meccanica** Una prima possibilità è che il principio di relatività sia valido nella sua forma galileiana, ma si applichi solo alle leggi della meccanica e non al resto dei fenomeni fisici. In questo caso possiamo usare le trasformazioni di Galilei tra i sistemi inerziali, e per i fenomeni elettromagnetici possono restare valide le equazioni di Maxwell, senza che questo generi contraddizioni (in linea di principio) con le proprietà di invarianza della dinamica Newtoniana.
- **Modifica galileiana delle equazioni di Maxwell** Una seconda possibilità è che il principio di relatività sia valido nella sua forma galileiana, e si applichi a tutti i fenomeni fisici. In questo caso le trasformazioni di coordinate tra i sistemi inerziali restano quelle di Galilei, ma le equazioni di Maxwell sono da modificare perché nella loro forma originale risultano incompatibili con l'invarianza galileiana.
- **Modifica relativistica delle trasformazioni di Galilei** Una terza possibilità, infine, è che il principio di relatività si applichi a tutti i fenomeni fisici, e che i fenomeni elettromagnetici siano correttamente descritti dalle equazioni di Maxwell. In questo caso è necessario modificare le trasformazioni di coordinate tra i sistemi inerziali, perché le trasformazioni di Galilei non sono compatibili con la teoria di Maxwell. È anche necessario, di conseguenza, modificare la dinamica Newtoniana per avere delle equazioni del moto che siano in accordo con la covarianza rispetto a questo nuovo tipo di trasformazioni.

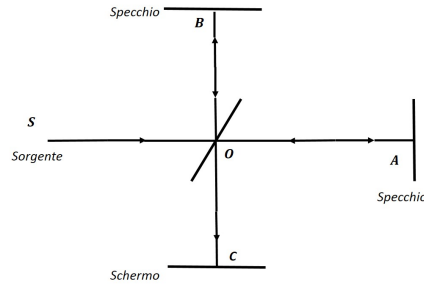
Le tre alternative appena elencate furono in sostanza le tre ipotesi su cui lavorare per eliminare questa discrepanza. A mettere fine alla discussione fu l'esperienza di Michelson-Morley con la quale si dimostrò la costanza della velocità della luce. Inoltre cominciavano ad affiorare una serie di evidenze sperimentali che mettevano sempre più in crisi la meccanica di Newton. Ovviamente la scelta di avere due trasformazioni di sistemi di riferimento per i fenomeni meccanici e quelli elettromagnetici andava esattamente in direzione opposta allo spirito con cui si era giunti alla dimostrazione della non covarianza dell'elettromagnetismo per trasformazioni di Galilei. Dunque l'unica strada percorribile era la modifica delle trasformazioni di Galileo e di conseguenza anche quelle della meccanica. Si cominciava quindi ad avvicinarsi ai fenomeni relativistici.

## 1.5 L'esperienza di Michelson e Morley

Vogliamo riportare alcuni aspetti dell'evidenza fisica della validità della *Relatività Ristretta* (che sarà analizzata nel paragrafo successivo). Innanzi tutto la domanda che è alla base della crisi della meccanica classica consiste nell'individuare il sistema di riferimento rispetto al quale la velocità della luce vale  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$  m/s. Sostanzialmente la domanda a cui rispondere è *in quale sistema di riferimento le equazioni di Maxwell sono valide?* A tal fine si introdusse un "mezzo impalpabile" detto etere, rispetto al quale la velocità è  $c$ . Questo etere avrebbe dovuto riempire tutto lo spazio e presentato delle caratteristiche ideali quali bassa densità ed estrema rigidità (per l'elevata velocità di propagazione). Già queste due proprietà misero in dubbio la validità di tali ipotesi. Poiché sembrò immediatamente improponibile che un materiale soddisfacesse contemporaneamente queste caratteristiche così diverse. A tal fine l'esperimento di Michelson-Morley pose definitivamente la fine della tesi dell'etere.

Tale esperimento aveva come scopo misurare la velocità della luce in diverse direzioni per trovare traccia del cosiddetto vento d'etere, usando a tale scopo uno strumento che successivamente prese il nome di interferometro. L'interferometro permette di suddividere un fascio di luce in due fasci che viaggiano seguendo cammini perpendicolari e vengono poi nuovamente fatti convergere su uno schermo, formandovi una figura di interferenza. Un eventuale vento d'etere avrebbe comportato una diversa velocità della luce nelle varie direzioni e, di conseguenza, uno scorrimento delle frange di interferenza al ruotare dell'apparato rispetto alla direzione del vento d'etere.

*Utilizzando questo dispositivo sperimentale si effettuarono nel 1881 un certo numero di misure, non rilevando lo spostamento minimo previsto per le frange di interferenza.*



**Figura 1.2:** Schematica disposizione del banco ottico (interferometro) per l'esperimento di Michelson-Morley.

Consideriamo l'interferometro in figura 1.2 con sorgente  $S$ , con  $O$  superficie semiriflettente a  $\pi/4$  rispetto al raggio luminoso e gli specchi  $A$  e  $B$  alla stessa distanza  $l$  da  $O$ . Sullo schermo  $C$  arrivano i raggi luminosi che hanno percorso tratti uguali in tempi diversi. In principio ci si aspettava un insieme di righe e frange di interferenza dovute alla differenza di fase fra le onde che hanno diversi tempi di percorrenza.

Riferendosi alla figura (1.3) siano  $c$  la velocità di propagazione assoluta della luce,  $u$  la velocità di trascinamento dell'apparato rispetto all'etere e  $v$  la velocità di propagazione della luce rispetto al sistema del banco ottico. Per evidenti ragioni geometriche abbiamo  $v = c - u$  ed il modulo di  $v$  (lungo l'asse  $x$ ) é data da

$$v = c \cos \varphi - u \cos \theta \tag{1.32}$$

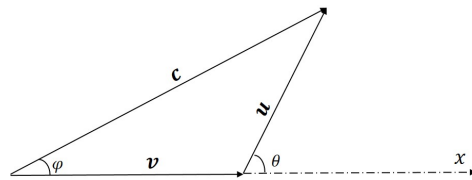
ed il tempo di percorrenza del tratto  $\overline{OA}$  vale

$$t_1 = \frac{l}{c \cos \varphi - u \cos \theta} \tag{1.33}$$

Sul tratto  $A \rightarrow O$  abbiamo semplicemente  $c \rightarrow -c$  quindi  $v' = c' - u$  e  $v' = c \cos \varphi + u \cos \theta$ , pertanto il tempo impiegato a percorrere l'intero percorso vale

$$\Delta t'_1 = t_1 + t'_1 = \frac{2l}{c} \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \varphi - \frac{u^2}{c^2} \cos^2 \theta} \tag{1.34}$$

Notiamo che  $\frac{\sin \varphi}{u} = \frac{\sin(\pi-\theta)}{c}$  da cui  $\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta}$ . Sostituendo ora l'espressione per il coseno nella



**Figura 1.3:** Relazioni tra le velocità della luce rispetto all'etere, rispetto all'apparato sperimentale e la velocità del banco ottico.

(1.34) otteniamo

$$\Delta t'_1 = \frac{2l}{c} \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \approx \frac{2l}{c} \left( 1 + \frac{u^2}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta + \dots \right) \tag{1.35}$$

poiché abbiamo sviluppato in serie di Taylor rispetto alla quantità  $\frac{u}{c} \ll 1$ . Il tempo per il percorso  $O \rightarrow B \rightarrow O$  si calcola allo stesso modo sostituendo semplicemente il seno al coseno ed il coseno con il seno. La differenza di tempo rilevata nel punto  $C$  deve essere quindi

$$\tau = \Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{l}{c} \frac{u^2}{c^2} \cos 2\theta \quad (1.36)$$

A causa di tale intervallo di tempo sullo schermo si creeranno delle frange d'interferenza che in linea di principio dipendono sia dalla velocità di percorrenza dei tragitti sia dalla loro lunghezza. Tuttavia i risultati sperimentali mostrano le frange ma queste non risentono mai della velocità, ma solo delle variazioni del percorso. Tale esperimento è stato ripetuto più volte in laboratorio in modo che questo si muovesse con velocità opposta alla precedente (sei mesi dopo). Ma non vi è mai stata nessuna variazione nelle frange d'interferenza.

Da questo esperimento si dedusse che l'etere non era fisso ma, eventualmente fosse esistito, si sarebbe mosso solidamente alla Terra ed a qualsiasi altro oggetto. Da quest'affermazione quindi, l'etere non aveva più senso di esistere.

## 1.6 Trasformazioni relativistiche per il boost di Lorentz

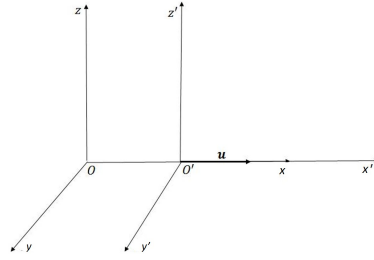
Le trasformazioni di Lorentz nascono per rispondere ad una precisa evidenza sperimentale connessa alla propagazione della luce. Tali evidenze possono essere riassunte nei due principi fondanti della Teoria della Relatività Speciale:

- *Tutti i fenomeni fisici identici si manifestano nello stesso modo nei sistemi di riferimento inerziali a parità di condizioni iniziali.*
- *La velocità della luce nel vuoto è uguale in tutte le direzioni ed in ogni ragione di un dato sistema di riferimento, ed uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Bisogna quindi ricavare la forma matematica delle trasformazioni di coordinate affinché la velocità della luce sia la stessa in tutti i sistemi di riferimento. Come prima conseguenza si ottiene che il tempo diviene un parametro al pari delle coordinate spaziali, dipendendo da altro punto. Al contrario di quanto fatto con le trasformazioni di Galileo (paragrafo 1.2) ora il tempo non è più un parametro assoluto svincolato dallo spazio ma alla stessa stregua delle canoniche coordinate spaziali diviene una coordinata che deve avere delle precise leggi di trasformazione tra sistemi di riferimenti inerziali. A tal fine bisogna passare dalla terna di coordinate  $(x, y, z)$  alla quaterna di coordinate  $(t, x, y, z)$ .

Per semplicità consideriamo il cosiddetto boost di Lorentz (figura 1.4): supponiamo che i due sistemi di riferimenti  $S$  (fisso) ed  $S'$  (mobile ed inerziale) siano con assi  $x$  ed  $x'$  coincidenti in modo da avere immediatamente  $y = y'$  e  $z = z'$  per ogni valore delle coordinate  $t, x$  e che la velocità del sistema mobile sia diretta lungo l'asse  $x$ .

Il punto di partenza quindi è una legge di trasformazione del tipo



**Figura 1.4:** Il sistema mobile si muove con velocità parallela all'asse  $x$  del sistema fisso e gli assi coordinati dei due sistemi sono paralleli. Durante il moto per ogni istante di tempo si avrà sempre  $y = y', z = z'$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = t'(t, x) \\ x' = x'(t, x) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad (1.37)$$

Considerando le proprietà dello spazio, è possibile ottenere delle limitazioni nella forme analitiche della legge di trasformazione (1.37). Infatti le trasformazioni devono essere lineari, poiché la linearità è una conseguenza dell'*omogeneità* e dell'*isotropia* dello spazio. Inoltre la garanzia della linearità permette l'inversione delle trasformazioni in ogni punto dello spazio e se un corpo si muove verso una posizione infinitamente lontana per il sistema di riferimento  $S$  deve esserlo anche per  $S'$ . Quindi la trasformazione (1.37) diviene

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = a_{11} t + a_{12} x \\ x' = a_{21} t + a_{22} x \end{array} \right. \quad (1.38)$$

dove abbiamo ommesso per brevità le relazioni per le coordinate  $y, z$ , mentre  $a_{ij}$ , sono costanti da determinare. Notiamo che se  $a_{12} = 0$  siamo nel caso galileiano (avremmo che i due tempi possono essere al massimo proporzionali). Le costanti  $a_{ij}$  devono essere calcolate al fine di soddisfare quattro proprietà fisiche per la loro univoca determinazione. Infatti abbiamo:

- L'origine  $O'$  del sistema  $S'$  corrisponde alla condizione  $x' = 0$  (nel sistema  $S'$ ) mentre per il sistema fisso  $S$  deve soddisfare la condizione  $a_{21} t + a_{22} x = 0$ . Tuttavia essendo  $u$  la velocità del sistema mobile deve accadere che  $a_{21} + a_{22} u = 0$  (essendo  $u = x/t$  rispetto al sistema  $S$ ).
- Se la velocità di traslazione di  $S'$  è zero, la trasformazione deve ridursi all'identità  $O' \equiv O$ .
- La trasformazione inversa deve essere anch'essa lineare con la sola variazione del segno per la velocità relativa. Quindi invertendo la (1.38) abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} t' - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} x' \\ x = -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} t' + \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} x' \end{array} \right. \quad (1.39)$$



che deve essere formalmente uguale alla trasformazione di partenza avendo semplicemente cambiato il segno alla velocità del sistema mobile cioè uguale a

$$\begin{cases} t = a_{11} t' - a_{12} x' \\ x = -a_{21} t' + a_{22} x' \end{cases} \quad (1.40)$$

- Infine la velocità della luce deve valere  $c$  in tutti i sistemi di riferimento. Cioé

$$c = \frac{x'}{t'} = \frac{a_{21} t + a_{22} x}{a_{11} t + a_{12} x} = \frac{a_{21} + a_{22} x/t}{a_{11} + a_{12} x/t} = \frac{a_{21} + a_{22} c}{a_{11} + a_{12} c} \quad (1.41)$$

Riassumendo le quattro condizioni otteniamo la soluzione per le costanti  $a_{ij}$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} \\ a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1 \\ a_{21} + a_{22} u = 0 \\ \frac{a_{21} + a_{22} c}{a_{11} + a_{12} c} = c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ a_{12} = \frac{a_{21}}{c^2} = -\frac{u}{c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (1.42)$$

Quindi le trasformazioni (1.37) sono così individuate

$$\begin{cases} t' = \frac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - u t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1.43)$$

ed introducendo le due grandezze caratteristiche dei fenomeni relativistici

$$\begin{cases} \beta = \frac{u}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad (1.44)$$

otteniamo le cosiddette trasformazioni di Lorentz per il boost

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c} x) \\ x' = \gamma(x - \beta c t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1.45)$$

da cui si evince come *il tempo non è solo funzione del tempo dell'altro sistema ma dipende anche dalla posizione.*

Una prima caratteristica delle trasformazioni di Lorentz che mentre lo spazio ed il tempo non sono assoluti ma si trasformano tra sistemi di riferimenti, compatibilmente con la legge (1.45), esiste una grandezza che rimane

invariante nel cambio di sistemi di riferimento. Infatti consideriamo la grandezza  $c^2 t'^2 - x'^2$  e riscriviamola nel sistema di riferimento fisso:

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 \gamma^2 \left(t - \frac{\beta}{c} x\right)^2 - \gamma^2 (x - \beta ct)^2 = \dots = c^2 t^2 - x^2 \quad (1.46)$$

ottenendo formalmente la stessa espressione. Possiamo quindi enunciare che una trasformazione di Lorentz conserva una quantità che è detta *invariante relativistico* che appunto non dipende dalla trasformazione particolare ma non dipende neanche dallo stato cinematico del sistema inerziale.

*Se è valida la trasformazione di Lorentz, né il tempo né il modulo dei vettori (in questo caso il vettore posizione) si conservano. Al contrario le grandezza che si conserva è la differenza dei quadrati dello spazio e del tempo. La conseguenza dell'invarianza è dovuta alla costanza della velocità della luce.*

Una classificazione dei fenomeni fisici, che sarà ben chiara nel prossimo capitolo, è possibile in termini dell'invariante relativistico  $\Delta\tau^2 = c^2 t^2 - x^2$ .

- $\Delta\tau^2 = 0$ . Tale situazione è possibile solo per i raggi luminosi o in generale per i fenomeni elettromagnetici. Infatti, per un osservatore, la legge oraria della luce è data da  $x = ct$ , mentre per un osservatore in moto rispetto al primo, la legge oraria è data da  $x' = ct'$ . Eventi che soddisfano tale relazione sono definiti *eventi di tipo luce*.
- $\Delta\tau^2 > 0$ . Tale eventi sono detti *eventi di tipo tempo*. Se tale grandezza è maggiore di zero e si deve evidentemente conservare, è possibile scegliere un sistema di riferimento in cui  $x' = 0$ : cioè l'evento che avviene in tempi diversi ed in punti diversi nel sistema fisso viene visto in un sistema di riferimento mobile ancora in istanti di tempo diversi ma nello stesso punto. Quindi in questo caso non è possibile avere un sistema di riferimento in cui  $t' = 0$  (in questo caso  $\Delta\tau^2$  sarebbe negativo). Il sistema in cui  $x' = 0$  rappresenta un sistema di riferimento solidale con il corpo in moto. Questo sistema è definito come il *riferimento proprio*.
- $\Delta\tau^2 < 0$ . In questo caso abbiamo *eventi di tipo spazio*. È possibile scegliere un riferimento in cui  $t' = 0$ : cioè l'evento che avviene in tempi diversi ed in punti diversi nel sistema fisso viene visto in un sistema di riferimento mobile ancora in punti diversi ma contemporaneamente. Quindi in questo caso non è possibile avere un sistema di riferimento in cui  $x' = 0$  (in questo caso  $\Delta\tau^2$  sarebbe positivo).

Concludiamo la cinematica relativistica riportando l'espressione generale per le trasformazioni di Lorentz nel caso in cui il moto del sistema  $S'$  non coincide con l'asse  $x$  del sistema  $S$ .

Scomponiamo il vettore posizione  $\mathbf{r}$  in una componente parallela ed una perpendicolare alla direzione di  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{r}_{||} = (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}} \quad (1.47)$$

dove  $\hat{\mathbf{u}}$  è il versore di  $\mathbf{u}$ . La componente  $\mathbf{r}_{\perp}$  resta invariata, mentre la componente  $\mathbf{r}_{||}$  si trasforma come segue

$$\mathbf{r}'_{||} = \gamma(\mathbf{r}_{||} - \mathbf{u} t) = \gamma[(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u} t] \quad (1.48)$$

quindi

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{||} + \mathbf{r}'_{\perp} = \gamma[(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u} t] + \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}} = (\gamma - 1)(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}} - \gamma \mathbf{u} t + \mathbf{r} \quad (1.49)$$

Infine la generalizzazione delle trasformazioni (1.45) é la seguente

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{c^2}) \\ \mathbf{r}' = \frac{\gamma-1}{u^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} - \gamma \mathbf{u} t + \mathbf{r} \end{cases} \quad (1.50)$$

## 1.7 Misura relativistica del tempo e dello spazio

Analizziamo ora le proprietà delle misure di tempo e di lunghezza, quando applichiamo le trasformazioni di Lorentz (1.45) tra due osservatori: un osservatore solidale con il sistema in esame ed un osservatore rispetto al quale il sistema si muove.

Supponiamo di voler misurare la vita media di una particella subatomica che si muove con una velocità prossima a quella della luce. Per tale scopo bisogna misurare la posizione e l'istante di tempo connesse alla sua creazione (quale prodotto di un canale di decadimento di livello superiore) e alla sua scomparsa (causa decadimento della stessa in particelle più piccole). Per un osservatore solidale con la particella gli eventi connessi alla sua creazione e alla sua scomparsa avvengono nello stesso punto, quindi l'invariante relativistico  $\Delta\tau^2$  é di tipo luce.

Bisogna notare che le misure possibili non sono né misure di lunghezza né di tempo ma misure di intervalli spazio-temporali. Potendo, successivamente, trovare sistemi particolari in cui la distanza spazio-temporale si riduce o alla sola parte temporale o alla sola spaziale, ricaveremo informazioni sul *tempo proprio* e sulla *lunghezza propria*.

Per effettuare per esempio misure di lunghezze bisogna rilevare le posizioni degli estremi allo stesso istante, mentre, per misurare intervalli di tempo, bisogna considerare gli eventi nello stesso punto. Nel caso della particella indichiamo con  $(t'_a, x'_a)$  le coordinate spazio-temporali della creazione e con  $(t'_b, x'_b)$  quelle della scomparsa. Per l'osservatore  $S'$  (solidale con la particella) l'invariante relativistico vale  $\Delta\tau^2 = \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = (t'_b - t'_a)^2$ . Applicando la trasformazione di Lorentz (1.45) tra  $S'$  ed  $S$  (sistema in cui si muove la particella)

$$\begin{cases} t'_a = \gamma(t_a - \frac{\beta}{c} x_a) \\ t'_b = \gamma(t_b - \frac{\beta}{c} x_b) \end{cases} \quad (1.51)$$

otteniamo

$$\Delta t' = t'_b - t'_a = \gamma \left( t_b - \frac{\beta}{c} x_b - t_a + \frac{\beta}{c} x_a \right) = \gamma(t_b - t_a) - \gamma\beta \frac{x_b - x_a}{c} \quad (1.52)$$

Resta da esprimere la grandezza  $x_a - x_b$  in termini dell'intervallo  $(t_b - t_a)$ . Notiamo per le posizioni  $x'_a$  e  $x'_b$

$$\begin{cases} x'_a = \gamma(x_a - \beta c t_a) \\ x'_b = \gamma(x_b - \beta c t_b) \end{cases} \quad (1.53)$$

da cui otteniamo

$$\Delta x' = x'_b - x'_a = \gamma(x_b - x_a - \beta c t_b + \beta c t_a) = \gamma(x_b - x_a) - \gamma\beta c(t_b - t_a) \quad (1.54)$$

e considerato che  $\Delta x' = 0$  abbiamo  $(x_b - x_a) = \beta c(t_b - t_a)$ . Sostituendo nell'equazione (1.52)

$$\Delta t' = \gamma(1 - \beta^2)(t_b - t_a) = \frac{\Delta t}{\gamma} \quad (1.55)$$

Siccome  $\gamma > 1$ , l'intervallo di tempo misurato in  $S$  é maggiore dell'intervallo di tempo misurato in  $S'$ . Questo fenomeno va sotto il nome di *dilatazione dei tempi*. Siccome  $\Delta t$  é una grandezza finita, maggiore é il valore della velocità ( $\beta \rightarrow 1$  si ha che  $\gamma \rightarrow \infty$ ), minore é  $\Delta t'$ : *il tempo battuto dall'orologio di  $S'$  "rallenta" rispetto al tempo battuto dall'orologio di  $S$* .

Resta da misurare, la lunghezza propria e confrontarla con la lunghezza misurata dall'osservatore  $S$ . Le misure delle lunghezze come abbiamo accennato in precedenza devono essere effettuate allo stesso istante di tempo. La lunghezza propria é data da  $\Delta x' = x'_b - x'_a$ . Applicando ancora le trasformazioni di Lorentz (1.45) ed in particolare (1.54) otteniamo

$$\Delta x' = \gamma(x_b - x_a) - \gamma\beta c(t_b - t_a) \quad (1.56)$$

La differenza  $x_b - x_a$  puó essere considerata come lunghezza misurata nel sistema  $S$  se l'individuazione dei punti  $x_a$  e  $x_b$  avviene allo stesso istante ( $t_a = t_b$ ). Dunque abbiamo ora la relazione tra le lunghezze

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} \quad (1.57)$$

La misura della lunghezza nel sistema  $S$  risulta contratta di un fattore  $\gamma$  rispetto alla lunghezza misurata nel sistema  $S'$ . Possiamo concludere, affermando che a causa del concetto di simultaneitá relativistica, diverso da quello classico, si ottengono i fenomeni di dilatazione del tempo e di contrazione della lunghezza.

Ricordiamo che le trasformazioni di Lorentz (1.45) conducono a quelle di Galilei (1.15) quando la velocità dei corpi é inferiore alla velocità della luce. Infatti sviluppando le trasformazioni di Lorentz in serie di potenze rispetto a  $\beta$  i termini al primo ordine rappresentano quelle di Galilei. Infatti

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sim 1 + \frac{\beta^2}{2} + \dots = 1 + \frac{u^2}{2c^2} + \dots \quad (1.58)$$

Concludiamo questo capitolo introduttivo affermando che nella fisica classica, il tempo é assoluto e, quindi, non dipende dal sistema di riferimento. Nella fisica relativisticá, invece, é la luce a non dipendere dal sistema di riferimento con la conseguenza che, oltre allo spazio, anche il tempo dipende dal riferimento.

Alla luce di queste proprietá é utile introdurre un nuovo concetto di vettore : il quadrivettore. Il quadrivettore é la naturale generalizzazione del vettore in un spazio a quattro dimensioni (le tre spaziali piú una quarta temporale). Nel prossimo capitolo illustreremo le principali proprietá dei quadrivettori.

## Capitolo 2

# Cinematica e Meccanica Relativistica

Nell'ipotesi di boost di Lorentz, in questo capitolo, studieremo inizialmente la cinematica relativistica, cioè come si relazionano fra sistemi di riferimento inerziale in moto reciproco le velocità e le accelerazioni dei corpi. La parte centrale sarà dedicata all'introduzione degli elementi matematici necessari alla comprensione della Relatività Ristretta: lo spazio di Minkowski, i quadrivettori e tensori in generale. Quindi sarà dedotta la meccanica relativistica che generalizzerà e sostituirà la meccanica di Newton. Infine l'elettromagnetismo di Maxwell sarà reinterpretato alla luce della nuova teoria e questa risulterà naturalmente una teoria relativistica.

### 2.1 Trasformazione di velocità ed accelerazione

Abbiamo analizzato finora qual è la legge di trasformazione per lo spazio ed il tempo (1.45) tra due sistemi di riferimento in moto rettilineo ed uniforme fra loro (boost di Lorentz). Consideriamo, adesso, due osservatori che misurano posizioni e tempi che differiscono tra loro ricavando attraverso tale procedura la legge di trasformazione per la velocità.

L'osservatore solidale con il sistema  $S$  osserva la posizione del corpo in moto al tempo  $t$  nella posizione  $x$  e al tempo  $t + dt$  nella posizione  $x + dx$ . Per tale osservatore la velocità è definita esattamente come in meccanica classica. In maniera analoga anche l'osservatore solidale con il sistema  $S'$  rileva posizioni e tempi. In formule abbiamo quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{dx'}{dt'} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Essendo le trasformazioni di Lorentz (1.45) lineari devono essere valide anche per spostamenti spazio-temporali infinitesimi. Otteniamo quindi la loro variante per incrementi infinitesimi di spazio e di tempo

$$\left\{ \begin{array}{l} dt' = \gamma(dt - \frac{\beta}{c} dx) \\ dx' = \gamma(dx - \beta c dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Sostituendo nella (2.1) abbiamo le leggi di trasformazione delle velocità

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{dx - \beta c dt}{dt - \frac{\beta}{c} dx} \\ v'_y = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c} dx)} \\ v'_z = \frac{dz}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c} dx)} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{u v_x}{c^2})} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{u v_x}{c^2})} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Nel caso galileiano ( $\beta \ll 1$ ) avremmo ottenuto le relazioni (1.15). Da notare che nel caso in cui  $v_x = c$  (Nel sistema fisso si sta osservando un fenomeno elettromagnetico) la velocità nel sistema mobile deve valere  $v'_x = \frac{c-u}{1-\frac{u}{c}}$  =  $c$  ottenendo quindi il risultato dell'esperienza di Michelson e Morley.

In maniera simile alla composizione della velocità, ricaviamo le leggi di trasformazione per le accelerazioni. Infatti per ogni osservatore abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} \\ a'_y = \frac{dv'_y}{dt'} \\ a'_z = \frac{dv'_z}{dt'} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

mentre i differenziali delle componenti delle velocità (2.3) sono i seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} dv'_x = \frac{dv_x}{\gamma^2(1 - \frac{u v_x}{c^2})^2} \\ dv'_y = \frac{(1 - \frac{u v_x}{c^2})dv_y + \frac{u v_y}{c^2}dv_x}{\gamma(1 - \frac{u v_x}{c^2})^2} \\ dv'_z = \frac{(1 - \frac{u v_x}{c^2})dv_z + \frac{u v_z}{c^2}dv_x}{\gamma(1 - \frac{u v_x}{c^2})^2} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

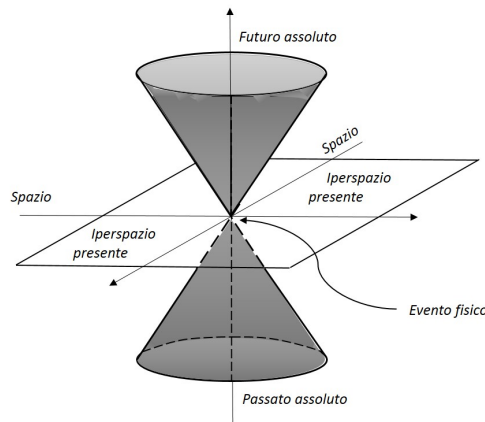
Quindi le accelerazioni si trasformano come segue

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3(1 - \frac{u v_x}{c^2})^3} \\ a'_y = \frac{a_y + \frac{u}{c^2}(v_y a_x - v_x a_y)}{\gamma^2(1 - \frac{u v_x}{c^2})^3} \\ a'_z = \frac{a_z + \frac{u}{c^2}(v_z a_x - v_x a_z)}{\gamma^2(1 - \frac{u v_x}{c^2})^3} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Da notare che le accelerazioni lungo gli assi ortogonali al boost nel sistema mobile  $S'$  sono funzione anche dell'accelerazione lungo l'asse parallelo al boost nel sistema fisso  $S$ . Tuttavia se l'accelerazione  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  fosse nulla nel sistema  $S$  in base alle relazioni trovate (2.6) anche  $\mathbf{a}' = (a'_x, a'_y, a'_z)$  deve essere nulla. Quest'ultima affermazione, quindi, è la *dimostrazione della validità del principio di equivalenza tra sistemi di riferimento inerziali anche in Relatività Ristretta*.

## 2.2 Spazio di Minkowski

Alla luce dei risultati ottenuti nei paragrafi precedenti appena analizziamo fenomeni le cui velocità sono prossime a quella della luce bisogna abbandonare l'idea di descriverli relazionandoli tra sistemi di riferimento inerziali in termini delle trasformazioni galileiane (1.15), ma bisogna utilizzare quelle di Lorentz (1.45) o (1.50). Quindi la posizione occupata da un corpo non può essere individuata semplicemente dalle tre coordinate spaziali ma a queste bisogna aggiungere anche la coordinata temporale. Bisogna abbandonare il concetto dello spazio vettoriale euclideo tridimensionale  $R^3$  (quello in cui è valido il teorema di Pitagora) ed introdurre uno spazio a quattro dimensioni ( $R^4$ ) detto *spazio di Minkowski* (vedi figura 2.1). Tale spazio tuttavia non è una semplice estensione a quattro dimensioni di quello a tre. Infatti come vedremo in avanti bisognerà modificare il teorema di Pitagora alla luce dell'invariante relativistico (1.46).



**Figura 2.1:** Schematica rappresentazione di uno spazio di Minkowski tridimensionale (la dimensione temporale e due dimensioni spaziali).

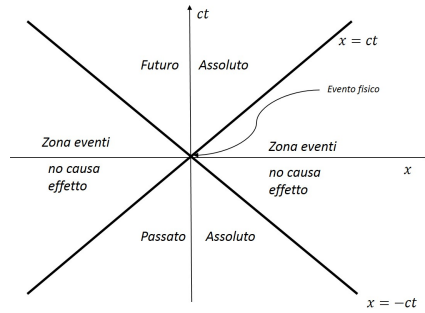
Ogni evento fisico (tempo e posizione) è rappresentato nello spazio di Minkowski da un punto. A tal fine dobbiamo abbandonare l'idea del vettore posizione  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  rappresentante la posizione del corpo (individuata dal vettore  $\mathbf{r}$ ) all'istante di tempo  $t$  ed introdurre una nuova grandezza: la *quadriposizione*. La sua espressione matematica nella cosiddetta versione *controvariante* è definita come segue

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{x}) \quad (2.7)$$

dove l'indice  $\mu$  assume i valori 0, 1, 2, 3. Dunque due eventi fisici diversi sono rappresentati nello spazio di Minkowski dalle quadriposizioni  $x_A^\mu$  e  $x_B^\mu$  e l'indice  $\mu$  resta generico volendo sottendere le quattro coordinate spazio-temporali al suo variare tra i valori 0 e 3.

Anche se nella realtà lo spazio di Minkowski è rappresentato da uno spazio a quattro dimensioni, tuttavia è sempre possibile ridursi a quello a due dimensioni (una dimensione temporale ed una spaziale) semplicemente scegliendo i sistemi inerziali  $S$  ed  $S'$  in modo tale che gli assi  $x$  ed  $x'$  siano coincidenti. In tal caso faremo sempre riferimento alle trasformazioni (1.45) e la rappresentazione dello spazio di Minkowski diviene possibile su un piano (figura 2.2).

Supponiamo che un osservatore, posto nell'istante  $t = 0$  nella posizione  $x = 0$  (cioè sia individuato dalla quadriposizione  $x^\mu = (0, 0, y_0, z_0)$  dove  $y_0$  e  $z_0$  sono costanti), emette un raggio luminoso (evento fisico) misurando successivamente la posizione ed il tempo. Nello spazio di Minkowski, tale evento (cioè la propagazione del raggio) è rappresentato dalle bisettrici  $x = \pm ct$ . Tali bisettrici possono essere considerate tali anche nel piano



**Figura 2.2:** Spazio di Minowski bidimensionale. L'asse verticale rappresenta il tempo (o meglio la grandezza  $ct$ ) e l'asse orizzontale la coordinata spaziale lungo la direzione del moto del sistema mobile  $S'$ .

$(t, x)$  se supponiamo che la velocità della luce sia unitaria (quindi le velocità dei corpi sono misurate in unità di quella della luce).

Le bisettrici rappresentano le *linee di mondo* del raggio luminoso. Nel caso tridimensionale avremmo ottenuto un cono con asse coincidente con l'asse del tempo; in questo caso avremmo parlato del *cono luce* (figura 2.1) che si estende concettualmente anche al caso di una sola dimensione.

Consideriamo, adesso, una misura di distanza spazio temporale ed in particolare costruiamo l'invariante relativistico  $\Delta\tau^2$  connesso alla distanza

$$\Delta x^\mu = x_B^\mu - x_A^\mu = (ct_B, x_B, y_B, z_B) - (ct_A, x_A, y_A, z_A) = (c\Delta t, \Delta x, 0, 0) \tag{2.8}$$

Una relazione analoga è ottenuta nel sistema mobile per cui l'invariante relativistico impone

$$\Delta\tau^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 \tag{2.9}$$

ovvero la grandezza è invariante e rappresenta una generalizzazione del concetto di lunghezza nello spazio di Minkowski. Utilizzando questa definizione di distanza tutti i punti che giacciono sulle rette  $x = \pm ct$ , sono a distanza spazio-temporale nulla dal punto in cui viene inviato il segnale luminoso. *Se potessimo "sederci" sul fotone, per noi il tempo risulterebbe fermo.* Infatti dalla relazione tra i tempi nei due sistemi di riferimento (1.55) abbiamo

$$\Delta t' \rightarrow 0 \quad \text{se} \quad \beta \rightarrow 1 \tag{2.10}$$

Consideriamo un punto  $P$  all'interno del cono luce superiore. Il punto  $P$  può essere connesso con l'origine  $O$  attraverso la linea di mondo  $\vec{OP}$  (si definisce linea di mondo una qualsiasi curva che rappresenta il moto di un sistema fisico in uno spazio di Minkowski). Tutti gli eventi all'interno del cono luce superiore soddisfano la condizione  $c^2 t^2 - x^2 > 0$  (eventi di tipo tempo). Quindi è possibile avere un sistema di riferimento  $S'$  in cui gli eventi avvengono nello stesso punto. Essendo, invece, impossibile avere eventi di tipo spazio, non è possibile avere eventi che accadono simultaneamente. Inoltre, essendo  $t > 0$ , tutti gli eventi nel cono luce avvengono dopo l'evento 0. È possibile, invece avere eventi prima dell'evento 0 solo per quelli posti nel cono luce inferiore. In questa zona comunque non sarà possibile avere eventi simultanei. Per questi motivi, riferendoci all'evento  $O$ , il cono luce superiore è definito come regione del futuro assoluto, mentre il cono luce inferiore è la regione del passato assoluto.



Analizziamo le regioni esterne al cono luce. Un dato evento in tale regione é di tipo spazio. Quindi qualunque sia il sistema di riferimento, non sar  possibile avere due eventi nello stesso punto. Sar  possibile, invece, avere eventi simultanei ma in punti spaziali diversi.

Sia  $Q$  un evento in tale regione. Effettuando una trasformazione di Lorentz é possibile definire l'asse spaziale  $\tilde{x} = \vec{OQ}$  che coincide con la linea di mondo del sistema in questione. Siccome é sempre possibile trovare sistemi di riferimento in cui gli eventi  $O$  e  $Q$  sono simultanei, questa regione é chiamata regione del presente. Non essendoci ordine temporali definiti, come accade all'interno del cono luce, é possibile, dunque, avere sistemi di riferimento in cui gli eventi sono simultanei. Nel caso del cono luce era assente l'ordine spaziale.

Le linee di mondo sono in generale delle linee non rette (la loro forma é definita dal campo di forze). Per i moti rettilinei ed uniformi, le linee di mondo sono rette il cui angolo con l'asse  $x$  é maggiore di  $\pi/4$ . L'angolo pu  essere compreso tra  $\pi/4$  e  $\pi/2$  in quanto nessun corpo pu  viaggiare pi  veloce della luce. La linea di mondo non pu  presentare punti di massimo o di minimo, poich  questi implicherebbero una propagazione di segnali istantanea.

Due eventi possono essere legati da un rapporto di causalit  soltanto nel caso in cui il loro intervallo sia del genere tempo. Questo risultato segue immediatamente dall'impossibilit  che qualche interazione si propaghi pi  velocemente della luce. Come abbiamo visto, i concetti di prima e dopo hanno un senso solo per questi eventi; questa é la condizione indispensabile perch  i concetti di causa e di effetto abbiano senso.

## 2.3 Quadrivettori e tensori

Prima di passare alla costruzione della dinamica relativistica bisogna introdurre gli strumenti matematici con cui la trattazione risulta semplificata. Nel paragrafo precedente abbiamo gi  introdotto la quadriposizione (2.7) nello spazio di Minkowski come un insieme di quattro grandezze

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}) = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (2.11)$$

Generalizziamo ora il concetto di vettore introducendo il concetto di *quadrivettore*. Il continuo spazio temporale é definito come uno spazio quadridimensionale con coordinate  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  che si trasformano in un modo specifico nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro. Simbolicamente il cambio di sistema di riferimento sar  indicato come

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \text{con } \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (2.12)$$

cio  devono esistere quattro funzioni che mappano le coordinate del sistema  $S$  in quelle del sistema  $S'$ . Gli oggetti matematici, rappresentanti grandezze fisiche, sono detti *tensori*. Tali oggetti sono una generalizzazione del concetto di scalare e di vettore. Le propriet  di tali oggetti sono definiti a secondo le loro regole di trasformazione quando vi é un cambio di sistema di riferimento. Lo *scalare* é un oggetto che non cambia per trasformazione di coordinate. Esso ha una sola componente e non porta indici. Lo scalare é un tensore di rango zero. Il *vettore* o *quadrivettore* é un tensore di rango uno e presenta un solo indice spazio temporale (per esempio la quadriposizione). Vi sono due tipi di quadrivettore: il quadrivettore *controvariante* e *covariante*.

Il quadrivettore controvariante e lo indicheremo con l'indice spazio temporale in alto ( $A^\mu$ ) si trasforma, alla luce della trasformazione di coordinate (2.12), come segue

$$A'^{\mu}(x') = \sum_{\beta=0}^4 \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta}(x) \quad (2.13)$$

Questo legge di trasformazione é quella per cui si trasformano i differenziali. Infatti avremmo avuto  $dx'^{\mu} = \sum_{\beta=0}^4 \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta}$ . I vettori covarianti invece sono quelle grandezze che si trasformano come le derivate. Il vettore covariante lo indicheremo con l'indice in basso  $A_{\mu}$  e si trasforma come segue

$$A'_{\mu}(x') = \sum_{\beta=0}^4 \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} A_{\beta}(x) \quad (2.14)$$

Infatti la derivata si sarebbe trasforma come  $\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\beta=0}^4 \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}$ .

Il tensore é un oggetto che porta con sé almeno due indici spazio temporali. Questi indici determinano la sua natura covariante, controvariante o quella mista. I tensori si trasformano secondo la natura del loro indice. Riportiamo per la stessa grandezza le leggi di trasformazione se questa é espressa in varie forme

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu}(x') &= \sum_{\alpha=0}^4 \sum_{\beta=0}^4 \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} F^{\alpha\beta}(x) \\ F'_{\mu\nu}(x') &= \sum_{\alpha=0}^4 \sum_{\beta=0}^4 \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} F_{\alpha\beta}(x) \\ F'^{\mu}_{\nu}(x') &= \sum_{\alpha=0}^4 \sum_{\beta=0}^4 \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} F^{\alpha}_{\beta}(x) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Per non appesantire la notazione si usa utilizzare la convenzione di Einstein per la quale si omette la sommatoria per indici ripetuti (uno controvariante ed uno covariante) intendendo di dover sempre sommare sui valori 0, 1, 2, 3. Per esempio la legge (2.13) diviene  $A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} A^{\beta}$ . Un tensore a due indici molto importante é il cosiddetto *tensore metrico* responsabile del passaggio dei quadrivettori dalla natura covariante a quella controvariante e viceversa. Il tensore metrico  $\eta$  ha una rappresentazione matriciale come segue

$$\eta^{\mu\nu} = \eta^{\mu}_{\nu} = \eta_{\mu}^{\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Una prima applicazione pratica di quanto detto é partire dalla legge di trasformazione (1.45) che può essere riscritta in maniera compatta come segue

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

che rappresenta quindi una particolare trasformazione (appunto il boost di Lorentz) appartenente alla categoria (2.12). La trasformazione di Lorentz (2.17) può essere ulteriormente compattata come segue

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (2.18)$$

dove abbiamo introdotto la rappresentazione matriciale del boost di Lorentz utilizzando un tensore a due indici (controvariante nel primo e covariante nel secondo)

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Il passaggio tra le due nature dei quadrivettori in termini del tensore metrico é immediato

$$x^{\mu} = \eta^{\mu\nu} x_{\nu}, \quad x_{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\nu}, \quad \text{con } \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

L'espressione del quadrivettore covariante  $x_{\mu}$  connesso alla quadriposizione controvariante  $x^{\mu}$  é ottenuta come

$$x_{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \quad (2.21)$$

Utilizzando ancora il tensore metrico l'invariante relativistico connesso al quadrivettore  $x^{\mu}$

$$\Delta\tau^2 = x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} \quad (2.22)$$

é espresso semplicemente come

$$\Delta\tau^2 = x^{\mu} x_{\mu} = x^{\mu} \eta_{\mu\nu} x^{\nu} = x_{\mu} \eta^{\mu\nu} x_{\nu} \quad (2.23)$$

rappresentando quindi la generalizzazione del prodotto scalare nello spazio euclideo  $R^3$  allo spazio di Minkowski  $R^4$  in cui alla metrica indotta dal teorema di Pitagora (tensore metrico diagonale  $(1, 1, 1)$ ) si sostituisce una nuova metrica ancora diagonale ma rappresentata da  $\eta_{\mu\nu}$ .

Al vettore controvariante o covariante si può introdurre anche il concetto di tensore a due, tre,  $\dots$ ,  $n$  indici che possono essere sia covarianti che controvarianti.

Il passaggio a forme totalmente controvarianti o covarianti del boost di Lorentz é possibile applicando il tensore metrico  $\eta_{\mu\nu}$ . Infatti

$$\Lambda^{\mu\nu} = \eta^{\nu\rho} \Lambda^{\mu}_{\rho} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{oppure } \Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \Lambda^{\rho}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Concludiamo la sezione, quindi, riportando le principali caratteristiche di un quadrivettore generico  $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ . Tale quadrivettore si trasforma come segue

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \rightarrow \begin{cases} A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0) \\ A'^2 = A^2 \\ A'^3 = A^3 \end{cases} \quad (2.25)$$

e l'invariante relativistico connesso é semplicemente dato come

$$\Delta\tau^2 = A^\mu A_\mu = A^{0^2} - A^{1^2} - A^{2^2} - A^{3^2} = A^{0^2} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \quad (2.26)$$

La quantità  $A^\mu A_\mu$  é invariante poiché anche cambiando sistema di riferimento il vettore  $A^\mu$  varia ma il suo invariante relativistico rimane appunto costante. E' possibile dare una spiegazione in termini proprio delle legge di trasformazione. Infatti

$$A'^\mu A'_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} A_\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} A^\alpha A_\beta = \delta_{\alpha\beta} A^\alpha A_\beta = A^\alpha A_\alpha \quad (2.27)$$

essendo  $\delta_{\alpha\beta}$  la delta di Kronecker. Tuttavia anche la grandezza costruita con due quadrivettori diversi risulta essere sempre un invariante relativistico. Infatti

$$A'^\mu B'_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} B_\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} A^\alpha B_\beta = \delta_{\alpha\beta} A^\alpha B_\beta = A^\alpha B_\alpha \quad (2.28)$$

Un quadrivettore particolare é legato all'operazione di derivata. Si definisce *quadriderivata covariante*  $\partial_\mu$  la grandezza

$$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (2.29)$$

mentre la *quadriderivata controvariante* é immediatamente ottenuta applicando il tensore metrico

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (2.30)$$

L'invariante relativistico (2.26) per la quadriderivata é il d'alambertiano  $\square$ . Infatti

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta = \square \quad (2.31)$$

avendo, quindi, dimostrato come l'equazione di propagazione delle onde elettromagnetiche (1.29) é invariante per trasformazioni di Lorentz.

## 2.4 Dinamica relativistica

Il primo passo nella costruzione della dinamica relativistica corrisponde nell'individuare una grandezza che resti costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali e che possa rivestire lo stesso ruolo concettuale del tempo in meccanica classica. Questa grandezza può essere il *tempo proprio*  $\tau$ : cioè il tempo misurato nel sistema di riferimento solidale con il corpo. Infatti l'invariante relativistico  $\Delta\tau^2$  corrisponde a meno di un fattore moltiplicativo ( $c^2$ ) all'intervallo di tempo  $\Delta t'^2$ . È sufficiente riprendere la discussione sul concetto della misura del tempo e della relazione tra il tempo  $t$  e  $t'$  (1.55) e possiamo affermare che il tempo misurato in un qualsiasi sistema inerziale deve essere connesso al tempo (proprio  $\tau$ ) misurato nel sistema mobile solidale con il corpo in moto. Per cui possiamo scrivere<sup>1</sup>

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\Gamma} \quad \text{e per intervalli infinitesimi} \quad d\tau = \frac{dt}{\Gamma} \quad (2.32)$$

Avendo ora individuato il *nuovo tempo universale* e che scorre uguale per tutti i sistemi di riferimento inerziali possiamo costruire la dinamica ripercorrendo le stesse tappe della dinamica classica.

Dopo l'introduzione del quadrivettore posizione (o quadriposizione)  $x^\mu$  definiamo come *quadrivelocità* il quadrivettore  $v^\mu$  così definito

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right) = \left( \Gamma c, \Gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = (c\Gamma, \Gamma \mathbf{v}) = (v^0, v^1, v^2, v^3) \quad (2.33)$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità classica e  $\Gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . L'invariante relativistico connesso a  $v^\mu$  è immediatamente ottenuto

$$v^\mu v_\mu = \Gamma^2 c^2 - \Gamma^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \Gamma^2 c^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = c^2 \quad (2.34)$$

da cui si evince che la quadrivelocità è un quadrivettore di tipo tempo e deve esserlo in tutti i sistemi di riferimento. Altrimenti vorrebbe significare che esiste qualche riferimento in un cui un corpo si muove con una velocità superiore a quella della luce. A questo punto è possibile introdurre il quadripulso  $p^\mu$

$$p^\mu = m_0 v^\mu = (m_0 \Gamma c, m_0 \Gamma \mathbf{v}) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \quad (2.35)$$

dove  $m_0$  è la massa a riposo del corpo (misurata attraverso una misura statica) ed è invariante per trasformazioni.

Avendo ora due sistemi di riferimento  $S$  (fisso) ed  $S'$  (mobile) vogliamo scrivere le leggi di trasformazione della quadrivelocità. Essendo  $v^\mu$  un quadrivettore questo deve trasformarsi rispettando le leggi di trasformazione (2.25)

<sup>1</sup>Concettualmente  $\gamma$  e  $\Gamma$  anche se definiti nello stesso modo si riferiscono a velocità diverse. Infatti  $\gamma$  è stato introdotto come fattore di contrazione connesso alla velocità relativa tra sistemi di riferimento inerziali (1.44). Invece  $\Gamma$  rappresenta il fattore di contrazione connesso alla velocità del corpo nel sistema di riferimento dato. Quindi cambiando sistema di riferimento  $\Gamma$  sarà diverso.

$$\begin{cases} v'^0 = \gamma(v^0 - \beta v^1) \\ v'^1 = \gamma(v^1 - \beta v^0) \\ v'^2 = v^2 \\ v'^3 = v^3 \end{cases} \quad (2.36)$$

Esprimendo tutto in termini delle velocità classiche nei due sistemi di riferimenti abbiamo

$$\begin{cases} \Gamma' c = \gamma(\Gamma c - \beta \Gamma v_x) \\ \Gamma' v'_x = \gamma(\Gamma v_x - \beta \Gamma c) \\ \Gamma' v'_y = \Gamma v_y \\ \Gamma' v'_z = \Gamma v_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\Gamma'}{\Gamma} = \gamma\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right) \\ v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)} \end{cases} \quad (2.37)$$

Da notare che le trasformazioni trovate sono esattamente le stesse relazioni ottenute in precedenza (2.3) dove non avevamo richiesto la trasformazione dei quadrivettori.

In maniera analoga alla quadrivelocità definiamo la quadriaccelerazione  $a^\mu$

$$a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} = \left( \Gamma c \frac{d\Gamma}{dt}, \Gamma \frac{d(\Gamma \mathbf{v})}{dt} \right) = (a^0, a^1, a^2, a^3) \quad (2.38)$$

Quindi la quadriforza  $F^\mu = (F^0, F^1, F^2, F^3)$

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{dv^\mu}{d\tau} = \left( \Gamma \frac{d(m_0 \Gamma c)}{dt}, \Gamma \frac{d(m_0 \Gamma \mathbf{v})}{dt} \right) = (F^0, F^1, F^2, F^3) \quad (2.39)$$

Determiniamo le componenti spaziali di  $F^\mu$ . Ovviamente  $F^i$  devono essere proporzionali alle componenti tridimensionali della forza nel limite classico ( $\beta \rightarrow 0$ ), per ottenere l'equazione di Newton. Se si mantiene la definizione convenzionale di forza e si suppone che una forza determina una variazione di impulso, bisogna porre

$$\begin{cases} F^1 = \Gamma F_x \\ F^2 = \Gamma F_y \\ F^3 = \Gamma F_z \end{cases} \quad \text{da cui otteniamo} \quad \mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = \frac{d(m_0 \Gamma \mathbf{v})}{dt} \quad (2.40)$$

dove  $\mathbf{F}$  é la forza classica. Abbiamo ottenuto formalmente l'equazione di Newton in cui l'unica differenza consiste nella definizione dell'impulso (2.35).

Resta da determinare la componente temporale della quadriforza. Differenziando rispetto al tempo proprio l'invariante relativistico della quadrivelocità (2.34) abbiamo

$$\frac{d v_\mu v^\mu}{d\tau} = v^0 \frac{dv^0}{d\tau} - v^1 \frac{dv^1}{d\tau} - v^2 \frac{dv^2}{d\tau} - v^3 \frac{dv^3}{d\tau} = v^0 \frac{dv^0}{d\tau} = 0 \quad (2.41)$$

mentre dalla definizione (2.39) della quadriforza  $\frac{d v^\mu}{d\tau} = \frac{F^\mu}{m_0}$  la relazione (2.41) diviene

$$v^0 F^0 - v^1 F^1 - v^2 F^2 - v^3 F^3 = 0 \rightarrow F_0 = \frac{v^1 F^1 + v^2 F^2 + v^3 F^3}{v^0} = \Gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c} \quad (2.42)$$

Unendo la relazione appena trovata e la definizione della parte temporale della quadriforza si ottiene

$$\frac{d(m_0 \Gamma c)}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c} \quad (2.43)$$

In meccanica classica  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  rappresenta la potenza ed quindi é connessa alla derivata dell'energia  $\mathcal{E}$ . Abbiamo cosí ricavato l'espressione dell'energia in meccanica relativistica

$$\mathcal{E} = m_0 \Gamma c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 \quad (2.44)$$

dove  $m = m_0 \Gamma$  é la massa della particella in movimento. Il quadrimpulso  $p^\mu$  (2.35) può essere riscritto nella forma seguente

$$p^\mu = \left( \frac{\mathcal{E}}{c}, m \mathbf{v} \right) = \left( \frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (2.45)$$

dove  $\mathbf{p} = m_0 \Gamma \mathbf{v}$  può essere considerato come la quantità di moto relativistica. Nel sistema di riferimento solidale con il corpo invece abbiamo

$$p^\mu = (m_0 c, \mathbf{0}) \quad (2.46)$$

e per l'invariante relativistico connesso al quadrimpulso,  $p^\mu p_\mu$ , abbiamo

$$m_0^2 c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 \rightarrow \mathcal{E} = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2} \quad (2.47)$$

dove  $p = m_0 \Gamma v$ . Sviluppando in serie di Taylor l'energia  $\mathcal{E}$  (2.44) rispetto a  $\beta = v/c \ll 1$  si ottiene

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sim m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (2.48)$$

che a meno di un termine costante ( $m_0 c^2$  é detta *energia a riposo*) é l'energia cinetica classica. Sviluppando rispetto a  $p/m_0 c \ll 1$  si ottiene partendo dalla (2.47) lo stesso risultato.

In meccanica relativista é naturale definire l'energia cinetica come la parte dell'energia (2.44) che si annulla quando  $\beta = 0$ . Quindi sottraendo l'energia a riposo  $m_0 c^2$  abbiamo

$$T = \mathcal{E} - m_0 c^2 = m_0 (\Gamma - 1) c^2 \quad (2.49)$$

In fisica nucleare si assume come limite di applicabilità della meccanica classica la velocità tale che  $T_{rel} = T_{clas}$

con un errore inferiore al 1 %.

La quadriforza (2.39) assume la sua forma definitiva

$$F^\mu = \left( \Gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c}, \Gamma \mathbf{F} \right) \quad (2.50)$$

che é nota come *forza di Minkowski* mentre la quadriaccelerazione (2.38) diviene

$$a^\mu = \left( \frac{\Gamma}{m_0} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \Gamma \frac{d(\Gamma \mathbf{v})}{dt} \right) \quad (2.51)$$

Per concludere il paragrafo vogliamo anche per la quadriaccelerazione e la quadriforza ottenere le leggi di trasformazione tra i due sistemi di riferimento  $S$  ed  $S'$ . Essendo anche  $a^\mu$  e  $F^\mu$  quadrivettori questi devono trasformarsi ancora rispettando le leggi di trasformazione (2.25)

$$\begin{cases} a'^0 = \gamma(a^0 - \beta a^1) \\ a'^1 = \gamma(a^1 - \beta a^0) \\ a'^2 = a^2 \\ a'^3 = a^3 \end{cases} \quad \begin{cases} F'^0 = \gamma(F^0 - \beta F^1) \\ F'^1 = \gamma(F^1 - \beta F^0) \\ F'^2 = F^2 \\ F'^3 = F^3 \end{cases} \quad (2.52)$$

ed esprimendo il tutto in termini delle accelerazioni e le forze classiche nei due sistemi di riferimenti abbiamo

$$\begin{cases} c \Gamma' \frac{d\Gamma'}{dt'} = \gamma \left[ c \Gamma \frac{d\Gamma}{dt} - \beta \Gamma \frac{d(\Gamma v_x)}{dt} \right] \\ \Gamma' \frac{d(\Gamma' v'_x)}{dt'} = \gamma \left[ \Gamma \frac{d(\Gamma v_x)}{dt} - \beta c \Gamma \frac{d\Gamma}{dt} \right] \\ \Gamma' \frac{d(\Gamma' v'_y)}{dt'} = \Gamma \frac{d(\Gamma v_y)}{dt} \\ \Gamma' \frac{d(\Gamma' v'_z)}{dt'} = \Gamma \frac{d(\Gamma v_z)}{dt} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\Gamma' (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})'}{c} = \gamma \left( \frac{\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c} - \beta \Gamma F_x \right) \\ \Gamma' F'_x = \gamma (\Gamma F_x - \beta \frac{\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c}) \\ \Gamma' F'_y = \Gamma F_y \\ \Gamma' F'_z = \Gamma F_z \end{cases} \quad (2.53)$$

ed infine la legge di trasformazione per le componenti della forza e per la potenza sono

$$\begin{cases} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})' = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - u F_x}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} \\ F'_x = \frac{F_x - u \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} \\ F'_y = \frac{F_y}{\gamma (1 - \frac{u v_x}{c^2})} \\ F'_z = \frac{F_z}{\gamma (1 - \frac{u v_x}{c^2})} \end{cases} \quad (2.54)$$

avendo sfruttato sempre la relazione  $\Gamma'/\Gamma = \gamma (1 - \frac{u v_x}{c^2})$  (prima linea del set di equazioni (2.37)). Nel caso delle accelerazioni si ottengono esattamente le relazioni trovate in precedenza (2.6) sfruttando semplicemente la



condizione  $\frac{d\Gamma'}{dt'} = \frac{1}{1-\frac{u v_x}{c^2}} \left[ \frac{d\Gamma}{dt} - \frac{u}{c^2} \frac{d(\Gamma v_x)}{dt} \right]$  (prima linea del set di equazioni (2.53)). Nel caso del quadrimpulso (2.35), utile per raccordare sia la quantità di moto che l'energia tra il sistema di riferimento del laboratorio e quello del centro di massa, si ottiene in maniera analoga trasformazione

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{E}'}{c} = \gamma \left( \frac{\mathcal{E}}{c} - \beta m_0 \Gamma v_x \right) \\ \Gamma' m_0 v'_x = \gamma (m_0 \Gamma v_x - \beta \frac{\mathcal{E}}{c}) \\ \Gamma' v'_y = \Gamma v_y \\ \Gamma' v'_z = \Gamma v_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}' = \gamma (\mathcal{E} - u m_0 \Gamma v_x) = \gamma (\mathcal{E} - u p^1) \\ p'^1 = \gamma \left[ p^1 - \frac{u \mathcal{E}}{c^2} \right] \end{cases} \quad (2.55)$$

dove le ultime due equazioni nel lato sinistro sono identiche a quelle delle trasformazioni della velocità.

## 2.5 Decadimento di particelle

Analizziamo brevemente la condizione affinché un nucleo, per esempio, possa decomporsi (quindi decadere) in due particelle. Consideriamo il cosiddetto decadimento spontaneo di un corpo di massa  $M_0$  in due corpi di massa  $m_{01}$  e  $m_{02}$ . La legge di conservazione dell'energia per questo processo nel sistema di riferimento dove il corpo di massa  $M_0$  è in quiete è data da

$$M_0 c^2 = \mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20} \quad (2.56)$$

dove  $\mathcal{E}_{10}$  e  $\mathcal{E}_{20}$  sono le rispettive energie dei due prodotti del decadimento. Essendo  $\mathcal{E}_{10} > m_{01} c^2$  e  $\mathcal{E}_{20} > m_{02} c^2$ , il decadimento è possibile soltanto se

$$M_0 > m_{01} + m_{02} \quad (2.57)$$

altrimenti c'è bisogno di una qualche energia esterna per indurre il decadimento. Da questo possiamo dedurre immediatamente che, affinché vi sia un decadimento spontaneo, deve essere sempre soddisfatta la condizione (2.57). L'energia da trasferire al sistema affinché avvenga il decadimento è la cosiddetta *energia di legame* (di cui discuteremo ampiamente nel paragrafo 3.6 sull'energia di legame e in quello 4.1 sugli urti relativistici) pari alla differenza delle masse:  $M_0 - m_{01} - m_{02}$ .

Accanto alla conservazione dell'energia bisogna imporre anche la conservazione dell'impulso che nel nostro caso diviene

$$0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \rightarrow p_1 = p_2 \quad (2.58)$$

Le equazioni (2.56) e (2.58) determinano in maniera univoca i prodotti del decadimento. Infatti

$$p_1 = \sqrt{\mathcal{E}_{01}^2 - m_{01}^2 c^4}, \quad p_2 = \sqrt{\mathcal{E}_{02}^2 - m_{02}^2 c^4} \quad (2.59)$$

e le energie dei prodotti del decadimento sono

$$\mathcal{E}_{01} = \frac{M_0^2 + m_{01}^2 - m_{02}^2}{2M_0} c^2, \quad \mathcal{E}_{02} = \frac{M_0^2 + m_{02}^2 - m_{01}^2}{2M_0} c^2 \quad (2.60)$$

## 2.6 Covarianza dell'elettromagnetismo

Come abbiamo trattato brevemente le trasformazioni di Lorentz sono nate esattamente per giustificare l'invarianza della velocità della luce. L'invarianza della luce è una conseguenza naturale delle leggi di Maxwell quindi tali equazioni devono soddisfare tutti i requisiti della relatività. Quindi ci si aspetta che la covarianza di tali leggi sia solo un fatto formale. Bisogna semplicemente capire come passare dalle varie grandezze scalari e vettoriali a quelle quadrivettoriali. Innanzitutto bisogna prendere atto di un'evidenza sperimentale: *l'invarianza della carica elettrica. Ad oggi sperimentalmente non vi è ad oggi nessuna evidenza in direzione contraria alla sua invarianza (cosa non vera per la massa).*

Analizziamo le equazioni nel vuoto (1.27) ed introduciamo per comodità i potenziali. Siccome il campo  $\mathbf{B}$  soddisfa le condizioni  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  e  $\nabla \times \mathbf{B} \neq 0$  ha senso introdurre il *potenziale vettore*  $\mathbf{A}$  tale che  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Dall'equazione (1.27-b) si ottiene  $\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$  dunque esiste un campo irrotazionale che può essere espresso come il gradiente di una funzione scalare. Tale funzione è il cosiddetto *potenziale elettrostatico*. Dunque i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  possono essere espressi come segue

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.61)$$

I potenziali introdotti  $(\Phi, \mathbf{A})$  non sono univoci ma esistono varie coppie che ammettono tuttavia la stessa coppia di campi  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ . Infatti data una coppia di potenziali vettori  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}'$  questi devono soddisfare la condizione  $\nabla \times (\mathbf{A} - \mathbf{A}') = 0$  per cui il campo  $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$  è ancora irrotazionale. Dunque può essere espresso come il gradiente di una funzione scalare  $\mathcal{X}$ .

Un discorso analogo può essere condotto anche il potenziale elettrostatico  $\Phi$ . Supponendo che vi siano due potenziali scalari  $(\Phi, \Phi')$ , questi ultimi uniti ai campi  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}'$  devono soddisfare la condizione  $\nabla(\Phi - \Phi') + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathcal{X} = 0$  da cui si ottengono le *trasformazioni di gauge*

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \mathcal{X}$$

È possibile quindi avere diverse coppie di potenziali  $(\Phi, \mathbf{A})$  ma questi daranno gli stessi campi  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ .

Sostituendo i potenziali nelle due equazioni non omogenee (1.27-a), (1.27-d) otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square \mathbf{A} + \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \quad (2.63)$$

ed imponendo la condizione di gauge di Lorentz ( $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ ) si ottengono le equazioni d'onda per i potenziali

$$\square \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.64)$$

Dopo questo breve ma utile richiamo sui potenziali passiamo alla riscrittura relativistica dell'elettromagnetismo. Abbiamo già riportato l'evidenza sperimentale dell'invarianza della carica elettrica. Tuttavia é invariante nello spazio di Minkowski anche il quadrivolume infinitesimo  $d^4\mathcal{V}$ . Infatti

$$d^4\mathcal{V}' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 = \frac{\partial(x'^0 \dots x'^3)}{\partial(x^0 \dots x^3)} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = J d^4\mathcal{V} \quad (2.65)$$

ma lo jacobiano per le trasformazioni di Lorentz vale 1. Valutiamo la grandezza  $dq dx^\mu$

$$dq dx^\mu = \rho d^3\mathcal{V} dx^\mu = \rho dt d^3\mathcal{V} \frac{dx^\mu}{dt} = dt d^3\mathcal{V} \left( \rho \frac{dx^\mu}{dt} \right) \quad (2.66)$$

e considerato che  $dt d^3\mathcal{V}$  é invariante allora  $\rho \frac{dx^\mu}{dt}$  é un quadrivettore. In particolare rappresenta la *quadr corrente* (la generalizzazione a quattro dimensione della densità di carica e la densità di corrente)

$$J^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} = \left( \rho \frac{dx^0}{dt}, \rho \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = (c\rho, \mathbf{v}\rho) = (J^0, \mathbf{J}) = (J^0, J^1, J^2, J^3) \quad (2.67)$$

quindi la condizione sulla conservazione della carica (1.24) diviene

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (2.68)$$

che é un invariante relativistico (alla luce della generalizzazione del prodotto scalare in relatività (2.28)). La seconda quantità quadrivettoriale che possiamo costruire é il *quadripotenziale*  $A^\mu$  cosí definito

$$A^\mu = (\Phi, c\mathbf{A}) = (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad (2.69)$$

da cui le equazioni d'onda (2.64) divengono

$$\square A^\mu = \frac{J^\mu}{\epsilon_0 c} \quad (2.70)$$

equazione invariante in forma per trasformazioni di Lorentz.

Anche le condizioni di gauge (2.62) possono essere riassorbite in una sola equazione. Con facili passaggi si giunge all'espressione

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \quad (2.71)$$

e la condizione della gauge di Lorentz diviene  $\partial_\mu A^\mu = 0$ .

Resta quindi ora di esprimere le equazioni di Maxwell. Notiamo che tali equazioni sono esprimibili in termini delle derivate dei potenziali o meglio in termini di quadriderivate del quadripotenziale. Infatti procediamo per costruzione partendo dalle espressioni delle sei componenti di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  in funzione dei potenziali  $\Phi$  e  $\mathbf{A}$  (2.61)

$$\begin{aligned}
 B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \left( \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 \right) & E_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 \\
 B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \left( \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \right) & E_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} = \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 \\
 B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{1}{c} \left( \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 \right) & E_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Introduciamo una grandezza tensoriale di rango due antisimmetrico detto *tensore di Faraday* così definito

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{2.73}$$

Il *tensore di Faraday* è il campo elettromagnetico. Con l'introduzione di questa grandezza cade completamente la divisione dei fenomeni elettromagnetici come dovuti a due entità diverse (il campo elettrico ed il campo magnetico). È il campo elettromagnetico che può in particolari circostanze manifestarsi solo come effetti elettrici oppure solo magnetici. La grandezza covariante per trasformazioni di Lorentz non sono dunque i campi vettoriali bensì è un tensore di rango due. L'espressione di  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  (versione controvariante) è la seguente

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -c B_z & c B_y \\ E_y & c B_z & 0 & -c B_x \\ E_z & -c B_y & c B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.74}$$

mentre la versione covariante è

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -c B_z & c B_y \\ -E_y & c B_z & 0 & -c B_x \\ -E_z & -c B_y & c B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.75}$$

Le equazioni di Maxwell non omogenee possono essere compattate nel seguente modo

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \rightarrow \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{J^\nu}{\epsilon_0 c} \tag{2.76}$$

per le altre due equazioni bisogna introdurre il tensore di Faraday duale  ${}^* \mathcal{F}^{\mu\nu}$  così definito

$${}^* \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \tag{2.77}$$

dove  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  é il tensore di rango quattro completamente antisimmetrico cosí definito

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2, \delta = 3 \text{ e per ogni altra combinazione che con un numero} \\ & \text{pari di permutazioni diviene } 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{se almeno due indici sono uguali} \\ -1 & \text{per una qualsiasi combinazione che con numero dispari di permutazione diviene } 0, 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.78)$$

L'espressione di  $*F^{\mu\nu}$  é

$$*F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -cB_x & -cB_y & -cB_z \\ cB_x & 0 & -E_z & -E_y \\ cB_y & E_z & 0 & -E_x \\ cB_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

da cui le equazioni omogene sono compattate come

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \rightarrow \partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.80)$$

Resta per concludere quest'analisi le legge di trasformazione tra sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$  nell'ipotesi del boost di Lorentz (2.19). Siccome  $F^{\mu\nu}$  é un tensore la sua legge di trasformazione é la (2.15)

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} F^{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (2.81)$$

che riscritta in termini delle componenti di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  diviene

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - \beta cB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z - \beta cB_y) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y - \frac{\beta}{c}E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - \frac{\beta}{c}E_y) \end{cases} \quad (2.82)$$

da cui si evince immediatamente che ciò che é osservato in sistema come campo elettrico e/o magnetico viene interpretato nell'altro sistema in maniera diversa. Quindi se in  $S$  vi é solo un campo elettrico inevitabilmente in  $S'$  vi sará anche un campo magnetico.

Infine manca la forza di Lorentz (1.25). Introduciamo una densitá di volume per la forza di Lorentz in modo che risulti

$$\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = \rho (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.83)$$

ed analizzando la componente  $\hat{i}$  per esempio

$$\begin{aligned}
 F_x = \rho(E_x + v_y B_z - v_z B_y) &= \rho E_x + (\rho v_y) B_z - (\rho v_z) B_y \\
 &= J_0 \mathcal{F}^{10} + J_2 \mathcal{F}^{12} + J_3 \mathcal{F}^{13} \\
 &= J_\mu \mathcal{F}^{1\mu}
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

notiamo quindi che la generalizzazione della (1.25) diviene

$$f^\mu = \mathcal{F}^{\mu\nu} J_\nu \tag{2.85}$$

dove al variare di  $\mu = 1, 2, 3$  ricomponiamo le componenti spaziali della forza. E' interessante analizzare la componente temporale di  $f^\mu$  per meglio definire tutte le proprietà della quadriforza di Lorentz. Infatti

$$\begin{aligned}
 f^0 = \mathcal{F}^{0\nu} J_\nu &= \mathcal{F}^{00} J_0 + \mathcal{F}^{01} J_1 + \mathcal{F}^{02} J_2 + \mathcal{F}^{03} J_3 \\
 &= (-\rho v_x)(-E_x) + (-\rho v_y)(-E_y) + (-\rho v_z)(-E_z) \\
 &= \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

dove  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$  é la potenza per unità di carica in meccanica classica. Ovviamente non é presente il contributo del campo magnetico poiché come sappiamo esso non compie lavoro. Inoltre come risultato della covarianza dell'elettromagnetismo abbiamo ottenuto anche l'espressione esplicita della quadriforza di Lorentz in termini dei campi classici  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$

$$f^\mu = \rho(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{2.87}$$

Un particella di massa  $m_i$  e carica  $q$  in regime relativistico immersa in un campo elettromagnetico  $F^{\mu\nu}$  é descritta attraverso l'equazione del moto seguente

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{m_i} \mathcal{F}^{\mu\nu} u_\nu \tag{2.88}$$

che é la generalizzazione dell'equazione di Newton (1.2) e della forza di Lorentz (1.25).

## Capitolo 3

# Teoria del nucleo

In questo terzo capitolo inizieremo riportando il primo modello per la struttura dell'atomo dovuta all'esperienza Rutherford. L'evidenza sperimentale condusse a teorizzare l'atomo come sostanzialmente una sfera vuota all'interno della quale vi era una seconda sfera molto massiva e nettamente piú piccola: il nucleo. Proseguiremo, quindi, con l'individuare di cosa é costituito il nucleo introducendo i protoni e neutroni. Le misurare di massa e la classificazione dei cosiddetti isotopi sono condotte utilizzando lo spettrografo di massa. Con l'introduzione del concetto di energia di legame sará possibile giustificare la stabilitá o meno dei nuclei e il fenomeno della radioattivitá alfa, beta e gamma sará classificato e giustificato. In particolare il decadimento alfa sará investigato introducendo gli elementi base della meccanica quantistica. Infine, dopo aver introdotto le leggi di decadimento e l'evoluzione temporale di una famiglia di sostanze radioattive, mostreremo il modello cosiddetto semiempirico per la stabilitá dei nuclei. Concluderemo il capitolo riportando le famiglie radioattive note e loro caratteristiche principali.

### 3.1 Lo scattering Rutherford

Un primo modello per la struttura atomica fu ipotizzato da Thomson. Questo modello era costituito da una sfera nella quale vi erano immerse sia cariche positive che negative con una medesima distribuzione spaziale. Ipotizzando, quindi, la materia cosí costituita si cercó d'indagarla per avere la dimostrazione di quanto si ammetteva. A tale scopo, rappresentando ancora oggi un punto fondamentale per l'evidenza sperimentale della struttura dell'atomo, Rutherford realizzó un'esperienza, che porta il suo nome, che pose fine al modello di Thomson e prese definitivamente piede il modello planetario dell'atomo. Vogliamo, quindi, riportare brevemente l'impostazione ed i risultati dell'esperienza di Rutherford.

A tal fine Rutherford utilizzó delle particelle, dette alfa ed indicate con  $\alpha$ , come proiettili con cui bombardare la materia. Furono scelte le particelle  $\alpha$  poiché esse risultavano abbastanza grandi e quindi sufficientemente energetiche per non essere del tutto assorbite dalla materia e giungere sul bersaglio prescelto. Infatti le particelle  $\alpha$  sono in grado di attraversare una distanza dell'ordine di  $10^{-2}$  m d'aria, come anche un sottile foglio d'oro dello spessore di  $10^{-6}$  m. Distanza quest'ultima sulla quale le particelle  $\alpha$  attraversano un migliaio di atomi.

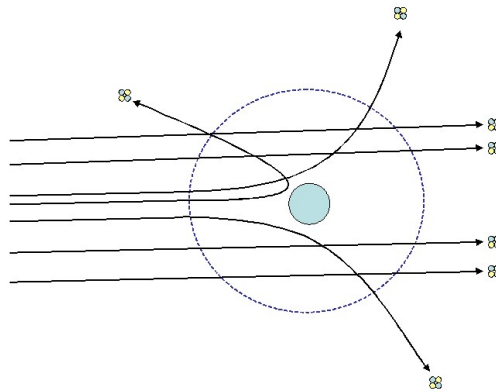
Nell'ipotesi del modello di Thomson le particelle  $\alpha$ , essendo cariche, dovevano essere soggette a delle piccole deflessioni nella traiettoria. Essendo impossibile vedere dove queste effettivamente attraversavano l'atomo ci si aspettava una distribuzione gaussiana del numero di particelle deviate rispetto all'angolo di deflessione che in termini matematici era descritta come segue

$$\frac{dN}{d\theta} \propto e^{-\frac{\theta^2}{2\theta_0^2}} \quad (3.1)$$

dove  $\theta$  é l'angolo di deviazione e  $\theta_0$  é lo scarto quadratico medio.

Tuttavia sperimentalmente non venne mai osservata questa distribuzione. Inoltre sperimentalmente furono osservate particelle addirittura riflesse all'indietro. Quindi l'ipotesi di Thomson era del tutto inadeguata rispetto alla realtà. Successivamente Rutherford suggerí un modello simile al sistema solare con un nucleo centrale in cui vi era quasi tutta la massa e con carica positiva, e degli elettroni, particelle di massa nettamente piú piccola e con carica negativa, orbitanti intorno al nucleo.

Con questa ipotesi bombardando la materia si osservó che le particelle  $\alpha$  che non urtano il nucleo passano indisturbate. Invece passando ad una distanza minore dal nucleo esse risentivano della repulsione elettromagnetica e risultavano quindi deflesse con angoli piccoli e soltanto una piccola frazione "urtando" fisicamente con il nucleo erano deflesse con angoli molto grandi. Infine con urto centrale con il nucleo era previsto addirittura una riflessione (figura 3.1). Ma questa ultima con una frequenza statistica trascurabile. Il risultato di tutte queste evidenze portó quindi alla conclusione che l'atomo é pressoché vuoto e la sua massa é confinata in un'ulteriore sfera di dimensione minore rispetto a quelle dell'atomo.



**Figura 3.1:** Rappresentazione qualitativa delle traiettorie descritte dalle particelle  $\alpha$  intorno al nucleo.

Nell'ipotesi di urto frontale possiamo immediatamente ottenere una prima stima del raggio del nucleo. Infatti per la conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2}m_{\alpha}v_i^2 = \frac{1}{2}m_{\alpha}v_f^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{l} \tag{3.2}$$

essendo  $m_{\alpha}$ ,  $2e$ ,  $v_i$  e  $v_f$  rispettivamente la massa, la carica, la velocità iniziale e finale della particella  $\alpha$ ,  $Ze$  la carica del nucleo ed  $l$  la distanza dal nucleo quando la particella incidente possiede velocità  $v_f$ . Nell'ipotesi che la particella venga riflessa nel punto di minima distanza dal nucleo si ottiene  $v_f = 0$ . Quindi

$$\frac{1}{2}m_{\alpha}v_i^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{l_{\min}} \rightarrow l_{\min} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{m_{\alpha}v_i^2} \doteq b \tag{3.3}$$

Le particelle  $\alpha$  sono emesse con un'energia di  $\sim 5 \text{ MeV}^1$ , quindi per  $Z = 79$  si ottiene  $b \sim 4 * 10^{-14} \text{ m}$ .

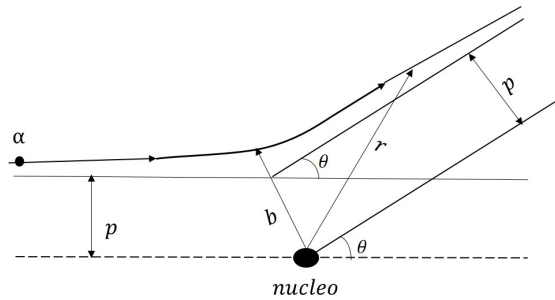
Risolvendo il cosiddetto problema di Keplero nel caso di repulsione coulombiana con urto non centrale (vedere appendice A) si ottiene

<sup>1</sup>1 Mev = 10<sup>6</sup> eV mentre 1 eV = 1,6 \* 10<sup>-19</sup> J



$$p = \frac{b}{2} \cot \frac{\theta}{2} \tag{3.4}$$

dove  $p$  viene detto parametro d'urto (vedi figura 3.2). Si nota immediatamente che maggiore é il parametro d'urto  $p$  tanto minore é l'angolo di scattering. Quindi definiamo  $\theta_{\min}$  come

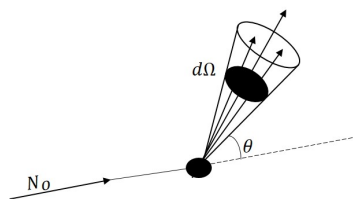


**Figura 3.2:** Traiettoria della particella  $\alpha$  dovuta alla presenza di un nucleo. La grandezza  $p$  é detta parametro d'urto e  $b$  rappresenta la minima distanza raggiunta dalla particella  $\alpha$  nel suo avvicinamento al nucleo.

$$\theta_{\min} = 2 \arctan \frac{b}{2 p_{\max}} \tag{3.5}$$

Sarebbe inutile cercare di provare questa formula con l'esperienza diretta, poiché in essa figura il parametro  $p$  impossibile da misurare. Tuttavia é possibile dare una stima teorica che poi possa essere sperimentalmente verificata.

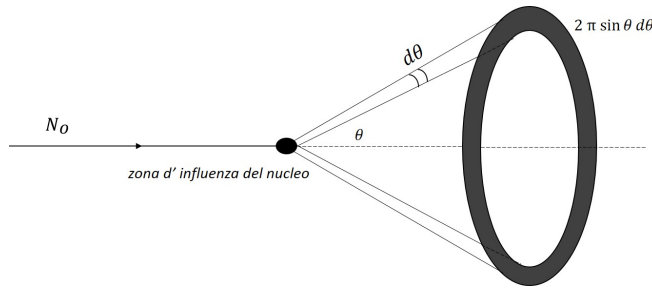
Supponiamo che vi sia una sferetta sulla quale incidano le particelle  $\alpha$  con densità del flusso pari a  $N_0$  (vedi figura 3.3). Per uno studio dettagliato della diffusione si determina il numero medio di particelle  $N(\theta)$  diffuse nei limiti dell'angolo solido  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  nelle direzioni caratterizzate dagli angoli  $\theta$  e  $\phi$ . Supponendo una



**Figura 3.3:** Numero di particelle  $N(\theta)$  diffuse nell'angolo solido  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ .

distribuzione isotropa é chiaro che il risultato non deve dipendere dall'angolo  $\phi$ , quindi ha senso considerare l'integrazione su quest'angolo e soffermarsi ad analizzare il numero medio di particelle diffuse nei limiti del dominio giacente fra due angoli solidi caratterizzati dagli angoli  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  (vedi figura 3.4). Evidentemente ora l'angolo solido diviene  $d\Omega^* = 2\pi \sin \theta d\theta$ .

Supponiamo che le particelle incidenti prima dell'urto si muovano in un fascio parallelo. Poiché per le altre condizioni uguali l'angolo di deviazione (3.4) é determinato dal parametro di collisione  $p$ , allora é evidente che di angolo giacente nei limiti fra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  deviano le particelle il cui parametro é compreso fra  $p$  e  $p - dp$ , cioè le particelle che passano all'interno degli anelli fra le circonferenze di raggi  $p$  e  $p - dp$  descritte attorno a ciascuno dei centri diffondendeti (nucleo). L'area di ciascuno anello vale  $2\pi p dp$  e possiamo affermare che il numero medio di partielle deviate di angolo compreso fra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ , cioè che si muovono dopo la diffusione all'interno dell'angolo solido  $d\Omega^*$ , é proporzionale a  $2\pi p dp$ .



**Figura 3.4:** Numero di particelle  $N(\theta)$  diffuse nell'anello di ampiezza angolare  $d\theta$  e superficie  $d\Omega^*$ .

Si definisce quindi *sezione efficace*  $d\sigma$  del nucleo la quantità

$$d\sigma = 2\pi p dp \tag{3.6}$$

che riscritta in termini dell'espressione (3.4) diviene

$$d\sigma = -\frac{\pi b^2}{4} \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \tag{3.7}$$

Il segno meno é ininfluenza ai nostri fini. In quanto indice che all'aumentare del parametro d'urto  $p$  l'angolo diminuisce. Quindi considerando il modulo ed introducendo l'angolo solido  $d\Omega^*$  abbiamo

$$d\sigma = \frac{\pi b^2}{8} \frac{\sin \theta d\theta}{\sin^4 \theta/2} = \frac{b^2}{16} \frac{d\Omega^*}{\sin^4 \theta/2} \tag{3.8}$$

Per un confronto con i dati sperimentali bisogna riscrivere il tutto in termini della sezione macroscopica  $d\Sigma$  cioè la somma delle sezioni efficaci di tutti i nuclei diffondenti per unità di volume. Supponendo che questi siano distribuiti in maniera uniforme, é evidente che

$$d\Sigma = n d\sigma = n \frac{b^2}{16} \frac{d\Omega^*}{\sin^4 \theta/2} \tag{3.9}$$

dove  $n$  é il numero di nuclei per unità di volume. Se  $N$  é il numero di particelle presenti nel fascio, é chiaro che il numero di particelle diffuse nell'angolo solido  $d\Omega^*$  risulta essere

$$dN = N d\Sigma = N n \frac{b^2}{16} \frac{d\Omega^*}{\sin^4 \theta/2} \tag{3.10}$$

La relazione (3.10) rappresenta il risultato finale dello scattering Rutherford che nel caso di  $N$  costante può essere sintetizzata come segue

$$\frac{dN}{d\Omega^*} \sin^4 \theta/2 = \text{costante} \tag{3.11}$$

Tale relazione é stata sperimentalmente verificata.

Notiamo che la relazione di Rutherford diverge per  $\theta = 0$ , ma ciò non ha significato fisico in quanto  $\theta = 0$  corrisponde a  $p = \infty$  quindi l'elettrone passerebbe senza risentire dell'interazione del nucleo e ciò non è quello che ci siamo prefissati di fare. Con l'esperienza di Rutherford si è ottenuto come risultato le dimensioni dei nuclei atomici ( $10^4 \div 10^5$  volte più piccole di quelle dell'atomo). Integrando la sezione d'urto (3.8) si ha

$$\begin{aligned}\sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega^*} d\Omega^* = \frac{b^2}{16} \int \frac{d\Omega^*}{\sin^4 \theta/2} = \frac{\pi b^2}{8} \int_{\theta_{min}}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\sin^4 \theta/2} d\theta = \frac{\pi b^2}{8} \int_{\theta_{min}}^{\pi} \frac{2 \cos \theta/2 \sin \theta/2}{\sin^4 \theta/2} d\theta \\ &= \frac{\pi b^2}{2} \int_{\theta_{min}}^{\pi} \frac{\cos \theta/2}{\sin^3 \theta/2} d(\theta/2) = -\frac{\pi b^2}{2} \int_{\theta_{min}}^{\pi} \cot \theta/2 d(\cot \theta/2) = \\ &= \frac{\pi b^2}{2} \int_{\pi}^{\theta_{min}} d(\cot \theta/2) \cot \theta/2 = \frac{\pi b^2}{4} \cot^2 \theta/2 \Big|_{\pi}^{\theta_{min}} = \frac{\pi b^2}{4} \left( \cot^2 \frac{\theta_{min}}{2} - 1 \right)\end{aligned}\quad (3.12)$$

Concludiamo questo paragrafo riportando un aspetto che mette in crisi questa analisi fin qui esposta. Infatti conoscendo ora il raggio atomico si può calcolare la velocità di rotazione dell'elettrone intorno al nucleo. Per esempio nel caso dell'atomo di idrogeno nello stato fondamentale abbiamo

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}} \simeq 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow a_c = \frac{v^2}{r} \simeq 10^{12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\quad (3.13)$$

Dalla teoria dell'elettromagnetismo una particella in accelerazione con velocità molto inferiore a quella della luce ( $\beta \ll 1$ ) irradia energia con una potenza pari a

$$W = \frac{1}{6\pi} \frac{\mu_0}{c} q^2 a^2 \rightarrow W \simeq 10^{-9} \text{ W}\quad (3.14)$$

mentre l'energia cinetica dell'elettrone in rotazione è approssimativamente pari a  $T \sim 10^{-18} \text{ J}$  da cui si evince che l'elettrone dovrebbe in un tempo pari a  $10^{-9} \text{ s}$  cadere sul nucleo!! Evidentemente questo non accade e dunque **la visione planetaria dell'atomo non è corretta e al di sotto di una certa soglia fallisce.**

### 3.2 Sezione d'urto

Consideriamo un esperimento in cui un fascio di  $N_i$  particelle incide su un bersaglio costituito da  $N_b$  particelle e sia  $v$  la velocità relativa tra le particelle del fascio e del bersaglio. Il flusso  $\phi$  di particelle incidenti, cioè il numero di particelle che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo, è dato come segue

$$\phi = \frac{N_i}{\Delta S \Delta t} = \frac{N_i \Delta x}{\Delta S \Delta x \Delta t} = \frac{N_i v}{V} = n_i v\quad (3.15)$$

Il numero di particelle bersaglio per unità di superficie investite dal fascio è:

$$\frac{N_b}{\Delta S} = \frac{N_b \Delta x}{V} = n_b \Delta x\quad (3.16)$$

$n_i$  e  $n_b$  sono il numero di particelle del fascio e del bersaglio per unità di volume. Il flusso incidente viene attenuato dall'interazione col bersaglio e l'attenuazione è proporzionale alla densità di particelle,  $n_b$ , e allo spessore del bersaglio,  $\Delta x$ . In formule abbiamo

$$\Delta\phi = -\phi \sigma n_b \Delta x \tag{3.17}$$

di modo che la frazione di flusso rimosso dal fascio per l'interazione con il bersaglio é pari al numero di particelle bersaglio contenute in un volume  $\sigma \Delta x$  (figura 3.5)

$$-\frac{\Delta\phi}{\phi} = n_b \sigma \Delta x \tag{3.18}$$

$\sigma$  é la sezione d'urto del processo di diffusione che si sta analizzando e ha le dimensioni di una superficie.

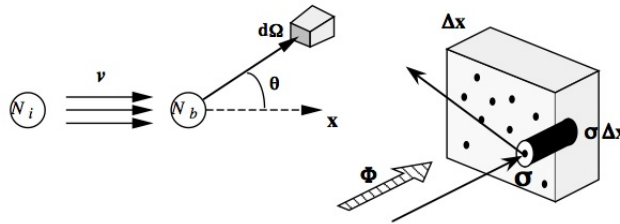


Figura 3.5: Interpretazione geometrica della sezione d'urto.

Nell'attraversare il bersaglio il flusso incidente é attenuato secondo la legge (soluzione dell'equazione (3.18))

$$\phi(x) = \phi_0 e^{-n_b \sigma x} \tag{3.19}$$

Per un processo di sezione d'urto  $\sigma$  e un bersaglio di densità  $n_b$ , si definiscono le grandezze  $\mu = n_b \sigma$  (coefficiente di assorbimento) e  $\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{n_b \sigma}$  (lunghezza di attenuazione).

### 3.3 Protoni e neutroni

Attraverso l'esperienza di Rutherford emerse quindi che l'atomo era soprattutto una sfera vuota ed al suo interno una seconda sfera centrale molto massiva e di dimensioni nettamente inferiori a quelle dell'atomo stesso. Infatti le dimensioni dell'atomo risultarono essere di  $10^{-12}$  m mentre la parte centrale fu dell'ordine di  $10^{-15}$  m.

Si osservó anche come l'atomo potesse interagire con la radiazione elettromagnetica sia assorbendola che emettendola. Questi fenomeni vennero spiegati in termini dei livelli energetici della nuvola elettronica che avvolgeva la parte centrale. Le energie per questi fenomeni furono misurate dell'ordine del KeV ( $= 10^3$  eV).

Tuttavia si osservarono anche altre forme di radiazione da parte dell'atomo che da una prima analisi, immergendo gli atomi in un campo magnetico, risultarono essere di tre tipi diversi. In particolare

- radiazione alfa ( $\alpha$ ) la cui energia é dell'ordine di 8 MeV e vi é trasporto di carica elettrica positiva
- radiazione beta ( $\beta$ ) la cui energia é inferiore ai 5 MeV e vi é trasporto di carica elettrica negativa
- radiazione gamma ( $\gamma$ ) la cui energia é dell'ordine dei 5 MeV e non vi é trasporto di carica elettrica

Essendo le energie di molto superiori rispetto a quelle incontrate fino a quel tempo l'origine di queste energie non potevano essere ricondotte all'interazione elettronica, ma si ipotizzó fossero legate al nucleo. Si cominció, quindi, ad investigare sulla natura del nucleo.

I primi parametri presi in considerazione furono la massa ed il raggio. Dall'esperienza di Rutherford il raggio doveva essere dell'ordine di  $b$  (3.3) ed in particolare sperimentalmente si trovò una relazione del tipo

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (3.20)$$

dove  $R$  è il raggio del nucleo,  $A$  è il cosiddetto numero di massa ed  $r_0 = (1,4 \div 1,5) * 10^{-15}$  m.  $A$  lo si può legare al numero atomico  $Z$  (numero che identifica la specie chimica in questione), in quanto essendo l'atomo un oggetto elettricamente neutro ed avendo  $Z$  elettroni, necessariamente deve avere  $Z$  cariche di segno opposte nel nucleo.

Analizzando atomi della stessa sostanza chimica ( $Z$  fisso) bisognava ricavare la massa del nucleo. Da questo esperimento scaturì che atomi con la stesso  $Z$  potevano avere anche masse diverse. Quindi non vi era una proporzionalità tra  $Z$  ed  $A$ . Allora fu suggerito di considerare il nucleo composto da  $A$  particelle cariche positivamente ( $A > Z$ ) ed  $A - Z$  elettroni; questo perché comunque la materia risultava neutra. Le particelle positive furono dette protoni. Quest'ipotesi trovò molte opposizioni: Infatti gli elettroni essendo dei fermioni devono soddisfare il principio di Pauli ( $\Delta x \Delta p \sim h$ ), per  $\Delta x$  dell'ordine del raggio nucleare si ottiene  $\Delta p \sim 10^2$  MeV mentre gli elettroni che uscivano dal nucleo per i raggi  $\beta$  avevano al massimo 5 MeV.

Per questi motivi l'ipotesi non era concorde con la natura. Si ipotizzò successivamente l'esistenza di una terza particella denominata neutrone (scoperta nel 1932) con una massa quasi uguale a quella del protone e una carica nulla. Quindi il nucleo lo si pensò formato da protoni e neutroni e quest'ultimi responsabili dei diversi valori della massa degli atomi anche per  $Z$  uguale.  $N$ ,  $A$  e  $Z$  sono legati dalla seguente relazione

$$N = A - Z \quad (3.21)$$

dove  $N$  è il numero di neutroni. Al variare dei valori di  $N$ ,  $A$  e  $Z$  si differenziano gli atomi nel seguente modo

- Atomi con  $Z$  uguale sono detti *isotopi*
- Atomi con  $N$  uguale sono detti *isotoni*
- Atomi con  $A$  uguale sono detti *isobari*

Le masse del protone e del neutrone, misurate in energia, sono pari a

$$m_p = 938,27 \frac{\text{MeV}}{c^2}, \quad m_n = 939,56 \frac{\text{MeV}}{c^2} \quad (3.22)$$

Se confrontiamo questi valori con la massa di un elettrone ( $0,5 \text{ MeV}/c^2$ ) notiamo subito come il nucleo "pesa" quanto meno 2.000 volte la sua nuvola elettronica.

### 3.4 Spettrografo di massa

Riportiamo brevemente i punti salienti per poter misurare la massa dei nuclei. Per questo fine è fondamentale l'utilizzo dello spettrografo di massa con il quale combinando l'interazione di un nucleo coi i campi elettrici e magnetici si ottiene una misura del rapporto tra la carica elettrica e la massa del nucleo.

Lo spettrografo consiste (figura 3.6) in un apparato dove le particelle sono accelerate (tipicamente con una differenza di potenziale) e successivamente entrano in una zona dove sono presenti un campo elettrico ed uno

magnetico paralleli fra essi, uniformi in modulo e perpendicolari alla direzione di volo delle particelle accelerate. In questa seconda zona si trova uno schermo perpendicolare alla direzione di volo iniziale sul quale é possibile evidenziare il punto in cui le particelle collidono. In questo modo é possibile misurare alcune grandezze e da queste ricavare il rapporto  $q/m$ .

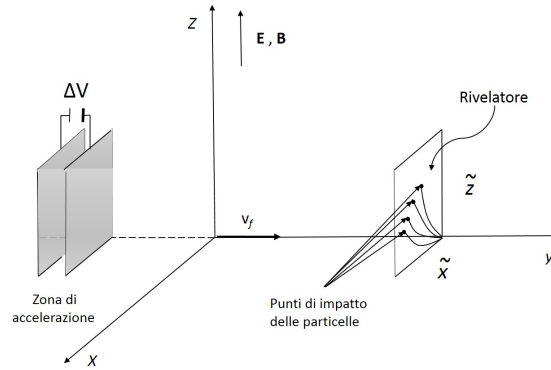


Figura 3.6: Schematica rappresentazione di uno spettroscopio di massa.

In particolare abbiamo: nella fase iniziale la particella o il nucleo dopo essere stato accelerato da un campo elettrostatico (la cui differenza di potenziale é pari a  $\Delta V$ ) possiede una velocità finale  $v_f$  tale che

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = q\Delta V \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} \quad (3.23)$$

nella second fase l'equazione del moto diviene

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B \\ m\ddot{z} = qE \end{cases} \quad (3.24)$$

essendo i campi elettrico  $\mathbf{E}$  e magnetico  $\mathbf{B}$  lungo l'asse  $z$  e la velocità (della prima fase) lungo l'asse  $y$ . Nel caso in cui la velocità iniziale che rappresenta la velocità finale sia molto intensa possiamo trascurare la componente di quest'ultima lungo l'asse  $x$ . In questo caso abbiamo

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qv_f B \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qE_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} B v_f t^2 \\ y(t) = v_f t \\ z(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{B}{v_f} y^2 \\ z(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{E}{v_f^2} y^2 \end{cases} \quad (3.25)$$

Dopo un tratto  $L$  (dove é posizionato il rivelatore di particelle) lungo la direzione  $y$  abbiamo

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{B}{v_f} L^2 \\ \tilde{z} = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{E}{v_f^2} L^2 \end{cases} \quad (3.26)$$

da cui si ottiene facilmente  $v_f = \frac{qBL^2}{2m\tilde{x}}$ . Sostituendo tale espressione nella legge oraria lungo l'asse  $z$  otteniamo l'equazione della parabola corrispondente alla proiezione del moto delle particelle sul piano del rivelatore

$$\tilde{z} = \frac{m}{q} \frac{2E}{L^2 B^2} \tilde{x}^2 \quad (3.27)$$

Le grandezze  $E$ ,  $B$ ,  $L$  sono date mentre  $\tilde{x}$  e  $\tilde{z}$  sono misurabili. Sul rivelatore avremo degli andamenti che sono funzioni solo di  $q/m$ . In questo modo misureremo il rapporto  $q/m$  e conoscendo la sostanza, sarà nota la carica, e quindi misureremo la massa dell'isotopo.

Nel caso in cui desideriamo avere un fascio monocromatico con una data velocità basta fare in modo che i campi  $E$  e  $B$  abbiano risultante delle forze sulle particelle nulla. Infatti

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.28)$$

da cui i moduli devono soddisfare la relazione

$$v = \frac{E}{B} \quad (3.29)$$

Uno spettrografo migliore potrebbe essere quello in cui ottengo una convergenza in un punto di particelle con la stessa carica e stessa massa, indipendentemente della velocità. Un focalizzatore può essere un magnete in modo analogo al prisma in ottica. Altrimenti è possibile avere una focalizzazione in termini di quantità di moto.

Con questa tecniche ed altre più sofisticate si è riusciti a censire le varie percentuali le varie percentuali isotopiche di tutti gli elementi chimici noti in natura.

### 3.5 Statistiche degli isotopi

Sono stati rilevati 284 nuclei diversi ( $A$  diverso) tra quelli stabili e leggermente instabili. Atomi di sostanze chimiche differenti ( $Z$  diverso) sono 81 con  $Z = 1 \div 83$ . Mancano gli elementi con  $Z = 43$  e  $Z = 61$  che sono rispettivamente il Tecnezio ed il Promazio. Inoltre non è stato ritrovato in natura il Bismuto ( $Z = 83$ ) ultimo elemento stabile. Sempre in natura vi sono anche gli elementi instabili che arrivano fino all'uranio ( $Z = 92$ ) mentre in laboratorio si è arrivati fino a  $Z = 111$ .

Per quanto riguarda gli isotoni abbiamo soltanto 11 nuclei con lo stesso  $N$  e sono distribuiti nell'intervallo  $1 \div 126$  ma ne mancano una decina. Tra gli gli isobari (stesso  $A$ ) sono distribuiti tra  $1 \div 209$ . Ricapitolando, abbiamo:

- $Z = 1 - 83$  stabili (manca il 43 e 61)  $\rightarrow 81$
- $N = 1 - 126$  stabili (ne mancano una decina)  $\rightarrow 116$
- $A = 1 - 209$  stabili (mancano due elementi)  $\rightarrow 284$

$Z \setminus N$	pari	dispari
pari	163	56
dispari	53	8

$Z \setminus A$	pari	dispari
pari	103	56
dispari	8	53

**Tabella 3.1:** Statistica dei nuclei al variare di  $Z$ ,  $N$ ,  $A$ .

Praticamente i nuclei sono per la metà con numeri pari sia per  $Z$  che  $N$ , mentre quasi tutti gli altri sono con almeno uno dei due con numero pari. Mentre quelli con entrambi dispari sono pochissimi, precisamente 8 e di

cui 3 sono debolmente radioattivi ed i restanti sono molto poco abbondanti. Risulta inoltre che per  $Z$  dispari (41) normalmente vi sono 1 o 2 isotopi al massimo, mentre per  $Z$  pari (40) ve ne sono molti. Un esempio é lo stagno ( $Z = 50$ ) che ha ben 10 isotopi stabili.

Per numeri piccoli notiamo che non esiste il nucleo ( $pp$ , protone protone) come per esempio non esiste il cosiddetto *elio due* ( ${}^2He$ ) come non esiste neanche il nucleo ( $nn$ , neutrone neutrone). Invece esiste il  $pn$  ( ${}^2H$  deuterio) ma é scarsamente legato. Infatti la differenza di massa tra lo stato  $pn$  e quello libero di un protone ed un neutrone é di circa  $2,2 \text{ MeV}/c^2$  che vedremo essere piccolissima per i legami nucleari. Infine come esempio esistono in natura due forme di elio:  ${}^3He$  con una percentuale di  $10^{-4} \div 10^{-5}$  rispetto a quello piú abbondante dell' ${}^4He$ .

**Sembra quindi che la natura discrimini la situazione dispari-dispari.** Per comprendere questa asimmetria é fondamentale introdurre la cosiddetta *energia di legame*.

### 3.6 Energia di legame

Un sistema fisico (qualsiasi reale configurazione rappresenti) é definito essere un sistema stabile quando l'energia o la massa dei suoi possibili costituenti é maggiore di quella corrispondente allo stato aggregato. Cioé la massa del sistema  $A + B$  deve essere minore della somma delle masse dei due sottocostituenti  $A$  e  $B$ . La differenza di massa risulta quindi trasformata in energia di legame. Piú é grande l'energia di legame piú il sistema tenderá a restare unito.

Definiamo, nel caso di un nucleo, l'energia del legame nel seguente modo

$$\mathcal{W}/c^2 = \sum_{i=1}^Z m_{p,i} + \sum_{i=1}^N m_{n,i} - m_Z^A \quad (3.30)$$

dove

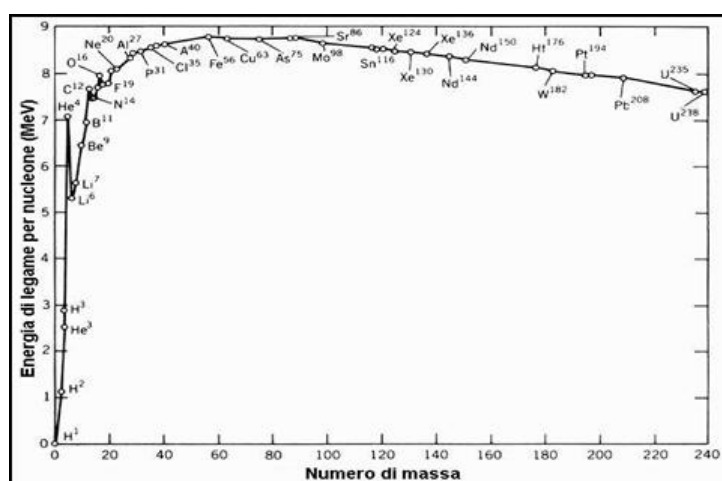
- $m_{p,i}$  é la massa dell' $i$ -esimo protone
- $m_{n,i}$  é la massa dell' $i$ -esimo neutrone
- $m_Z^A$  é la massa del nucleo composto da ( $A = Z + N$ ) nucleoni ( $Z$  protoni e  $N$  neutroni)

Ovviamente  $\mathcal{W} > 0$  infatti se non fosse cosí il nucleo non si formerebbe. L'energia di legame varia di molto, soprattutto per nuclei piccoli, infatti si passa da  $\mathcal{W} = 2 \text{ MeV}$  per il deuterio ( $pn$ ) ad un energia  $\mathcal{W} = 28 \text{ MeV}$  per le particelle  $\alpha$  ( $2p2n$ ). Ha piú senso quindi riportare l'energia di legame per nucleone. In figura 3.7 riportiamo l'andamento di  $\mathcal{W}/A$  in termini di  $A$  (curva di stabilitá). Si nota immediatamente che un nucleo é molto diverso da un suo isotopo avendo un'energia per nucleone molto diversa.

In media l'energia di legame é di  $8 \text{ MeV}$  per nucleone. Ció significa che per estrarre un nucleone bisogna fornire almeno  $8 \text{ MeV}$  d'energia al nucleo. Si é osservata una stabilitá migliore delle altre soprattutto per determinati numeri che si ripetono. Questi sono quando  $N = Z$  e precisamente sono 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Queste stabilitá nucleari possono essere interpretate come quando in chimica definiamo i gas nobili. Per come é l'andamento dell'energia, si ricava anche l'informazione se le reazioni che coinvolgono i nuclei sono endotermiche o esotermiche. Per esempio nel processo di fusione di piccoli nuclei in nuclei piú grandi otteniamo una differenza d'energia che rende la reazione esotermica.

Riportiamo qualitativamente il tipo d'interazione che avviene tra i nucleoni. Supponiamo un tipo d'interazione simili a quello elettromagnetico in cui ogni nucleone interagisce con i restanti. In quest'ottica ci si aspetta che il numero di coppie interagenti sia  $A(A - 1)/2$  e che l'energia di legame cresca come  $A^2$  mentre si nota che  $\mathcal{W}/A$





**Figura 3.7:** Energia di legame  $\mathcal{W}/c^2$  per unità di numero di massa  $A$  ricavata dalla spettroscopia di massa.

é costante (figura 3.7) quindi  $\mathcal{W}$  deve essere proporzionale ad  $A$ . In sostanza questo andamento é giustificabile come se le forze nucleari tendano a saturare con la crescita di  $A$ : *i nucleoni non possono risentire della presenza degli altri nucleoni dopo un certo intervallo spaziale*. Quindi i nucleoni interagiscono solo con i primi vicini. Considerate le dimensioni del nucleo é possibile porre un limite superiore all'intervallo di distanza su cui agiscono le forze nucleari ( $< 10^{-15}$  m).

Essendo due i costituenti fondamentali del nucleo, ed ipotizzando delle interazione fra essi, é cruciale capire la modalitá di interazione per le coppie  $pp$ ,  $nn$  ed  $pn$ . Solo conoscendo quale interazione sta alla base, si puó dopo cercare di dare una spiegazione della stabilitá o meno dei nuclei.

Tralasciando aspetti connessi alla meccanica quantistica e allo spin delle particelle da evidenze sperimentali si giunge alla conclusione che le coppie  $pp$ ,  $nn$ ,  $pn$  sono possibili ma con orientamento dello spin opposto (per noi lo spin in una visione classica é semplicemente il momento angolare della particella).

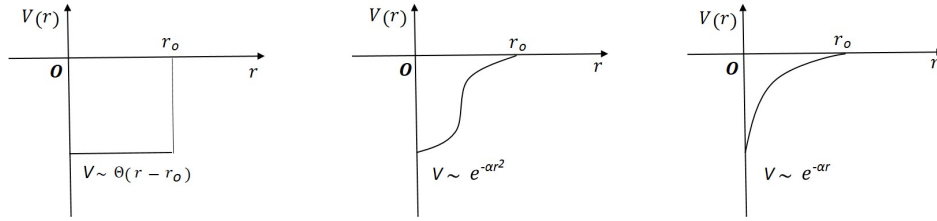
Resta quindi da confrontare l'interazione tra le tre possibili configurazioni. A tal fine introduciamo il concetto di nuclei speculari. Definiamo nuclei speculari due nuclei che si ottengono l'uno dall'altro scambiando i protoni con i neutroni e viceversa. I due nuclei speculari piú leggeri sono  ${}^3\text{H}$  e  ${}^3\text{He}$ . Dunque in questo caso le possibili interazioni sono due volte  $pn$  ed una sola  $nn$  per  ${}^3\text{H}$  mentre sono due  $pn$  ed una sola  $pp$ . L'interazione  $pn$  é per entrambi, quindi le due interazioni totali devono differire soltanto perché in  ${}^3\text{H}$  c'è  $nn$  e in  ${}^3\text{He}$  c'è  $pp$ . Misurando le energie di legame si ottiene

$$\mathcal{W}_{3\text{H}} \simeq 8,482 \text{ MeV}, \quad \mathcal{W}_{3\text{He}} \simeq 7,711 \text{ MeV} \rightarrow \mathcal{W}_{3\text{H}} - \mathcal{W}_{3\text{He}} \simeq 0,771 \text{ MeV} \quad (3.31)$$

che é proprio l'energia d'interazione coulombiana tra i due protoni in  ${}^3\text{He}$ . Quindi se depuriamo le interazioni nucleari da quelle elettromagnetiche, i valori sono uguali sia per  $pn$  che  $nn$ . L'invarianza tra  $p$  e  $n$  si enuncia nell'invarianza dell'isospin per le interazioni nucleari.

Fin qui abbiamo visto come avviene l'attrazione tra i nuclei da un punto di vista molto qualitativo considerando semplicemente le masse. Tuttavia si puó cercare una spiegazione piú rigorosa dell'interazione. Come abbiamo visto le interazione nucleari deve essere a corto range ed é sensibilmente superiore all'interazione elettromagnetica. Inoltre possiamo aggiungere che siccome i nucleoni sono in uno stato legato é chiaro che l'energia potenziale che descrive l'interazione nel nucleo deve essere tecnicamente una buca. La forma della buca da un punto di vista analitico puó essere ben rappresentato in figura 3.8.

Effettuando delle ipotesi su  $V(\mathbf{r})$ , si possono effettuare analisi con scattering simili a quello di Rutherford per



**Figura 3.8:** Modelli per il profilo della buca di energia potenziale all'interno del nucleo.

l'atomo per indagare la struttura nucleare. In particolare i primi studi per il fenomeno dell'attrazione nel nucleo fu eseguita su un concetto di stati legati simili ad una molecola. Infatti come Heitler e London avevano spiegato la molecola  $H_2$  dimostrando che questo avveniva semplicemente per la condivisione da parte dei due atomi della nuvola elettronica, così si ipotizzò che i nucleoni dovevano anch'essi condividere qualcosa. Negli stessi anni Fermi aveva appena formulato la teoria dell'interazione debole con la quale spiegava come un neutrone libero (non contenuto in un nucleo) decade in un protone con produzione di elettrone e antineutrino ( $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ). Quindi fu ipotizzato che anche nello stato legato i nucleoni potessero scambiarsi elettroni. Furono fatti i calcoli su questa teoria ed i risultati avevano ben quindici ordini di grandezza diversi. Il motivo di quest'incongruenza era anche legato al fatto che si voleva spiegare un processo d'interazione forte con un'interazione debole.

A tal fine considerando tuttavia lo stesso impianto teorico Yukawa suggerì l'esistenza di una nuova particella responsabile dell'interazione che fu chiamata mesone  $\pi$ . Visti gli accoppiamenti  $pp$ ,  $pn$  e  $nn$  questo mesone doveva avere tre segni di carica (positivo, negativo e neutro). Una stima del valore della massa del mesone  $\pi$  può essere immediatamente ottenuta richiedendo che l'interazione resti confinata nel nucleo. Sia  $R$  il range spaziale dell'interazione e  $\Delta t$  l'intervallo di tempo necessario a percorrerlo, è chiaro che

$$R = c \Delta t \sim \frac{c \hbar}{\Delta \mathcal{E}} = \frac{c \hbar}{m_\pi c^2} = \frac{\hbar}{m_\pi c} \tag{3.32}$$

dove è stato utilizzato il principio di indeterminazione di Heisenberg ( $\Delta t \Delta \mathcal{E} \sim \hbar$ ). Se  $m_\pi \rightarrow 0$  si ha che  $R \rightarrow \infty$  (caso del fotone). Il valore della massa di  $\pi$  poteva derivare come ordine di grandezza dal principio d'indeterminazione. Infatti dalla relazione (3.32) si ottiene

$$m_\pi \sim \frac{\hbar}{c R} \sim 10^2 \frac{\text{MeV}}{c^2} \tag{3.33}$$

Un valore compreso tra l'elettrone ( $0,5 \text{ MeV}/c^2$ ) ed il protone ( $938 \text{ MeV}/c^2$ ) da cui detto mesone.

### 3.7 Processo di decadimento

Supponiamo di avere una sostanza qualsiasi che ad un certo istante  $t_0$  sia composta da  $N_0$  particelle e che queste particelle decadano nel tempo. La variazione del numero di particelle  $dN$  dopo un intervallo di tempo  $dt$  deve essere proporzionale al numero iniziale e alla durata dell'intervallo temporale. In formule abbiamo

$$dN = -\lambda N dt \tag{3.34}$$

dove  $\lambda$  é una costante ed il segno meno indica che vi é stata una diminuzione. Questo processo é detto di decadimento<sup>2</sup>. Integrando la relazione abbiamo

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (3.35)$$

che rappresenta l'evoluzione temporale del numero di particelle della data sostanza che si trasformano per decadimento radioattivo in una nuova sostanza. Ovviamente  $N(t)$  é una funzione che tende a zero. Questa relazione é generale e vale per ogni tipo di decadimento. Il numero di particelle trasformate, funzione evidentemente crescente, variano con la seguente relazione

$$N_{\text{trasf.}}(t) = N_0 - N(t) = N_0 \left[ 1 - e^{-\lambda(t-t_0)} \right] \quad (3.36)$$

La costante  $\lambda$  tiene conto della rapiditá del decadimento. Si definisce vita media  $\tau$  del decadimento l'inverso di  $\lambda$ . Precisamente  $\tau$  non rappresenta il tempo necessario affinché tutta la sostanza venga trasformata in una nuova ma il tempo necessario affinché questa risulti scalata di una frazione  $e^{-1}$ . Infatti ponendo  $t_0 = 0$  si ottiene

$$N(\tau) = N_0 e^{-1} \quad (3.37)$$

Nel caso in cui anche la sostanza prodotta dal primo decadimento, con rapiditá  $\lambda_1$ , sia a sua volta soggetta ad un successivo decadimento, con rapiditá  $\lambda_2$ , é possibile generalizzare l'equazione (3.34). Infatti

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \quad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 \quad (3.38)$$

le cui soluzioni per  $N_1$  é data dalla (3.35), ponendo  $t_0 = 0$ , mentre per  $N_2$  e  $N_3$  sono date dal set di equazioni

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda t} - \lambda_2 N_2, \quad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 \quad (3.39)$$

Ponendo  $N_2(0) = 0$  abbiamo

$$N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right] \quad (3.40)$$

ed infine per  $N_3(t)$  l'equazione differenziale é data

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right] \quad (3.41)$$

mentre la soluzione con l'ipotesi  $N_3(0) = 0$  é

$$N_3(t) = N_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \frac{1}{\lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - 1) - \frac{1}{\lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - 1) \right] \quad (3.42)$$

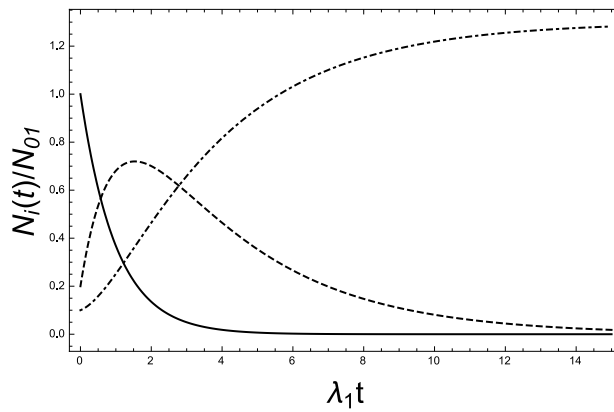
<sup>2</sup>L'equazione (3.34) é matematicamente identica alla (3.17) ma l'implicazione fisica é diversa.

Se la terza sostanza fosse ancora stata radioattiva avremmo dovuto continuare introducendo un termine di decadimento nella terza sostanza ed una quarta equazione per la sostanza ultima. Dopo  $t \gg \tau_1, \tau_2$ , é rimasta solo l'ultima sostanza ed ovviamente abbiamo  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_3(t) = N_0$ .

Nel caso in cui  $N_2(0) \neq 0$  e  $N_3(0) \neq 0$ , le soluzioni sono facilmente ottenute come

$$\begin{cases} N_1(t) = N_{01} e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = N_{02} e^{-\lambda_2 t} + N_{01} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right] \\ N_3(t) = N_{03} + N_{02} (1 - e^{-\lambda_2 t}) + N_{01} \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + 1 \right] \end{cases} \quad (3.43)$$

Gli andamenti temporali delle soluzioni sono mostrati in figura 3.9 per arbitrari valori delle costanti. Analizziamo



**Figura 3.9:** Evoluzione temporale dei decadimenti di due sostanze radioattive in una terza sostanza (stabile). Gli andamenti (3.43) sono graficati per i seguenti valori iniziali:  $N_{01} = 1, N_{02} = 0.2, N_{03} = 0.1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.3$ .  $N_1(t)$  (linea continua),  $N_2(t)$  (linea tratteggiata),  $N_3(t)$  (linea tratto e punto).

i casi estremi. Il primo é il seguente

$$\begin{cases} N_2(0) = 0 \\ \lambda_2 \ll \lambda_1 \rightarrow \tau_1 \ll \tau_2 \end{cases} \rightarrow N_2(t) \simeq N_1(0) e^{-\lambda_2 t} \quad (3.44)$$

quindi, quando  $N_2$  decade, é come se  $N_1$  fosse già tutto decaduto. Infatti  $\tau_1 \ll \tau_2$  implica che il decadere di  $N_1$  é veloce rispetto a quello di  $N_2$ . Analizziamo adesso il caso opposto

$$\begin{cases} N_2(0) = 0 \\ \lambda_1 \ll \lambda_2 \rightarrow \tau_2 \ll \tau_1 \end{cases} \rightarrow N_2(t) \simeq N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \quad (3.45)$$

dove praticamente  $N_2$  decade con il tempo di  $N_1$ , perché  $N_1$  é lento mentre  $N_2$  non lo é. Quindi appena c'è un decadimento tra  $N_1$  e  $N_2$ , subito decade anche  $N_2$  in  $N_3$ . Nella seconda ipotesi si deduce che se vi é una successione di decadimenti in cui il primo elemento ha una vita lunghissima rispetto a quelle dei suoi discendenti può capitare di poter avere contemporaneamente tutti o quasi gli elementi della successione. Questo caso accade spesso in natura. Questo fenomeno é detto *equilibrio secolare*. Si deduce quindi in questa ipotesi

$$\frac{dN_1}{dt} \simeq 0 \rightarrow \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = \dots = \frac{dN_{k-1}}{dt} = 0 \quad (3.46)$$

dove abbiamo ipotizzando che anche la vita media delle successive sostanze siano decrescenti, mentre l'ultimo elemento presenta la condizione

$$\frac{dN_k}{dt} > 0 \quad (3.47)$$

Le condizioni (3.46) possono essere riscritte anche nel seguente modo

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \dots = \lambda_{k-1} N_{k-1} \quad (3.48)$$

La quantità  $\alpha_i N_i$  é detta attività ed é molto importante nel poter calcolare la vita media delle sostanze di una serie radioattiva conoscendo la concentrazione percentuale e la vita media di altri elementi della serie stessa. Nel caso che la serie sia formata da solo due sostanze abbiamo

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 \rightarrow \frac{N_1}{\tau_1} = \frac{N_2}{\tau_2} \rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \quad (3.49)$$

### 3.8 Decadimento alfa

Il fenomeno della *radioattività alfa*  $\alpha$  é presente in Natura in ventiquattro nuclei mentre si riesce ad attenerlo anche per nuclei artificiali. Si sono riusciti a sintetizzare ben 75/80 nuclei artificiali. Questo fenomeno fu per la prima volta osservato all'inizio del ventesimo secolo e la comprensione del fenomeno sia da un punto di vista fisico che dal tipo di radiazione fu effettuato da Rutherford mentre una comprensione piú matematica fu eseguita molto piú tardi. Effettuando l'analisi spettrografiche si riuscí a stabilire la massa e la carica, invece con la misura di ionizzazione si ricavarano anche i valori dell'energia. *La radiazione  $\alpha$  é un fenomeno di produzione di fasci di particelle cariche che in un regime classico della Natura non dovrebbe esistere se la sua origine fosse nucleare.*

Si osservó sperimentalmente che le particelle  $\alpha$  erano/sono l'unione di due protoni e due neutroni; in sostanza erano degli atomi di elio ionizzati due volte. Una prova di quanto detto fu quella di porre materiali radioattivi in un contenitore a pareti sottili e il tutto posto in un altro contenitore. Quindi essendovi produzione  $\alpha$  era possibile rilevare dopo un certo intervallo la presenza dell'elio. Questo avveniva in quanto le  $\alpha$  attraversando le pareti sottili potevano assorbire degli elettroni e quindi costituire un atomo di elio. Effettuando poi delle misure di spettroscopia si poteva provare l'esistenza di spettri caratteristici dell'atomo di elio. Le caratteristiche fisiche delle  $\alpha$  sono di avere un'energia compresa dell'ordine ( $1 \div 10$ ) MeV.

Dalle evidenze sperimentali quindi si giunse alla conclusione che le  $\alpha$  vengono emesse dai nuclei con un'energia ben definita. Distinguiamo inizialmente tra l'energia posseduta dalle  $\alpha$  e l'energia emessa nel processo radioattivo. Infatti, la dinamica del sistema é quella di un corpo di massa  $M$  (nucleo padre) che si rompe in due corpi  $M_r$  (nuclei figlio) e  $m_\alpha$  (particella  $\alpha$ ). Dato che il processo presenta forze interne avremo la conservazione dell'impulso unitamente a quella dell'energia

$$0 = M_r v_r - m_\alpha v_\alpha, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} M_r v_r^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \quad (3.50)$$

dove  $\mathcal{E}$  é l'energia. Se  $\mathcal{E}_\alpha$  é l'energia cinetica delle  $\alpha$ , abbiamo

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{m_\alpha^2}{M_r} v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \mathcal{E}_\alpha \left( 1 + \frac{m_\alpha}{M_r} \right) \quad (3.51)$$

Dato che  $M_r \gg m_\alpha$ , sviluppando in serie abbiamo

$$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E} \left( 1 - \frac{m_\alpha}{M_r} \right) = \mathcal{E} \left( 1 - \frac{4}{A_r} \right) \quad (3.52)$$

dove  $\mathcal{E}_\alpha$  è l'energia del fascio che misuriamo e  $A_r$  è il numero di massa del nucleo figlio. Siccome il nucleo figlio è molto grande, esso presenterà un rinculo ridotto, e quindi in prima approssimazione possiamo considerare che tutta l'energia a disposizione confluisca nel fascio. L'energia del processo è strettamente legata alla differenza di massa tra i corpi in gioco (vedi energia di legame (3.30)). Infatti, per avere un decadimento sappiamo che vi deve essere una variazione di massa tra gli stati iniziali e finali. L'energia  $\mathcal{E}$  a disposizione quindi deve essere uguale  $\Delta m c^2$  dove  $\Delta m = M_i - (M_r + m_\alpha)$  con la condizione ovvia che  $\Delta m > 0$ .

Le caratteristiche dei fasci  $\alpha$  sono di avere un'energia compresa in una decina di MeV, di avere un range nella materia intorno ai 10 cm, quindi sono particelle che vengono facilmente assorbite. Questo, al contrario dei fasci  $\beta$  che pur avendo energia più bassa, risultano più penetranti. Questo apparente contraddizione può essere spiegato in termini delle sezioni d'urto (vedere paragrafo 3.2). Infatti la sezione delle particelle  $\alpha$  è quattro volte quella di un protone che è molto più grande di quella dell'elettrone. I tempi di decadimento variano di oltre quindici ordini di grandezza. Questo è sinonimo della non applicazione della meccanica classica nel comprendere il fenomeno.

In generale la radioattività  $\alpha$  è presente nel caso naturale solo in nuclei con  $A \geq 200$  con un  $Z > 82$ . La casistica dei decadimenti è divisa in due distinte ragioni nel caso di attività naturale: la prima comprende gli elementi più pesanti ( $A > 200$  e  $4 \text{ MeV} < \mathcal{E}_\alpha < 20 \text{ MeV}$ ), l'altra comprende pochi emettitori  $\alpha$  di lunga vita nella regione delle terre rare ( $A > 150$  e  $2 \text{ MeV} < \mathcal{E}_\alpha < 4 \text{ MeV}$ ).

Consideriamo l'urto di una particella  $\alpha$  con un nucleo nelle due versioni possibili: uno scattering ed un'emissione di particella  $\alpha$ . Si è osservato sperimentalmente che anche particelle  $\alpha$  con la massima energia possibile ( $\sim 9 \text{ MeV}$ ) sono incapaci di penetrare nel nucleo e vengono quindi respinte (in caso di urto centrale) da una distanza non inferiore a  $3 \cdot 10^{-14} \text{ m}$  dal nucleo. Il "rimbalzo" è connesso ovviamente alla repulsione coulombiana. La particella  $\alpha$  nell'avvicinarsi al nucleo si trova innanzi una barriera di energia  $U(r)$  pari a  $2Ze^2/r$ . Per  $r = 3 \cdot 10^{-14} \text{ m}$  abbiamo  $U \sim 9 \text{ MeV}$ . Quindi per distanze minori la barriera sarà ancora più intensa ma siamo ancora a distanze elevate per innescare la forza di attrazione tra nucleoni. In figura (3.10) riportiamo l'andamento qualitativo della barriera in funzione della distanza dal nucleo.

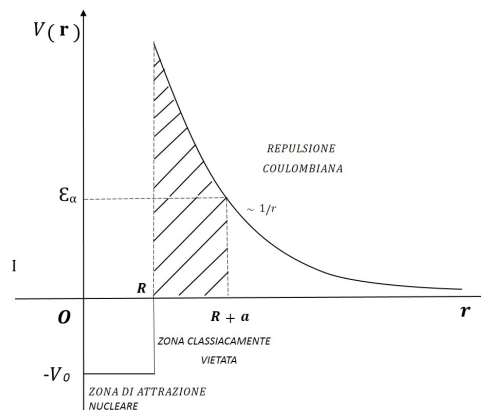
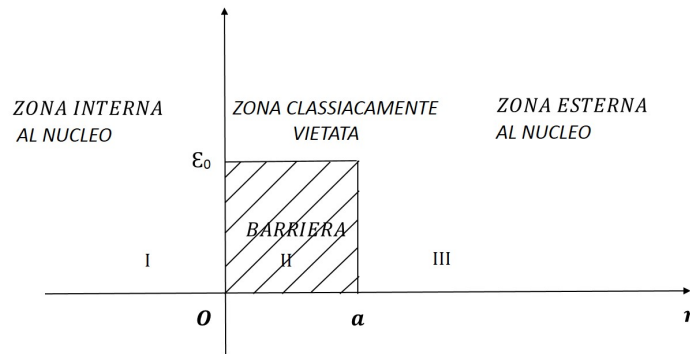


Figura 3.10: Andamento della barriera di energia per repulsione coulombiana.

La zona tra  $R$  e  $R + a$  é vietata per la particella  $\alpha$  di energia  $\mathcal{E}_\alpha$ . Infatti le  $\alpha$  muovendosi in direzione del nucleo al massimo possono raggiungere una distanza  $r = R + a$ . La distanza  $r = R + a$  dal nucleo é stata definita come il punto in cui la particella  $\alpha$  con energia  $\mathcal{E}_\alpha$  arresta il suo moto ed inverte il verso. Quindi basta avere particelle energetiche tali che superino il picco del potenziale ed ecco che si otterrebbe una fusione. Tuttavia le particelle  $\alpha$  al massimo hanno energia  $\sim 9$  MeV mentre l'altezza della barriera, per nuclei con  $A \gg 200$ , é di 35 MeV. *Conseguenza di questa interpretazione classica della fisica dell'urto é che nessuna particella  $\alpha$  può penetrare sul nucleo.* Questa condizione potrebbe anche essere vera, ammettendo che non si é mai osservato uno scontro tra nuclei ed  $\alpha$ , cosa comunque falsa, ma il problema é che non ci dovrebbero essere neanche  $\alpha$  che escono dal nucleo. **Siamo innanzi ad un evento che per la fisica classica non é possibile.**

Il problema si risolve, e viene anche descritto bene, introducendo la meccanica quantistica. Infatti una particella ha una probabilità diversa da zero di attraversare una cosiddetta barriera di energia. La schematizzazione di quanto riportato in figura (3.10) può essere la seguente

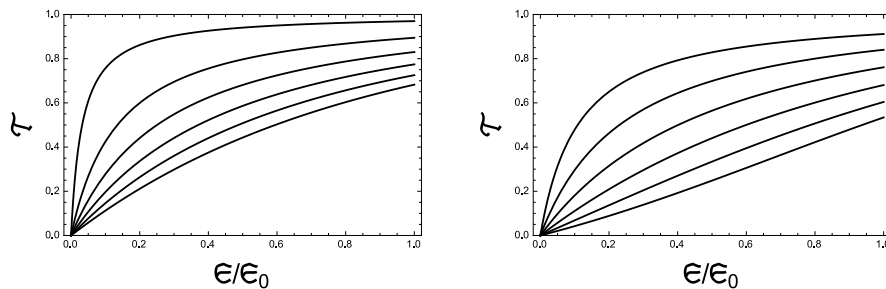


**Figura 3.11:** Schematizzazione della barriera di energia che "vede" una particella confinata nel nucleo.

Nel caso unidimensionale di un'onda piana (corrispondente ad una particella di massa  $m$  ed energia cinetica  $\mathcal{E}$ ) che incide su una barriera energetica rettangolare di altezza  $\mathcal{E}_0$  e spessore  $a$  (figura 3.11), si può calcolare la *probabilità di trasmissione*  $\mathcal{T}$  come il modulo quadro del rapporto tra l'intensità dell'onda trasmessa (flusso di particelle uscenti) e quella dell'onda incidente (flusso di particelle entranti). Utilizzando l'equazione di Schroedinger (vedi appendice B) si trova nel caso di  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$

$$\mathcal{T} = \frac{4\mathcal{E}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E})}{4\mathcal{E}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}) + \mathcal{E}_0^2 \sinh^2 \left[ \sqrt{\frac{2m(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2}} a \right]} \tag{3.53}$$

da cui si ottiene una probabilità piccola ma finita che la particella attraversi la barriera. In figura 3.12 riportiamo l'andamento della probabilità di trasmissione per un elettrone attraverso una barriera di energia.



**Figura 3.12:** Andamento della probabilità (3.53) che un elettrone superi una barriera di energia larga  $8 \cdot 10^{-16}$  m e di altezza in energia (1 ÷ 15) MeV (figura di sinistra) e di altezza 8 MeV e larghezza  $(0,5 \div 1,5) \cdot 10^{-16}$  m (figura di destra).

Nel caso reale di un nucleo con potenziale a simmetria sferica piú un potenziale coulombiano come quello rappresentato in precedenza e con particelle  $\alpha$  in onda  $s$  (cioé la particella é considerata una sfera) si ottiene il seguente valore della trasparenza

$$\mathcal{T} = e^{-2G} \quad (3.54)$$

dove

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_R^{R+a} dr \sqrt{2 \frac{m_r m_\alpha [\mathcal{E}(r) - \mathcal{E}_\alpha]}{m_r + m_\alpha}} \quad (3.55)$$

é detto fattore di Gamow. Nella versione piú intuitiva possibile é chiaro che la rapiditá di decadimento  $\lambda$  puó essere interpretata come il prodotto  $f\mathcal{T}$  dove  $f$  é il numero di urti al secondo della particella contro la barriera. Si puó dare una stima del fattore  $f$  assumendo che la particella  $\alpha$  abbia all'interno del nucleo la stessa velocitá  $v_\alpha$  che ha all'esterno (una volta emessa). Essendo, quindi,  $f = v_\alpha/(2R)$  l'inverso del tempo necessario per muoversi nel nucleo da un estremo all'altro abbiamo

$$\lambda = f\mathcal{T} = \frac{v_\alpha}{2R} e^{-2G} \quad (3.56)$$

### 3.9 Decadimento beta

I raggi  $\beta$  sono costituiti da elettroni essendo emessi da 17 nuclei naturali e da una gran numero di nuclei artificiali. Essi sono stati osservati in presenza di campi magnetici da cui si é ricavato il rapporto  $q/m$ . Questo rapporto unito ad altre osservazioni ha portato ad affermare che quei raggi erano appunto elettroni. L'energia dei  $\beta$  é inferiore a quella degli  $\alpha$  ma in compenso sono molto piú penetranti nella materia avendo i primi una massa minore e quindi una sezione d'urto minore. Avendo massa minore sono anche piú facilmente deviabili sia da parte dei nuclei che di altri elettroni stessi. Ció é causa di traiettorie non ben definite, come invece accadeva con gli  $\alpha$ , e di deviazioni con grandi angoli. Questo fenomeno noto come diffusione o scattering multiplo causa uno sparpagliamento dei raggi. Inoltre i raggi  $\beta$  non sono emessi con velocitá monocromatiche e questo rende ancora piú difficile il loro studio. Lo spettro energetico de  $\beta$  é profondamente diverso da quello degli  $\alpha$ .

L'esistenza dello spettro continuo dei  $\beta$ , al contrario di quello degli  $\alpha$ , rappresenta un grosso problema per la comprensione del fenomeno. Infatti dai raggi  $\alpha$  si é dimostrato anche una struttura a livelli energetici discreti per il nucleo e quindi l'energia nelle emissioni, sia sottoforma di  $\alpha$  che  $\beta$ , deve rispettare questa natura discreta. Sappiamo, dalla conservazione dell'energia o dallo studio dei livelli atomici, che quando un elettrone é emesso con energia  $\mathcal{E}$ , la differenza tra l'energia del nucleo prima e dopo l'emissione deve essere uguale a  $\mathcal{E}$ . Quindi essendo discreti i salti energetici del nucleo, anche  $\mathcal{E}$  deve essere discreta. Tutto questo per i raggi  $\beta$  invece non accade.

Per spiegare questo fenomeno si cercó di avere diverse teorie in merito, ma in generale erano tutte o in contraddizione con la realtá o erano altamente improbabili. Si pensó che il nucleo emette con un determinato valore d'energia ma poi con causa extranucleari si poteva avere una variazione dell'energia comunque contenuta nel limite superiore che si riscontrava sperimentalmente. *La difficultá nello spiegare spinse anche ad ipotizzare la non validitá delle conservazione dell'energia nell'emissione  $\beta$ .* Infine, per salvare la conservazione dell'energia si introdusse l'esistenza di una nuova particella, detta *neutrino*, priva di carica, tale da bilanciare l'apparente non



conservazione. Fu supposta priva di carica per il fatto che non essendo stata rilevata poteva sfuggire all'osservazione tramite deflessione in campi magnetici. Per questo aspetto il salto energetico del nucleo é compensato non solo dall'energia dell'elettrone ma anche dal neutrino e quindi gli spettri fino a qui considerati erano solo relativi all'elettrone. Per la massa fu trovato un valore di  $2 * 10^{-3} m_e$ .

Fermi riuscí a descrivere il decadimento  $\beta$  in termini di una nuova interazione, detta *debole* ed i suoi canali di decadimento erano per l'epoca

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad p + n \rightarrow e^+ + \nu_e \quad (3.57)$$

Notiamo, innanzitutto, che bisogna introdurre una forza la quale puó cambiare un neutrone in protone oppure dall'unione di questi generare altre particelle (elettrone o positrone accompagnata dalla presenza di un neutrino o del suo coniugato). Fermi costruí la sua teoria in maniera analoga a quanto accadeva nell'interazione elettromagnetica nei processi di emissione e assorbimento dei fotoni. Concettualmente tuttavia vi era una differenza di fondo con l'elettromagnetismo circa la natura dello scambio. Infatti Fermi ipotizzó che l'interazione fosse puntiforme cioè il protone ed il neutrone interagirebbero poiché verrebbero fisicamente a contatto. Tuttavia questa impostazione si riveló errata e soltanto con l'avvento della teoria dei campi e l'introduzione dei quanti di scambio si ebbe la giusta interpretazione del fenomeno.

La teoria di Fermi prevede che una frazione di nuclei che decadono nell'unitá di tempo emettono raggi  $\beta$  (elettroni) con un'energia compresa tra  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ . In formule si ha

$$P(\mathcal{E})d\mathcal{E} = G^2 |M|^2 \mathcal{F}(Z, \mathcal{E}) \mathcal{P}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E})^2 d\mathcal{E} \quad (3.58)$$

dove  $P(\mathcal{E})$  é la probabilitá dell'emissione tra  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ ,  $G^2$  la costante di accoppiamento dell'interazione,  $M^2$  elementi della matrice in cui sono presenti tutte le informazione dinamiche dell'interazione,  $\mathcal{P}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E})^2$  fattori connesso alla spazio delle fasi e  $\mathcal{F}(Z, \mathcal{E})$  funzione che descrive gli effetti del campo di coulomb del nucleo sulle particelle  $\beta$  emesse. Nel caso in cui  $Z = 0$  si ottiene  $\mathcal{F}(Z, \mathcal{E}) = 1$ .  $\mathcal{F}(Z, \mathcal{E})$  veloce per  $Z$  variabile ma con  $Z \gg 20$  mentre per  $Z \ll 20$   $\mathcal{F}$  varia lentamente. La struttura dell'equazione puó essere descritta nel seguente modo:  $G^2 |M|^2$  é una misura di probabilitá relativa che il nucleo possa emettere una particella  $\beta$  ad un neutrino;  $\mathcal{F}(Z, \mathcal{E})$  rappresenta gli effetti del campo di coulomb del nucleo nell'emissione di particella  $\beta$  ed il fattore statistico mostra quale frazione di energia di decadimento disponibile é trasferito alle particelle  $\beta$ .

Il valore teorico di  $\lambda$  (costante di decadimento) e la vita media  $\tau$  si ottengono dall'integrazione di  $\mathcal{P}(\mathcal{E})d\mathcal{E}$  per i valori di  $\mathcal{E}$  da zero al valore massimo  $\mathcal{E}_0$  per l'emissione di  $\beta$

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \int_0^{\mathcal{E}_0} P(\mathcal{E})d\mathcal{E} \quad (3.59)$$

### 3.10 Modello semiempirico delle masse

Tale modello ha lo scopo di descrivere l'andamento mostrato in figura (3.7) che lega l'energia di legame  $\mathcal{W}$  per unitá di nucleone in funzione del numero di massa  $A = N + Z$ . Questo anche perché data una coppia di valori per  $N$  e  $Z$  si possa sapere a priori se il nucleo formatosi con queste caratteristiche possa essere stabile o meno.

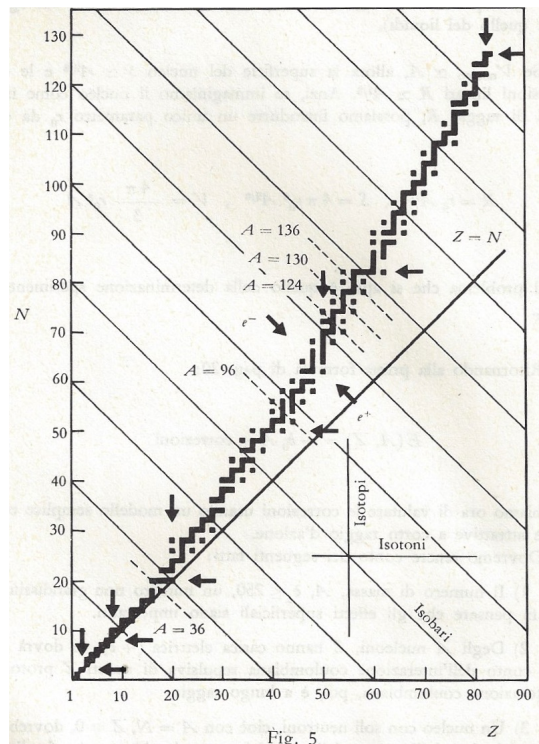
Questo modello si basa su una concezione del nucleo come una goccia d'acqua. Le caratteristiche osservate sperimentalmente danno un'idea in cui lo stato d'aggregazione e le interazioni tra nucleoni possano essere viste negli stessi termini delle interazioni tra le molecole d'acqua quando queste formano una goccia. Infatti le proprietá

della saturazione della forza forte e del range breve d'interazione sono simili anche per una goccia. A questo punto di partenza é stata aggiunta la repulsione elettrostatica e la tensione di superficie.

Dunque  $W(A)$  sará la somma di diversi termini ed in particolare avremo

- $a A$  poiché sappiamo che  $W(A)/A$  é piú o meno costante;
- $-b A^{2/3}$  in quanto rappresenta l'energia di superficie ed é analogo alle tensione superficiale in un liquido;
- $-c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$  rappresenta la repulsione coulombiana. Il numero di coppie possibili di protoni che interagiscono é  $Z(Z-1)/2$ , quindi l'energia deve essere proporzionale alle coppie.  $A^{1/3}$  rappresenta il raggio del nucleo.

Bisogna tener conto ora di un aspetto che non abbiamo ancora affrontato. Sperimentalmente si nota una relazione tra  $Z$  ed  $N$  (figura 3.13). Per un tratto  $0 < Z < 20$  vi é una relazione lineare tra  $N$  e  $Z$  mentre per  $Z > 20$  abbiamo una relazione di due ad un  $N = 2Z$ . Questo lo si puó interpretare in termini energetici in quanto per  $Z$  piccoli basta porre tanti neutroni quanti protoni per avere una stabilitá. Crescendo  $Z$ , cresce l'interazione coulombiana, mentre l'interazione forte satura, quindi, dobbiamo avere piú neutroni che protoni per la stabilitá.



**Figura 3.13:** Relazione tra il numero di neutroni ed il numero atomico. Per  $Z$  piccoli abbiamo una corrispondenza  $N = Z$ , mentre per  $Z$  grandi abbiamo  $N = 2Z$ .

Il termine d'aggiungere sará

- $-d \frac{(A-2Z)^2}{A}$  termine proporzionale alla frazione di neutroni aggiunti  $(A - 2Z)/A$  ed al numero degli stessi  $(A - 2Z)$ . Essendo proporzionale all'eccesso di neutroni questo effetto si annulla  $A = 2Z$  come la sua derivata rispetto a  $Z$ . Sulla simmetria si vede che é inversamente proporzionale ad  $A$ . Inoltre si nota che quando i neutroni crescono in modo piú grande di  $2Z$  si ottiene una forza repulsiva che tende a disgregare il nucleo.

Infine bisogna tener conto della statistica in termini dei numeri pari e dispari per  $N$  e  $Z$ . Infatti la metà dei nuclei é pari-pari o dispari-dispari l'altra metà invece é divisa tra pari-dispari e dispari-pari. Introducendo quindi un ultimo termine che sarà:

- $\pm \frac{\delta(A)}{2A}$  dove il segno " + " sarà relativo ai pari-pari, mentre quello con il " - " per i dispari-dispari. Per i dispari-pari e i pari-dispari essendo il numero pressoché uguale fra loro differiranno per una costante che poniamo essere nulla.

Considerando tutti i termini abbiamo

$$\mathcal{W}(Z, A) = aA - bA^{2/3} - c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - d \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm \frac{\delta(A)}{2A} \quad (3.60)$$

dove ci sono 5 parametri da determinare:  $a, b, c, d, \delta$ . Effettuando un fit otterremo i valori. Sono a disposizione piú di 200 nuclei, abbiamo quindi una buona popolazione statistica. I valori dei parametri sono  $a \cong 16 \text{ MeV}$ ,  $b \cong 17 \text{ MeV}$ ,  $c \cong 1 \text{ MeV}$ ,  $d \cong 24 \text{ MeV}$ ,  $\delta(A)/2 \cong 13,5 \text{ MeV}$ .

Il passo successivo é cercare fissando  $A$  il nucleo piú stabile al variare di  $Z$ ; oppure fissato  $Z$  quale nucleo é il piú stabile al variare di  $A$ . Quest'ultima affermazione é simile a ricercare, fissato  $Z$ , quale isotopo di quella specie é piú stabile.

Consideriamo ora l'energia di legame  $\mathcal{W}(Z, A)$  per un dato valore di  $A$  (supp. dispari). L'unica variabile che resta é il numero atomico  $Z$  e notiamo che per  $A < 20$  esiste un unico  $Z$  per cui abbiamo il minimo in stabilitá. Dunque per ogni elemento esiste un solo isotopo stabile in natura. Per  $A$  piú piccoli la nostra  $\mathcal{W}(Z, A)$  non rispecchia la realtà.

Fissiamo il valore di  $A$ . Quindi  $\mathcal{W}(Z, A) \rightarrow \mathcal{W}(Z, \bar{A})$  é una funzione di  $Z^2$  e possiamo scrivere

$$\mathcal{W}(Z, \bar{A}) = -c \frac{Z(Z-1)}{\bar{A}^{1/3}} - d \frac{(\bar{A}-2Z)^2}{\bar{A}} \quad (3.61)$$

e cerchiamo, se esiste, un  $Z_0$  tale da minimizzare in stabilitá il nucleo. Dunque

$$\frac{d\mathcal{W}(Z, \bar{A})}{dZ} = 0 \rightarrow Z = \frac{c/\bar{A}^{1/3} + 4d}{c/\bar{A}^{1/3} + 4d/\bar{A}} \doteq Z_0 \in \mathcal{R} \quad (3.62)$$

Dall'andamento riportato in figura 3.14-a si deduce che  $\mathcal{W}(Z, \bar{A})$  presenta un minimo in modo che questo rappresenti il nucleo piú stabile per un dato numero di massa. In generale ci sarà un solo isobaro per il quale l'energia di legame é la piú vicina al punto di minimo. Un'altra considerazione da fare é dovuta al fatto che abbiamo scelto all'inizio della trattazione un  $A$  dispari con la conseguenza di avere una situazione di pari-dispari o dispari-pari ottenendo quindi il termine  $\pm\delta(\bar{A})/2\bar{A}$  nullo.

Nel caso di  $A$  pari (pari-pari oppure dispari-dispari) abbiamo due parabole sfasate in ordinata di  $\delta(\bar{A})/2\bar{A}$  (figura 3.14-b) Supponiamo, ora, il caso in cui vi é un nucleo con  $Z \neq Z_0$ . Allora il nucleo cercherà di portarsi in uno stato con  $Z \sim Z_0$ . Tale evoluzione sarà possibile, con  $A$  fissato, soltanto tramite un decadimento  $\beta^\pm$  a secondo se  $Z$  eccede o difetta rispetto a  $Z_0$  (vedi figura 3.15-a). Il processo di decadimento  $\beta$  varia la carica di un'unità alla volta, quindi se  $Z - Z_0 \neq 1$  si possono avere piú processi di decadimento fino al raggiungimento di  $Z = Z_0$ . Quindi sperimentalmente con la rivelazione di  $e^\pm$  si può avere informazioni sugli stadi iniziali e finali di un processo radioattivo.

Consideriamo ora il grafico per  $A$  pari, quindi é possibile avere pari-pari o dispari-dispari. In questi caso ogni volta che vi é un decadimento  $\beta$  dovremo passare da una curva all'altra. Si potrebbe avere anche dei decadimenti

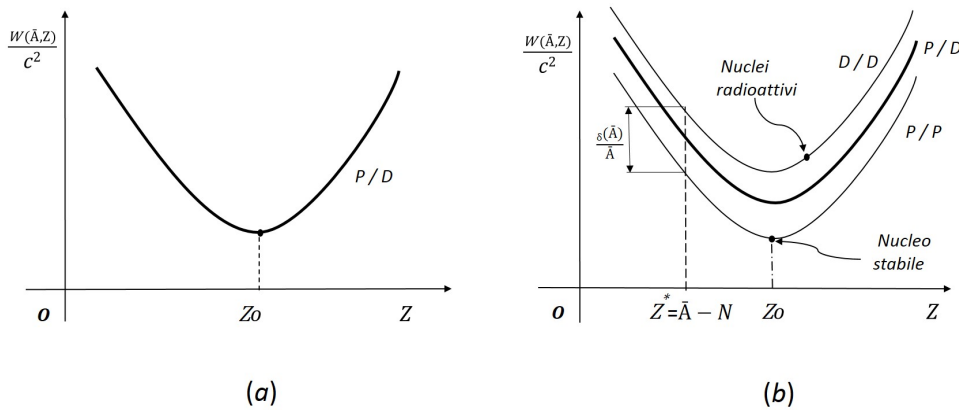


Figura 3.14: Plot dell'energia di legame in funzione del numero atomico  $Z$  per un fissato valore di  $A$ : dispari (a) e pari (b).

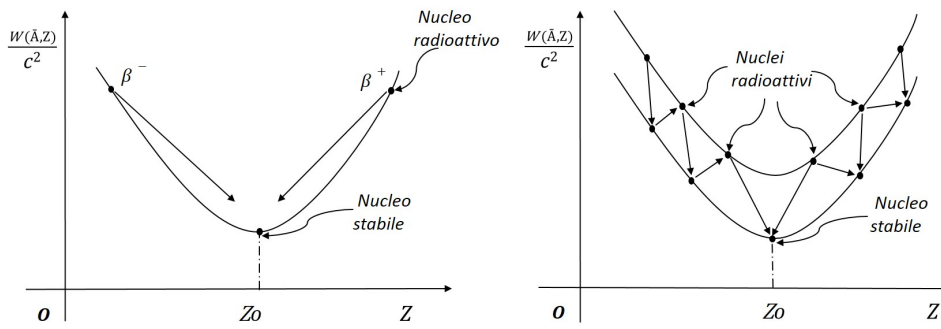


Figura 3.15: Decadimento attraverso canale interazione debole  $\beta^+$  :  $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ ,  $\beta^-$  :  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$  nel caso di  $A$  dispari.

$\beta$  restando sulla stessa curva ma questo implica due  $\beta$  in cascata e la cosa é improbabile, in quanto già  $\beta$ , essendo un processo debole, é difficile da rilevare. Quindi é piú probabile avere due salti fra le due curve (figura 3.15-b).

Notiamo che per grandi valori di  $A$  il termine  $\delta(A)/2A$  é molto piccolo. Quindi le due curve sono abbastanza ravvicinate. Questo implica che vi puó essere piú di una  $Z$  che minimizza  $\mathcal{W}$ . Per  $A$  grandi, i nuclei pari-pari o dispari-dispari hanno maggiori possibilitá di avere due isotopi stabili. Questo modello tiene conto delle masse per un errore del 1%.

### 3.11 Famiglie radioattive

Per famiglia radioattiva si intende se é possibile trovare una successione di elementi in cui ogni elemento va nell'altro tramite un decadimento. Si é visto che con il crescere del numero di massa i nuclei tendono ad essere instabili, e quindi a decadere. In natura si trovano nuclei instabili ma con un'attività molto bassa. Infatti se non fosse cosi, dovrebbero essere scomparsi poco dopo la loro creazione. Da ciò, quindi, ricaviamo che i tempi di decadimento possono essere anche di  $10^9$  anni (confrontabili con l'età dell'Universo). Mentre possono anche esserci decadimento con  $\tau \sim 10^{-20}$  s. É logico pensare che quest'ultimi sono espressione di radioattività artificiale, mentre i primi sono d'origine naturale.

I processi che sono alla base dei decadimenti sono i decadimenti  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Notiamo che  $\alpha$  fa variare di 4 numeri di massa, mentre  $\beta$  non varia. Da questo possiamo pensare che vi possano essere quattro serie principali di decadimento, governate dal decadimento  $\alpha$ , in modo che nessun elemento di una possa incrociare quello di

un'altra. Quindi il numero di massa,  $A$ , di queste quattro serie può essere visto come  $4n$ ,  $4n + 1$ ,  $4n + 2$  e  $4n + 3$ . In natura si è riscontrato che la serie  $4n + 1$  non esiste.

**Famiglia dell'Uranio** ( $4n + 2$ ):  $^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$  con tempo di dimezzamento<sup>3</sup>  $T_{1/2} = 4,5 * 10^{11}$  anni. La differenza tra  $A$  dell'uranio e quello del piombo è  $32 = 8 * 4$ . Quindi servono minimo otto decadimenti  $\alpha$  per raggiungere il nucleo stabile. Comunque, in generale, non si può affermare quanti sono i decadimenti, in quanto possono esserci anche decadimenti  $\beta$  e quindi vi saranno più di  $8\alpha$ . In generale fra tutti i decadimenti possibili, 70% sono  $\alpha$  e 30% sono  $\beta$  con vita media diverse. In questa famiglia si passa da  $T_{1/2} = 4,5 * 10^9$  anni del  $^{238}\text{U}$  a  $T_{1/2} = 10^{-4}$  s per  $^{214}\text{Po}$  che decade per via  $\alpha$ .

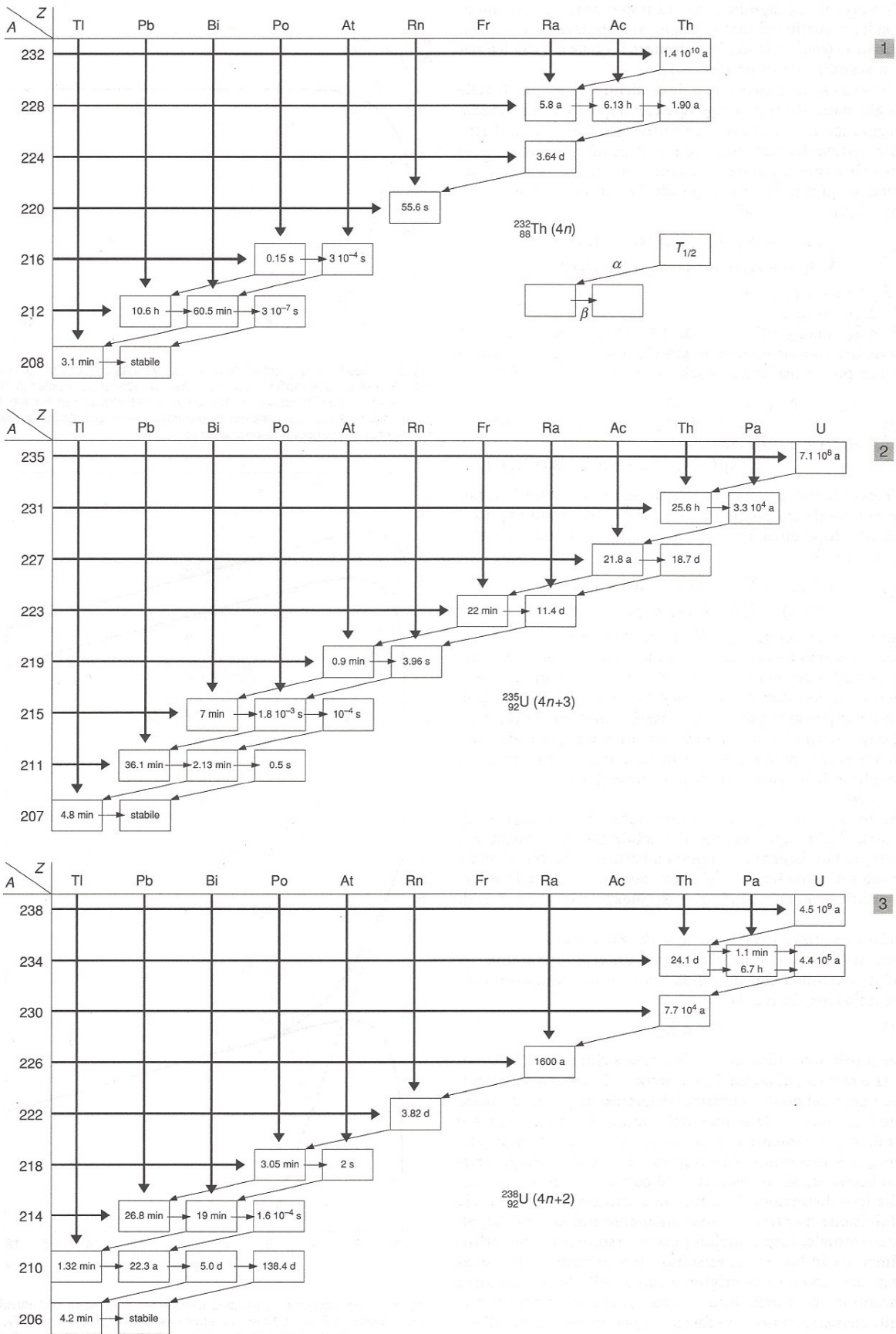
**Famiglia dell'Uranio** ( $4n + 3$ ):  $^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$  con tempo di dimezzamento  $T_{1/2} = 7,1 * 10^8$  anni. I tempi di decadimento vanno da  $7,1 * 10^8$  anni del  $^{235}\text{U}$  a  $2 * 10^{-3}$  s del  $^{215}\text{Po}$  (il polonio decade sia per  $\alpha$  che per  $\beta$ ).

**Famiglia del Torio** ( $4n$ ):  $^{232}\text{Th} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$  con tempo di dimezzamento che va da  $T_{1/2} = 1,4 * 10^{10}$  anni a  $T_{1/2} = 3 * 10^{-7}$  s.

Tutti i decadimenti  $\alpha$  sono compresi tra  $(4 \div 9)$  MeV per l'energia con vita medie che vanno da  $10^{10}$  anni a  $10^{-7}$  s (figura 3.16). C'è una variazione di ben 24 ordini di grandezza in  $\tau$  contro quasi nessuna variazione d'ordine di grandezza per l'energia.

---

<sup>3</sup> $\tau = T_{1/2} / \ln 2$



**Figura 3.16:** Famiglie radioattive naturali: (1) del torio, (2) dell'uranio-attinio, (3) dell'uranio. Il dimezzamento  $T_{1/2}$  è espresso in anni (a), giorni (d), ore (h), minuti (min), secondi (s).

## Capitolo 4

# Reazioni nucleari

Analizziamo innanzitutto le proprietà fondamentali degli urti relativistici classificandoli per prodotti delle reazioni nucleari e per caratteristiche fisiche. Introduciamo quantitativamente l'energia di soglia per l'innescò di un urto e valuteremo nel caso di urto con particella proiettile e nucleo bersaglio le caratteristiche cinematiche ed energetiche. La parte centrale sarà destinata allo studio delle principali caratteristiche della fusione e della fissione nucleare. Infine tratteremo gli aspetti ingegneristici connessi ai reattori nucleari a fissione e fusione.

### 4.1 Classificazione degli urti relativistici

Uno dei problemi principali dello studio della struttura nucleare è la determinazione sperimentale della densità di nucleoni. La più importante delle tecniche usate si basa sullo studio della diffusione da parte dei nuclei di radiazione opportuna. Per avere un adeguato potere risolutivo abbiamo bisogno di radiazioni di lunghezza d'onda non superiori alle dimensioni nucleari. Infatti secondo la nota relazione di De Broglie (equivalenza onda - particella) tra impulso e lunghezza d'onda

$$\mathbf{p} = \frac{h}{\lambda} \hat{u} = \hbar \mathbf{k} \quad (4.1)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda,  $\hbar = h/(2\pi)$ ,  $h$  è la costante di Planck e  $\mathbf{k}$  è il vettore d'onda con direzione individuata dal versore  $\hat{u}$ . Nel caso di  $\lambda \simeq 10^{-15}$  m si ottiene  $p \geq 10^3$  MeV/c.

La classificazione dei problemi d'urto si può ottenere abbastanza semplicemente attraverso la caratterizzazione cinematica dei vari tipi di collisione. Consideriamo una reazione del tipo

$$a + A \rightarrow b + B \quad (4.2)$$

in cui  $a$ ,  $A$  e  $b$  sono particelle elementari o nuclei nello stato fondamentale. Quando la natura della particella  $b$  è identica a quella della particella  $a$  (uguali massa e numeri quantici interni) cioè quando la particella incidente è presente anche nello stato finale (a processo nucleare avvenuto) le reazioni considerate si restringono alla categoria che si definiscono di Franck-Hertz. Per le reazioni del tipo Franck-Hertz la natura di  $B$  dà il nome alla reazione. Si possono distinguere tre casi rilevanti

- Diffusione elastica quando  $B$  è il nucleo  $A$  nel suo stato fondamentale e  $B = A$ . Un esempio è  $\pi^+ + {}^{12}\text{C} \rightarrow \pi^+ + {}^{12}\text{C}$  oppure  $e^- + {}^{40}\text{Ca} \rightarrow e^- + {}^{40}\text{Ca}$ .

- Diffusione anelastica con eccitazione di livelli quando  $B$  é il nucleo  $A$  ma in particolare é in uno suo stato eccitato  $B = A^*$ . Un esempio é  $\pi^+ + {}^{12}\text{C} \rightarrow \pi^+ + {}^{12}\text{C}^*$  dove si riscontra  $m_{{}^{12}\text{C}^*} = m_{{}^{12}\text{C}} + 4.4 \text{ MeV}/c^2$ , oppure  $e^- + {}^4\text{He} \rightarrow e^- + {}^{12}\text{He}^*$  con  $m_{{}^4\text{He}^*} = m_{{}^4\text{He}} + 20.2 \text{ MeV}/c^2$ .
- Diffusione anelastica con disintegrazione del nucleo, oppure espulsione di un nucleo.  $B$  é costituito da frammenti del nucleo  $A$ . In sostanza si puó ottenere come risultato dell'urto la combinazione nuclei + nuclei  $B = A_1 + A_2$ , nucleoni + nucleoni  $B = a_1 + a_2$  oppure nucleone+nucleo  $B = a_1 + A_1$ .

Nella reazione (4.2) si puó pensare di procedere analizzando in ogni dettaglio lo stato finale, cioè determinando, per ciascun processo, l'impulso e la direzione di  $a$  (uscente) e la natura, l'impulso e la direzione di ogni particella che forma il sistema abbreviato con  $B$ . Questo procedimento richiede un grosso sforzo sperimentale e non é sempre attuabile. Mostriamo ora che lo studio delle reazioni del tipo Franck-Hertz limitato all'analisi cinematica della particella  $a$  uscente contiene tutta l'informazione necessaria a classificare le reazioni in esame e, per le reazioni piú semplici, anche l'informazione fisica rilevante.

Relazione in cui si rinuncia all'analisi dettagliata di  $B$ , indicate spesso con  $a + A \rightarrow a + \dots$  si dicono comunemente *inclusive*. Le relazioni in cui si effettui un'analisi anche parziale di  $B$  si dicono invece *esclusive*.

Alcuni esempi sono i seguenti urti

- $e^- + {}^4\text{He} \rightarrow e^- \dots$ , (inclusiva)
- $e^- + {}^4\text{He} \rightarrow e^- + p + {}^3\text{H}$ , (esclusiva)
- $n + {}^{12}\text{C} \rightarrow n + \dots$ , (inclusiva)
- $n + {}^{12}\text{C} \rightarrow n + p + {}^{11}\text{B}$ , (esclusiva)

Con la notazione  $(+ \dots)$  si intende che a secondo membro delle reazioni inclusive si vuole indicare la somma di tutti i possibili stati finali cinematicamente compatibili con proprietá (note) delle particelle esplicitamente indicate nella equazione.

## 4.2 Energia di soglia

Una nozione importante é quella di *massa invariante* di un sistema di due o piú particelle (supponiamo  $n$ ), ciascuna delle quali abbia massa  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . La massa invariante é concettualmente connessa alla "massa" del centro di massa ed é definita come

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 &= (p_1^\mu + \dots + p_n^\mu)(p_{1\mu} + \dots + p_{n\mu}) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i^\mu p_{i\mu} + 2 \sum_{i,j=1 \text{ con } i < k}^n p_i^\mu p_{k\mu} = \sum_{i=1}^n m_{0i}^2 + 2 \sum_{i,j=1 \text{ con } i < k}^n p_i^\mu p_{k\mu} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dalle proprietá dell'energia (2.44) e da quelle del quadripulso (2.45) otteniamo

$$\begin{aligned} p_i^\mu p_{k\mu} &= \mathcal{E}_i \mathcal{E}_k - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_k \geq \mathcal{E}_i \mathcal{E}_k - \sqrt{\mathcal{E}_i^2 - m_{0i}^2} \sqrt{\mathcal{E}_k^2 - m_{0k}^2} \\ &= m_{0i} m_{0k} (\gamma_i \gamma_k - \sqrt{\gamma_i^2 - 1} \sqrt{\gamma_k^2 - 1}) \end{aligned} \quad (4.4)$$



Se  $\gamma_i \geq 1$  (ma é sempre vero in Relativit ) si ha che  $\gamma_i \gamma_k - \sqrt{\gamma_i^2 - 1} \sqrt{\gamma_k^2 - 1} \geq 1$  (nell'ipotesi che  $i \neq k$  altrimenti é valido il segno d'uguaglianza) in quanto  $(\gamma_i \gamma_k - 1)^2 \geq (\gamma_i^2 - 1)(\gamma_k^2 - 1)$ , otteniamo la condizione

$$p_i^\mu p_{k\mu} \geq m_{0i} m_{0k} \quad (4.5)$$

Si giunge quindi alla relazione fondamentale per i processi di decadimento radioattivo

$$\mathcal{M}^2 \geq \sum_{i=1}^n m_i^2 + 2 \sum_{i,j=1 \text{ con } i < k}^n m_{0i} m_{0k} = (m_{01} + \dots + m_{0n})^2 \quad (4.6)$$

da cui possiamo affermare che la massa invariante di un sistema di  $n$  particelle é sempre maggiore della somma delle singole masse a riposo  $m_{01}, m_{02}, \dots, m_{0n}$ . L'uguaglianza si realizza nel caso in cui le  $n$  particelle hanno tutte lo stesso vettore velocit  ( $\mathbf{p}/\mathcal{E}$ ). In sostanza quando si annulla l'energia cinetica del moto relativo; cio  ancora, quando le particelle sono tutte ferme nel sistema di riferimento in cui il loro centro di massa é fermo.

La conservazione dell'energia e dell'impulso é riassunta dalla conservazione del quadrimpulso. Infatti generalizziamo la reazione (4.2) nella forma seguente

$$a + A \rightarrow 1 + 2 + \dots + n \quad (4.7)$$

si ha, con ovvi simboli, la conservazione

$$(p_a^\mu + p_A^\mu)(p_{a\mu} + p_{A\mu}) = (p_1^\mu + \dots + p_n^\mu)(p_{1\mu} + \dots + p_{n\mu}) \quad (4.8)$$

Analizziamo il cosiddetto problema della soglia per una reazione. Infatti se  $A$  é un bersaglio fermo ed  $a$  una particella di energia cinetica  $T_a = \mathcal{E}_a - m_{0a}$ , il pi  piccolo valore di  $T_a$ , necessario all'innesco, é detta soglia. Dalla conservazione del quadrimpulso (4.8) si ha

$$\mathcal{M} = (p_a^\mu + p_A^\mu)(p_{a\mu} + p_{A\mu}) \geq (m_{01} + \dots + m_{0n})^2 \quad (4.9)$$

ed essendo in particolare le espressioni per i due quadrimpulsi

$$p_a^\mu = (\mathcal{E}_a, \mathbf{p}_a), \quad p_A^\mu = (m_{0A}, \mathbf{0}) \quad (4.10)$$

abbiamo

$$(p_a^\mu + p_A^\mu)(p_{a\mu} + p_{A\mu}) = m_{0a}^2 + m_{0A}^2 + 2\mathcal{E}_a m_{0A} = (m_{0a} + m_{0A})^2 + 2T_a m_A \quad (4.11)$$

che in relazione con la massa invariante

$$(m_{0a} + m_{0A})^2 + 2T_a m_A \geq (m_{01} + \dots + m_{0n})^2 \quad (4.12)$$

da cui si ricava la soglia

$$T_a \geq \frac{(m_{01} + \dots + m_{0n})^2 - (m_{0a} + m_{0A})^2}{2m_{0A}} = T_{\text{soglia}} \quad (4.13)$$

Naturalmente,  $T_a \geq 0$  e quindi se  $m_{01} + \dots + m_{0n} \leq m_{0a} + m_{0A}$  la soglia é evidentemente posta a  $T_a = 0$  (il decadimento é spontaneo). Introducendo il cosiddetto  $Q$ -valore della reazione cosí definito

$$Q = m_{\text{in}} - m_{\text{fin}} = (m_{0a} + m_{0A}) - (m_{01} + \dots + m_{0n}) \quad (4.14)$$

da cui si deduce che una reazione ha una soglia ogni qualvolta risulti  $Q < 0$ . Il  $Q$ -valore di reazione con soglia ha un particolare significato nel sistema del centro di massa. Scriviamo separatamente le due leggi di conservazione nel sistema del centro di massa

$$T'_a + T'_A = T'_1 + \dots + T'_n + |Q| \quad (4.15)$$

$$\mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_A = \mathbf{p}'_1 + \dots + \mathbf{p}'_n = 0$$

Il minimo valore (soglia) che l'energia cinetica totale iniziale può avere perché la reazione abbia luogo rispettando le leggi di conservazione, é quello per cui

$$\mathbf{p}'_1 = \dots = \mathbf{p}'_n = 0 \quad (4.16)$$

cioé le particelle vengono prodotte ma sono ferme nel CM, quindi  $T'_1 = \dots = T'_n = 0$ . Dunque

$$(T'_a + T'_A)_{\text{soglia}} = T'_{\text{tot, (soglia)}} = |Q| \quad (4.17)$$

ovvero il modulo del  $Q$ -valore fornisce l'energia cinetica totale di soglia nel sistema del centro di massa. Passando al sistema del laboratorio, si trova che l'energia di soglia é legata al  $Q$ -valore dalla relazione

$$T_{a(\text{soglia})} = \frac{|Q| + 2(m_{0a} + m_{0A})}{2m_{0A}} |Q| \quad (4.18)$$

### 4.3 Urto relativistico inclusivo

Consideriamo la reazione inclusiva  $a + A \rightarrow a + \dots$ . La conservazione del quadrimpulso é data come segue

$$p_a^{i\mu} + p_A^\mu = p_a^{f\mu} + P^\mu \quad (4.19)$$

dove  $P^\mu$  é il quadrimpulso del prodotto di reazione non osservato. Introduciamo l'invariante (massa) relativistico connesso ai prodotti della reazione non osservati

$$M^2 = P^\mu P_\mu \quad (4.20)$$

Il quadrivettore  $p_a^{i\mu} - p_a^{f\mu} = q^\mu$  si chiama quadrimpulso trasferito (da  $a$  ad  $A$ ) e si suppone che sia completamente misurato in quanto é nota la natura di  $a$ , la particella  $a$  entrante fa parte di un fascio preparato mediante una sorgente che fissa  $p_a^\mu$ ; la particella  $a$  uscente é rivelata ed il suo impulso  $p_a^f$  é misurato (direzione e modulo). Quindi la (4.19) diviene

$$q^\mu + p_A^\mu = P^\mu \quad (4.21)$$

L'informazione connessa alla conoscenza di  $q^\mu$  e  $p_A^\mu$  é rindondante, in quanto contiene parametri determinanti dalla scelta del sistema de riferimento e non solo dalla natura della reazione prodotta. Per liberarsi del sistema di riferimento, basta operare con quantità invarianti. Con i tre quadrivettori  $q^\mu$ ,  $p_A^\mu$ ,  $P^\mu$  possiamo costruire i seguenti invarianti (alla luce delle proprietà (2.27) e (2.28))

$$q^\mu q_\mu = q^2, \quad p_A^\mu p_{A\mu} = m_{0A}^2, \quad P^\mu P_\mu = M^2, \quad q^\mu p_{A\mu} = \nu, \quad q^\mu P_\mu, \quad p_A^\mu P_\mu \quad (4.22)$$

ma, usando la conservazione del quadrimpulso nella forma (4.21), si vede che dei cinque invarianti non banali solo due sono indipendenti

$$M^2 = q^2 + 2\nu + m_{0A}^2, \quad q^\mu P_\mu = q^2 + \nu, \quad p_A^\mu P_\mu = m_{0A}^2 + \nu \quad (4.23)$$

Quindi, la cinematica di queste reazioni può essere descritta mediante diagrammi bidimensionali. Per esempio, utilizzando gli invarianti  $q^2$  e  $\nu$ . Fissiamo prima il campo di variabilità di  $q^2$  e  $\nu$ . Notiamo dalla definizione di  $q^2$  che

$$q^2 = (p_a^{i\mu} - p_a^{f\mu})(p_{a\mu}^i - p_{a\mu}^f) = 2m_{0a}^2 - 2\mathcal{E}_a^i \mathcal{E}_a^f + 2\mathbf{p}_a^i \cdot \mathbf{p}_a^f \quad (4.24)$$

Dalla relazione (4.5) si ottiene (nel caso di una sola particella) la condizione

$$\mathcal{E}_a^i \mathcal{E}_a^f - \mathbf{p}_a^i \cdot \mathbf{p}_a^f \geq m_{0a}^2 \quad (4.25)$$

da cui  $q^2 \leq 0$ . Per comodità, definiamo  $Q^2 = -q^2$ . Valutiamo  $\nu$  nel sistema di riferimento in cui  $A$  é fermo (sistema di laboratorio)

$$\nu = (p_a^{i\mu} - p_a^{f\mu})P_{A\mu} = m_{0A}(\mathcal{E}_a^i - \mathcal{E}_a^f) \quad (4.26)$$

Da notare che  $a$  perde sempre energia nell'urto, quindi  $\mathcal{E}_a^f \leq \mathcal{E}_a^i$  e  $\nu > 0$ . Il risultato é naturalmente invariante, cioè  $\nu > 0$  in ogni sistema di riferimento. Quindi, il piano cinematico, usando come coordinate  $Q^2 = -q^2$  e  $\nu$ , consiste del solo quadrante  $Q^2 \geq 0, \nu \geq 0$ .

In termini degli invarianti introdotti le reazioni riportate nel paragrafo 4.1 sono caratterizzate come segue

- La reazione elastica di diffusione  $a + A \rightarrow a + A$  é caratterizzata da  $M^2 = m_{0A}^2$ ;
- La reazione anelastica di diffusione con eccitazione di livelli  $a + A \rightarrow a + A^*$  (con massa  $m_{0A^*} > m_{0a}$ ) é caratterizzata da  $M^2 = m_{0A}^2$ ;
- Le disintegrazioni  $a + A \rightarrow a + 1 + \dots + n$  dove  $1, \dots, n$ , hanno massa  $m_{01}, \dots, m_{0n}$ , sono caratterizzate dal fatto che

$$M^2 \geq (m_{01} + \dots + m_{0n})^2 \quad (4.27)$$

Il segno d'uguaglianza vale quando la disintegrazione, o l'espulsione di un nucleone, sono realizzate con il minimo trasferimento di energia ed anche in questo caso si introduce il concetto di soglia. Tuttavia il senso é un po' diverso da quello delle reazioni con  $Q < 0$ , in quanto ora la soglia é l'energia minima necessaria alla disintegrazione, o l'espulsione di un nucleone, anziché quella minima necessaria perché la reazione avvenga (qui la particella  $a$  non é inclusa tra i prodotti di reazione).

Considerando la prima relazione della (4.23) si ottiene immediatamente che

$$Q^2 = 2\nu + m_{0A}^2 - M^2 \quad (4.28)$$

da cui é evidente

- $M^2 = m_{0A}^2 \rightarrow Q^2 = 2\nu$  (caso elastico)
- $M^2 = m_{0A^*}^2 \rightarrow Q^2 = 2\nu + m_{0A}^2 - m_{0A^*}^2$  (caso anelastico)
- $M^2 \geq (m_{01} + m_{02} + \dots + m_{0n})^2 \rightarrow Q^2 \leq 2\nu m_{0A}^2 - (m_{01} + \dots + m_{0n})^2$  (caso con disintegrazione)

Il segno d'uguaglianza vale per le disintegrazioni in soglia, nel senso precisato prima. Inoltre  $Q^2 \geq 0 \rightarrow 2\nu \geq 2\nu_{\min}^{(s)} = (m_{01} + m_{02} + \dots + m_{0n})^2 - m_{0A}^2$ .

Sono cinematicamente accessibili i soli punti del piano  $(Q^2, 2\nu)$  (vedi figura 4.1) che si trovano sulle rette delle reazioni (elastica, anelastiche), nonché tutti i punti del triangolo infinito tratteggiato (da cui il nome continuo) a destra della retta di soglia delle disintegrazioni. La posizione delle varie rette del piano dipende naturalmente dal tipo specifico di nucleo bersaglio nella reazione studiata (caratterizzato da certi livelli energetici, una certa soglia di disintegrazione, ecc.).

Supponiamo che  $A$  sia un bersaglio fermo e di massa nota. Le sole variabili interessanti sono quelle che caratterizzano  $a$  prima e dopo l'urto. Quindi in funzione di  $p_a^i, p_a^f, \theta_a$ , che sono le grandezze misurabili (vedi figura 4.2), gli invarianti si esprimono come segue

$$Q^2 = -q^2 = -2p_a^i p_a^f \cos \theta_a = 2\mathcal{E}_a^i \mathcal{E}_a^f - 2m_{0a}^2 \quad (4.29)$$

$$\nu = m_{0A}(\mathcal{E}_a^i - \mathcal{E}_a^f)$$

La completa conoscenza della fisica dell'urto avviene attraverso la cosiddetta analisi spettrale del prodotto di decadimento  $a$  per un fissato valore dell'angolo  $\theta$ . In questo modo é possibile analizzare il tutto nel piano  $Q^2 - \nu^2$  descrivendo delle curve corrispondenti ad un fissato valore dell'angolo di uscita di  $a$ . Infatti eliminando  $p_a^f$  dalle equazioni (4.29) si ottiene

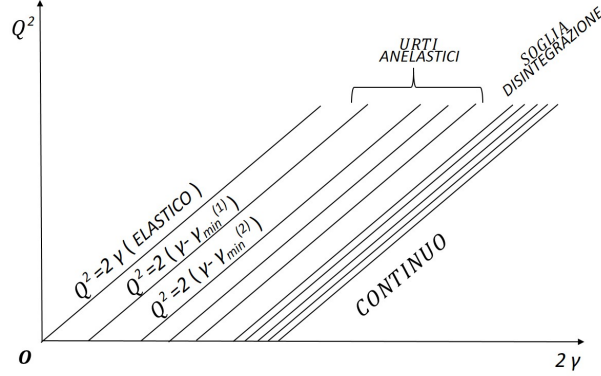


Figura 4.1: Piano cinematico

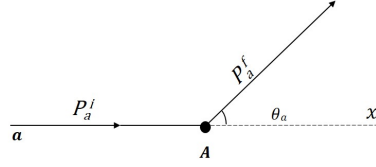


Figura 4.2: Piano in cui avviene l'urto.

$$Q^2 = 2\mathcal{E}_a^i \left( \mathcal{E}_a^i - \frac{\nu}{m_{0A}} \right) - 2m_{0a}^2 - 2p_a^i \sqrt{\left( \mathcal{E}_a^i - \frac{\nu}{m_{0A}} \right)^2 - m_{0a}^2} \cos \theta_a \quad (4.30)$$

in quanto sono state sfruttate le relazioni  $p_a^f = \sqrt{\mathcal{E}_a^f - m_{0a}^2}$  (dalla definizione di invariante relativistico del quadripulso (2.47)) e  $\mathcal{E}_a^f = \mathcal{E}_a^i - \frac{\nu}{m_{0A}}$  (seconda equazione della (4.29)).

Quando  $m_{0a} \ll \mathcal{E}_a^i$ , come nelle reazioni e-nucleo in cui  $p_a > 10 \text{ MeV}/c$ , l'equazione (4.30) diviene

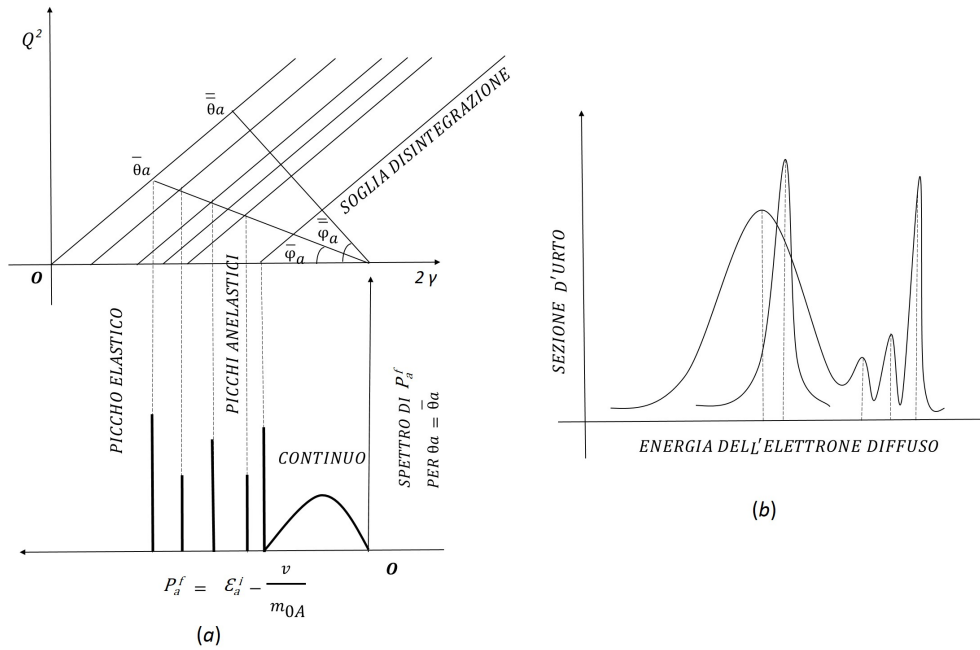
$$Q^2 = 2 \left[ \mathcal{E}_a^{i2} - \frac{\mathcal{E}_a^i}{m_{0A}} \nu \right] (1 - \cos \theta_a) \quad (4.31)$$

Le curve  $\theta_a = \text{cost}$  sono dunque rette nel piano  $(Q^2, 2\nu)$ , con pendenza  $\phi$  negativa determinata dal valore di  $\theta_a$ . Infatti si ottiene facilmente (figura 4.3-a) che

$$\tan \phi = -\frac{\mathcal{E}_a^i}{m_{0A}} (1 - \cos \theta_a) \quad (4.32)$$

L'inclinazione delle rette aumenta, per un dato nucleo, e ad una fissata energia incidente, all'aumentare di  $\theta_a$ . Gli intervalli sono per  $0 \leq \theta_a \leq \pi$  quindi  $0 \leq \phi \leq \arctan \frac{2\mathcal{E}_a^i}{m_{0A}}$ . Viceversa, per l'angolo fisso  $\theta_a$  si ottiene  $\lim_{\mathcal{E}_a \rightarrow \infty} \phi = \frac{\pi}{2}$ .

La posizione della retta nel piano cinematico é fissata senza ambiguitá. L'intersezione con l'asse  $2\nu$  ( $Q^2 = 0$ ) porta alla condizione che, qualunque sia  $\theta_a$ , tutte le rette hanno origine nel punto  $2\nu = 2\mathcal{E}_a^i m_{0a} = (2\nu)_{\text{max}}$ . Infatti, la massima energia ceduta  $(2\nu)_{\text{max}}$  corrisponde al caso in cui la particella incidente ha ceduto tutta la sua energia al bersaglio e non ha dunque piú energia per emergere ( $\mathcal{E}_a^f = 0$ ). D'altro canto, la retta  $Q^2 = 2\nu$  relativa alle zone cinematicamente accessibili della diffusione elastica, fissa, per ogni retta  $\theta_a = \text{cost}$ , il valore  $(2\nu)_{\text{min}}$



**Figura 4.3:** Analisi spettrale del prodotto della reazione elastica.  $\bar{\theta}_a < \bar{\theta}_a$ , mentre l'angolo  $\theta_a$   $\acute{e}$  sempre compreso tra 0 e  $\pi/2$ . Il valore massimo di  $\nu$  corrisponde alla condizione  $p_a^f = 0$ .

della minima energia ceduta nella reazione. Dall'intersezione delle due rette si ricava

$$(2\nu)_{\min} = \frac{2\mathcal{E}_a^i(1 - \cos \theta_a)}{1 + \frac{\mathcal{E}_a^i}{m_{0A}}(1 - \cos \theta_a)} \tag{4.33}$$

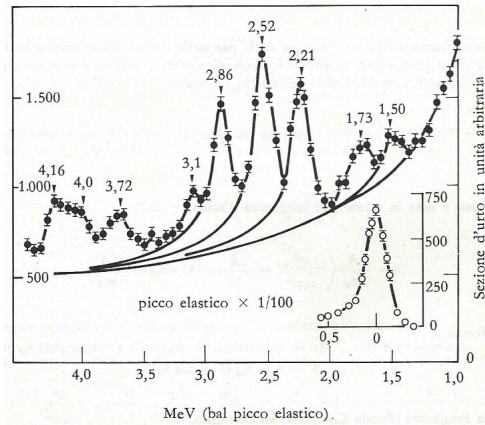
Un discorso analogo vale anche per l'intersezione con le altre rette del piano cinematico.  $\acute{E}$  chiaro infatti che sono punti fisicamente accessibili alla particella  $a$  uscente tutte e soli quelli di incontro delle rette  $\theta_a = \text{cost}$  con rette che caratterizzano nel piano cinematico  $(Q^2, 2\nu)$  uno specifico nucleo bersaglio, nonch $\acute{e}$  con i punti del triangolo infinito a destra della retta di soglia della disintegrazione.

La parte inferiore della figura 4.3-a mostra schematicamente lo spessore delle particelle rivelate da un contatore ideale all'angolo fisso  $\bar{\theta}_a$  in funzione dell'impulso  $p_a^f$  della particella uscente. Si capisce subito che lo spettro consta di una riga elastica, di una serie di righe anelastiche e di un continuo dovuto alle disintegrazioni. In figura 4.3-b riportiamo l'andamento qualitativo dello spettro energetico dell'elettrone diffuso, mentre in figura 4.4 lo spettro di una reale misura con bersaglio  $^{89}\text{Y}$  ed angolo di uscita fisso a  $130^\circ$ .

### 4.4 Fissione nucleare

La scoperta del neutrone fu seguita da una intensa attivit $\grave{a}$  per produrre reazioni nucleari iniziate da neutroni. Enrico Fermi studi $\acute{o}$  le reazioni di cattura di neutroni per produrre nuclei pesanti e i loro decadimenti. Nel 1938 O.Hahn e F.Strassmann osservarono che in collisioni di neutroni con nuclei di uranio si producono elementi con numero atomico pari a circa la met $\grave{a}$  di quello dell'uranio come per esempio nella seguente reazione



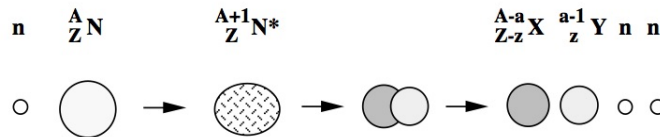


**Figura 4.4:** Spettro di elettroni diffusi da <sup>89</sup>Y a 130°. Gli elettroni incidenti hanno una energia di 70 MeV.

Nel 1939 L. Meitner e O. Frisch proposero che la produzione di elementi con numero atomico intermedio fosse dovuta alla fissione del nucleo pesante indotta da neutroni. Il processo di fissione in cui un nucleo pesante si scinde in due nuclei con peso atomico intermedio (vedere figura 4.5)



é energeticamente favorito dal fatto che, per i nuclei con  $A \sim 240$ , l'energia di legame per nucleone é  $\approx 7,6$  MeV, mentre per i nuclei con  $A \sim 120$  si ha  $\approx 8,5$  MeV. Quindi in una reazione di fissione si producono  $\approx 0,9$  MeV per nucleone. Nella fissione dell'uranio si ha  $Q \approx 210$  MeV. La fissione spontanea é però impedita dall'energia potenziale attrattiva dei nucleoni.



**Figura 4.5:** Fissione indotta da neutroni.

Consideriamo il modello a goccia in cui un nucleo é in una configurazione sferica. Se questa viene deformata in un ellissoide di semiassi  $a, b$ , l'interazione nucleone-nucleone tende a mantenere costante il volume

$$V = \frac{4\pi}{3} ab^2 = \frac{4\pi}{3} R^3 \rightarrow a = R(1 + \epsilon) \quad b = R(1 + \epsilon)^{-1/2} \tag{4.36}$$

e ne deriva che la superficie del nucleo aumenta esattamente come aumenta anche la distanza media tra nucleoni

$$S = 4\pi R^2 \left(1 + \frac{2\epsilon^2}{5}\right), \quad \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{3}{5R} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{5}\right) \tag{4.37}$$

Usando la formula di Bethe-Weizsacker, la variazione di energia del nucleo é

$$\Delta W = b A^{2/3} \left[-\frac{2\epsilon^2}{5}\right] + c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left[\frac{\epsilon^2}{5}\right] = \frac{\epsilon^2}{5} A^{2/3} \left[-2b + c \frac{Z^2}{A}\right] \tag{4.38}$$

dove  $b$  e  $c$  sono i coefficienti introdotti nel modello semiempirico (3.60), da cui si ottiene la condizione

$$\Delta\mathcal{W} = \frac{\epsilon^2}{5} A^{2/3} \left[ -34,4 + 0,70 \frac{Z^2}{A} \right] \leq 0 \quad (4.39)$$

verificata per tutti i nuclei che soddisfano la disuguaglianza  $Z^2/A < 47 \rightarrow (Z^2/A)_{\max} = 35$ . Tutti i nuclei stabili soddisfano tale relazione, quindi il processo di fissione non é spontaneo. Questo esempio mostra che, per un nucleo leggermente deformato, l'aumento di energia si oppone alla deformazione e quindi alla fissione spontanea. Se immaginiamo il nucleo  ${}^A_Z N$  in uno stato intermedio composto dei due nuclei  ${}^{Z-z}_{A-a} X$  e  ${}^z_Y$ , la buca di energia potenziale delimitata dalla barriera coulombiana impedisce la fissione spontanea. La fissione può essere indotta per esempio dai neutroni che bombardando il nucleo forniscono la necessaria energia di attivazione per superare tale barriera.

#### 4.4.1 Fissione indotta da neutroni

La teoria della fissione dei nuclei pesanti é stata formulata da Bohr e Wheeler sulla base del modello a goccia del nucleo. Consideriamo la fissione di un nucleo  ${}^A_Z N$  in due nuclei  ${}^{Z/2}_{A/2} X$ . La variazione di energia é data da

$$\Delta\mathcal{W} = b \left[ A^{2/3} - 2 \left( \frac{A}{2} \right)^{2/3} \right] + c \left[ Z^2 A^{-1/3} - 2 \frac{Z^2}{4} \left( \frac{A}{2} \right)^{-1/3} \right] = A^{2/3} \left[ b(1 - 2^{1/3}) + c \frac{Z^2}{A} (1 - 2^{-2/3}) \right] \quad (4.40)$$

da cui si ottiene

$$\Delta\mathcal{W} = A^{2/3} \left[ -4,42 + 0,26 \frac{Z^2}{A} \right] \geq 0 \rightarrow \frac{Z^2}{A} \geq 17 \quad (4.41)$$

Quindi per un nucleo con  $Z^2/A \geq 17$ , i nuclei  $X$  e  $Y$  si trovano in uno stato di energia  $\mathcal{W}$  positiva ma risultano legati dal potenziale nucleare se la distanza di separazione é minore della somma dei raggi (figura 4.6)

$$r < R = R_X + R_Y \approx 2 R_0 (A/2)^{1/3} \quad (4.42)$$

In corrispondenza della distanza  $R$  l'altezza della barriera di energia coulombiana é

$$\mathcal{E}_0 = \alpha \hbar c \frac{(Z/2)^2}{2R_0 (A/2)^{1/3}} \quad (4.43)$$

Per Uranio  $\mathcal{E}_0 \approx 230$  MeV. É possibile, quindi, effettuare una prima classificazione e poter dare una giustificazione quantitativa ai vari comportamenti dei nuclei

- per i nuclei con  $Z^2/A \geq 47$ , cioè  $A \geq 300$ , la differenza di energia é positiva,  $\mathcal{W} - \mathcal{E}_0 > 0$ : i nuclei sono instabili per fissione spontanea;
- per i nuclei vicino alla soglia di instabilità cioè  $Z^2/A \geq 17$ ,  $A \approx 100$ , la differenza di energia é molto grande  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{W} \approx 60$  MeV: questi nuclei non sono soggetti a fissione;



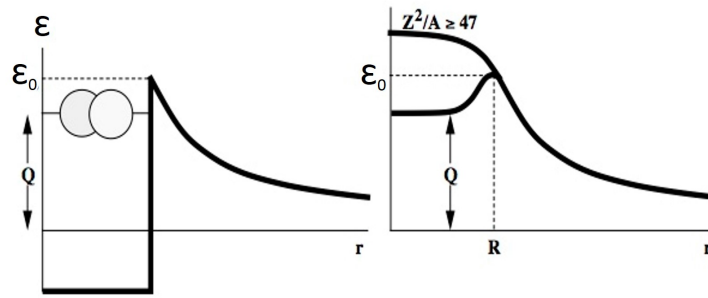


Figura 4.6: Energia in funzione della distanza di separazione dei nuclei.

- per i nuclei stabili piú pesanti,  $A \approx 240$ , la differenza di energia é piccola e il processo di fissione indotta é facilitato dalla probabilità di attraversamento della barriera di potenziale per effetto tunnel. Tenuto conto di questo effetto si ha  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{W} \approx 6 \text{ MeV}$ .

L'energia di attivazione necessaria per innescare la fissione,  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{W}$ , é stata calcolata da Bohr e Wheeler e risente del fatto se i nuclei sono con  $A$  dispari o pari. Consideriamo, ad esempio, la fissione dell'uranio

- nel caso di  $^{235}\text{U}$ , per cattura di un neutrone si forma lo stato intermedio  $^{236}\text{U}$ ; la differenza di massa é

$$\Delta\mathcal{W} = m_{^{235}\text{U}} + m_n - m_{^{236}\text{U}} = 6,5 \text{ MeV} \quad (4.44)$$

l'energia di attivazione della fissione del  $^{235}\text{U}$  é 6,2 MeV: quindi non occorre che i neutroni abbiano energia cinetica, la fissione del  $^{235}\text{U}$  si ottiene con la semplice agitazione termica di neutroni;

- nel caso di  $^{238}\text{U}$ , si forma lo stato intermedio  $^{239}\text{U}$ ; la differenza di massa é

$$\Delta\mathcal{W} = m_{^{238}\text{U}} + m_n - m_{^{239}\text{U}} = 4,8 \text{ MeV} \quad (4.45)$$

l'energia di attivazione della fissione del  $^{238}\text{U}$  é 6,6 MeV: quindi per attivare la fissione del  $^{238}\text{U}$  occorrono neutroni con energia cinetica  $> 1,8 \text{ MeV}$ .

In questo esempio é importante il contributo del termine  $\frac{\delta(A)}{2A}$  nell'energia di legame dei nuclei. Infatti nella massa dei nuclei pari-pari come  $^{236}\text{U}$  e  $^{238}\text{U}$  va sottratto il termine  $\frac{\delta(A)}{2A} \approx 0,8 \text{ MeV}$ . Nel primo caso questa energia é disponibile mentre nel secondo caso occorre fornirla: i due valori di  $\Delta\mathcal{W}$  differiscono approssimativamente di 1,6 MeV.

#### 4.4.2 Fissione dell'uranio

L'uranio naturale é composto di due isotopi  $^{238}\text{U}$  e  $^{235}\text{U}$  con abbondanza relativa di 99,28% e 0,72%. La fissione del  $^{235}\text{U}$  é iniziata da neutroni termici con sezione d'urto  $\sigma^{235} = 580 \text{ b}^1$ , mentre quella del  $^{238}\text{U}$  da neutroni con energia cinetica  $> 1,8 \text{ MeV}$  con sezione d'urto molto piú piccola,  $\sigma^{238} \approx 0,5 \text{ b}$  (figura 4.7). Nella fissione si libera energia  $\Delta\mathcal{W} \approx 210 \text{ MeV}$  con un rendimento di massa  $\Delta\mathcal{W}/M = 210 \text{ MeV}/220 \text{ GeV} \approx 10^{-3}$ .

Nello stato finale sono prodotti nuclei con  $A_X \approx 95$ ,  $A_Y \approx 140$  come ad esempio

<sup>1</sup>In fisica subnucleare l'unitá di misura della sezioni d'urto é il barn.  $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$ .

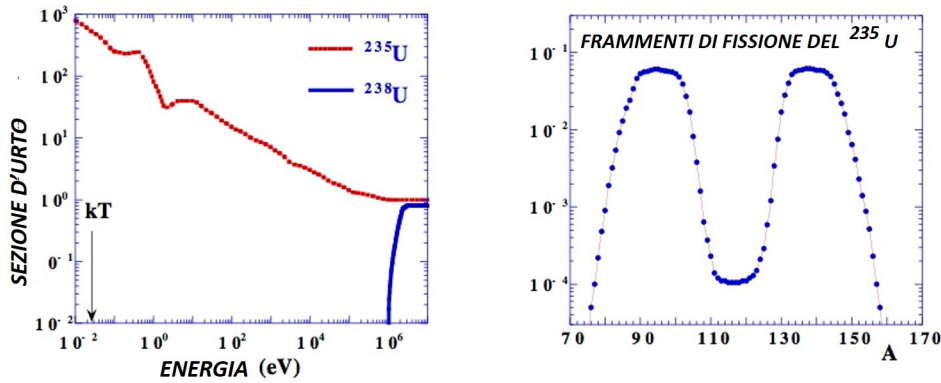
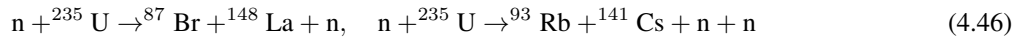


Figura 4.7: Sezione d'urto di cattura di neutroni in funzione dell'energia - Distribuzione dei frammenti di fissione del  $^{235}\text{U}$ .



e un numero medio pari  $\approx 2,5$  di *neutroni immediati* con energia cinetica  $\approx 2$  MeV.

La fissione avviene con tempi di reazione brevissimi  $\tau = (10^{-16} \div 10^{-14})\text{s}$  se l'emissione di neutroni è accompagnata dall'emissione di fotoni immediati. L'energia dei prodotti leggeri è  $\sim 5$  MeV per i neutroni e  $\sim 8$  MeV per i fotoni (raggi gamma). Il resto dell'energia è energia cinetica dei due nuclei. Questi hanno un eccesso di neutroni e raggiungono la banda di stabilità nel piano  $A - Z$  con emissione di  $\beta^-$ . L'energia rilasciata nei decadimenti  $\beta$  è in media  $\sim 20$  MeV, di cui approssimativamente 12 MeV in antineutrini. Nei decadimenti si formano anche nuclei in stati eccitati che decadono emettendo raggi  $\gamma$  con  $\sim 8$  MeV. Quindi la reazione di fissione è una sorgente di neutroni, fotoni, elettroni e antineutrini.

## 4.5 Fusione

Nella reazione di fusione due nuclei fondono per formare un nucleo con peso atomico maggiore. L'andamento dell'energia media di legame dei nuclei,  $\mathcal{W}$ , in funzione del numero atomico,  $A$ , mostra che nella reazione di fusione



si libera energia  $\Delta\mathcal{W} > 0$  se  $d\mathcal{W}/dA > 0$ , cioè per  $A < 60$ . Poiché l'interazione nucleare è a breve raggio d'azione, la reazione di fusione può avvenire solo se i nuclei hanno inizialmente sufficiente energia cinetica per compensare la repulsione coulombiana e portare i due nuclei a contatto. Ad esempio, nella reazione



si produce energia  $\mathcal{W} = 2 M_C M_{Mg} = 13,9$  MeV, ma occorre che inizialmente i due nuclei  ${}^{12}\text{C}$  abbiano energia

$$\mathcal{E} \geq \alpha \hbar c \frac{Z^2}{R} = \frac{\alpha \hbar c Z^2}{2R_0 A^{1/3}} = 9,0 \text{ MeV} \quad (4.49)$$

Spendendo 9,0 MeV si producono 13,9 MeV. Il rendimento in energia ( $Q/2m_{12C} \approx 6 * 10^{-4}$  in questo esempio) é tanto piú elevato quanto minore é la massa dei nuclei che fondono.

L'energia liberata nella fusione si trasforma in energia cinetica dei nuclei e, se esiste un campo di forze che tiene i nuclei confinati, aumenta la temperatura di modo che si puó raggiungere una situazione di equilibrio in cui la reazione di fusione é capace di autoalimentarsi e quindi produrre energia. Per i nuclei leggeri con  $Z \approx A/2$ , la temperatura necessaria per compensare la repulsione coulombiana é

$$k_B T = \frac{\alpha \hbar c A^{5/3}}{8R_0} \approx A^{5/3} * 0,14 \text{ MeV} \rightarrow T \approx A^{5/3} * 1,6 * 10^9 \text{ °K} \quad (4.50)$$

Per valutare la probabilitá che avvenga la reazione di fusione, consideriamo un gas di nuclei di massa  $m$  a temperatura  $T$ . Il numero di nuclei con velocitá  $v$  segue la distribuzione di Maxwell

$$\frac{dn}{dv} = \frac{v^2}{(2k_B T/m)^{3/2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (4.51)$$

La sezione d'urto di reazione é inversamente proporzionale alla velocitá relativa e la probabilitá di trasmissione attraverso la barriera di energia coulombiana é data dall'ampiezza di trasmissione di Gamow  $T = e^{-2G}$  (3.54) che determina la "trasparenza" della barriera. La probabilitá che avvenga la reazione di fusione é proporzionale al prodotto del flusso di nuclei  $nv$  e della sezione d'urto  $\sigma$

$$\langle nv\sigma \rangle \propto v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2} - \frac{v_G}{v}\right) \quad (4.52)$$

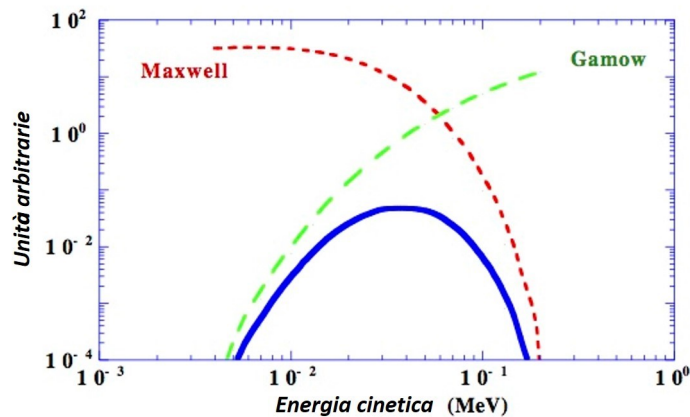
dove  $v_T = c\left(\frac{2k_B T}{mc^2}\right)^{1/2}$  e  $v_G = 2\pi\alpha c Z_X Z_Y$ . Si trova che la probabilitá presenta un massimo, *picco di Gamow* (figura 4.8), in corrispondenza della velocitá

$$\frac{2}{v} - \frac{2v}{v_T^2} + \frac{v_G}{v^2} = 0 \rightarrow v^* \simeq (v_T^2 v_G / 2)^{1/3} \quad (4.53)$$

É interessante notare che anche se i nuclei hanno un'energia cinetica media  $k_B T$  molto minore dell'energia necessaria a superare la barriera coulombiana, le fluttuazioni statistiche della distribuzione di Maxwell (4.51) da un lato e la probabilitá di bucare la barriera per effetto tunnel (3.54) rendono possibile la fusione nucleare con energia cinetica media  $mv^{*2}/2$ .

#### 4.5.1 Fusione in laboratorio

La fusione ha un rendimento energetico maggiore della fissione e, usando come combustibile nuclei leggeri, non produce materiali radioattivi. É però molto piú difficile realizzare e mantenere in laboratorio le condizioni di temperatura e densitá per produrre energia dalla fusione. La barriera di potenziale coulombiana aumenta col numero atomico  $Z$  e per nuclei leggeri é tipicamente di circa 1 MeV. Tenendo conto della probabilitá di effetto tunnel occorre comunque raggiungere energie dell'ordine di 10 keV cioé temperature di  $10^8$  °K. In queste condizioni gli atomi sono completamente ionizzati e si produce un plasma di ioni e elettroni. In un plasma ad alta densitá gli elettroni, accelerati nei forti campi elettrici dei nuclei emettono radiazione di bremsstrahlung sottraendo energia al plasma. La potenza irradiata é proporzionale a  $Z^2$ . Quindi le condizioni per poter alimentare le reazioni di fusione e produrre energia sono



**Figura 4.8:** Distribuzione in energia dei protoni a temperatura  $T = 1,5 * 10^7$  K per la distribuzione maxwelliana per la componente termica e quella relativa all'ampiezza di trasmissione attraverso la barriera di energia (fattore di Gamow) per la fusione protone-protone.

- utilizzare nuclei con numero atomico  $Z$  piccolo;
- operare a temperatura elevata  $T > 10^8$  °K
- operare a densità elevata;
- utilizzare reazioni con sezione d'urto grande e che producono energia elevata.

Alcune reazioni di fusione di nuclei leggeri sono

- ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma + 23.8 \text{ MeV}$
- ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \text{n} + 3.3 \text{ MeV}$
- ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{H} + \text{p} + 4.0 \text{ MeV}$
- ${}^2\text{H} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{n} + 17.6 \text{ MeV}$
- ${}^2\text{H} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{p} + 18.3 \text{ MeV}$

La prima reazione ha una sezione d'urto piccola. Le reazioni di fusione  ${}^2\text{H} + {}^2\text{H}$  hanno un rendimento energetico basso. La fusione  ${}^2\text{H} + {}^3\text{H}$  ha, nelle stesse condizioni, un rendimento molto maggiore. La fusione  ${}^2\text{H} + {}^3\text{He}$  richiede temperatura più elevata perché l'elio ha  $Z = 2$ . Quindi la reazione più promettente è la fusione deuterio-trizio. C'è lo svantaggio che l'energia viene convertita prevalentemente in energia cinetica del neutrone, 14.1 MeV, ma in condizioni di densità molto elevata questo cede rapidamente l'energia agli altri nuclei.

La difficoltà maggiore nel realizzare la fusione in laboratorio è il confinamento del plasma in modo da mantenere le condizioni di densità elevata durante la fusione. I metodi che sembrano più promettenti sono

- il confinamento magnetico;
- il confinamento inerziale.

Nel primo si sfrutta la forza di Lorentz, ad esempio con un campo toroidale, per mantenere le particelle cariche, ioni e elettroni, in una limitata regione di spazio. Nel secondo si utilizza per il confinamento l'energia di fasci laser o fasci di ioni opportunamente diretti e focalizzati.

### 4.5.2 Il Sole: la centrale a fusione nucleare

Il sole é costituito da un nucleo centrale che é la parte piú interna, e di conseguenza la piú calda ( $\sim 15 * 10^6$  °K). Al suo interno si svolgono le reazioni di fusione nucleare, responsabili della produzione di energia del Sole, del suo risplendere e in definitiva del sostentamento della vita sulla Terra. Il nucleo é la parte meno conosciuta del Sole, nascosta all'osservazione diretta. Gli indizi migliori sul suo stato vengono dall'eliosismologia, che sfrutta le vibrazioni del Sole, e dall'analisi dei neutrini emessi dalle reazioni di fusione responsabili del passaggio dall'idrogeno all'elio. Oltre a questi, altri dati come la produzione di energia totale e la composizione chimica della superficie del Sole pongono stretti limiti ai modelli teorici possibili.

Secondo le teorie odierne, il centro del Sole é composto prevalentemente da idrogeno. La pressione al centro é elevatissima, intorno a  $5 * 10^{11}$  atm con una densitá centrake di circa  $150 \text{ g/cm}^3$ . Stelle piú grandi del Sole hanno nuclei ancor piú densi e caldi.

L'energia termica é cosí alta che piú protoni, quando si incontrano casualmente, vincono la repulsione coulombiana e si uniscono a formare un nucleo di elio. In ogni secondo circa  $6 * 10^{11}$  Kg di idrogeno vengono convertite, rilasciando un'energia pari a  $4 * 10^{26}$  J. Questa energia é pari alla massa di  $4 * 10^9$  Kg, mentre  $6 * 10^9$  Kg vengono convertiti in elio. Quindi il Sole si alleggerisce ogni secondo di  $4 * 10^9$  Kg. Tuttavia la sua massa totale é abbastanza grande perché, anche dopo  $10^9$  anni di vita attiva, la sua massa si riduce solo impercettibilmente.

L'energia liberata dalla fusione nucleare si presenta inizialmente sotto forma di fotoni  $\gamma$ . Essi però non possono fare molta strada, perché vista l'alta densitá saranno presto assorbiti da un atomo sul loro cammino, il quale li riemetterá in una direzione diversa e con uno spettro di frequenze piú ampio. Il ciclo si ripeterá parecchie volte, finché i fotoni non raggiungono la superficie del Sole e lo lasciano alla volta dello spazio interplanetario. Si calcola che questo trasporto di energia dall'interno all'esterno del Sole duri ben 10 milioni di anni. In altre parole, se il nucleo del sole smettesse all'improvviso di produrre energia, la superficie continuerebbe a splendere ancora per lungo tempo.

I neutrini, altro sottoprodotto delle reazioni di fusione nucleare, passano invece quasi indisturbati attraverso la materia, ed escono dal Sole in linea retta. Una piccolissima parte é intercettata dai pochi rilevatori di neutrini in attivitá sul pianeta.

Il processo di fusione é molto difficile. Alle condizioni vigenti nel centro del Sole il protone medio deve aspettare ben *13miliardidianni* prima di fondersi con altri tre e formare un nucleo di elio. Ciò significa che oggi la produzione di energia del Sole deriva dai protoni "fortunati", che hanno incontrato in anticipo il loro destino, e che via via che passa il tempo la probabilitá delle reazioni aumenta.

La luminositá solare aumenta quindi lentamente, il che ha indotto alcuni teorici ad ipotizzare che tra  $5 * 10^8$  anni il Sole sará troppo caldo per consentire la vita sulla Terra. Questo aumento é indipendente dall'evoluzione stellare a cui andrá incontro il Sole, e che lo porterá tra circa  $5 * 10^9$  anni a trasformarsi in una gigante rossa. Il nucleo solare diventerá ancora piú caldo e concentrato di oggi: la fusione dell'elio, tipica delle giganti rosse, richiede centinaia di milioni di gradi.

## 4.6 Reattori nucleari

Nella reazione di fissione si produce tipicamente un numero di neutroni  $> 1$  e questi possono a loro volta produrre altre reazioni di fissione. Si possono quindi realizzare le condizioni per autoalimentare la reazione di fissione in un processo di reazione a catena e produrre energia dalla fissione. La prima pila nucleare é stata realizzata da Fermi e collaboratori nel 1942. Esistono diversi metodi per realizzare un reattore nucleare basato su reazioni a catena controllate, secondo il tipo di utilizzo

- per produrre energia;

- per produrre sorgenti di neutroni per la ricerca;
- per produrre radio-isotopi o altre sostanze fissili, quali  $^{239}\text{Pu}$  o  $^{233}\text{U}$ .

Un tipico reattore nucleare per produrre energia é basato su reazioni a catena in uranio. In ogni reazione di fissione si producono in media  $\simeq 200 \text{ MeV}$  e  $\simeq 2,5$  neutroni energetici. La sezione d'urto di cattura di neutroni energetici é piccola, ma, se i neutroni vengono moderati facendogli perdere energia in successive collisioni con nuclei leggeri, la sezione d'urto di neutroni termici in  $^{235}\text{U}$  é grande e cosí anche la probabilitá di produrre successive reazioni di fissione. Quindi l'elemento centrale di un reattore nucleare a uranio é costituito da uranio arricchito in  $^{235}\text{U}$  (tipicamente  $\simeq 3\%$ ) e da un materiale moderatore. Per moderare i neutroni si usano di solito  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{D}_2\text{O}$  o  $\text{C}$ . Il Carbonio non é molto efficiente, ma si puó distribuire in modo efficace nel combustibile. Il vantaggio dell'acqua (pesante) é che puó anche costituire il mezzo per raffreddare il reattore. Il nucleo di idrogeno é molto efficiente per moderare neutroni, ma ha una elevata sezione d'urto  $n + p \rightarrow {}^2\text{H} + \gamma$  che sottrae neutroni al bilancio della reazione a catena. Il nucleo di deuterio ha una sezione d'urto  $n + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{H} + \gamma$  molto piú piccola, ma produce trizio radioattivo che va filtrato nel sistema di raffreddamento. Con una opportuna combinazione di combustibile e moderatore si puó raggiungere la situazione in cui vi é in media un neutrone termico prodotto per reazione di fissione: reattore critico. Per evitare che questo fattore superi l'unitá e che il reattore funzioni in regime super-critico con il rischio di esplosione, é opportuno poter inserire nel combustibile un materiale con elevata sezione d'urto di cattura di neutroni termici. Il materiale piú indicato é il Cadmio che ha una serie di risonanze che assorbono neutroni termici.

Per capire in che direzione muoversi nella costruzione di un reattore a fusione o a fissione é cruciale capire quali nuclei, energeticamente parlando, sono convenienti da usare e con quale processo. Infatti in figura 4.9 riportiamo la zona di demarcazione tra i processi di fusione e di fissione. Il nucleo piú stabile in Natura é quello del ferro ( $A = 56$ , quindi sono 26 protoni e 30 neutroni). Ovviamente in Natura tutti i sistemi fisici tendono a raggiungere lo stato di massima stabilitá. Per questo motivo, i nuclei di elementi piú leggeri del Fe tendono a fondersi e a formare nuclei piú stabili (quindi conviene la fusione), mentre quelli piú pesanti del Fe tendono a rompersi in frammenti piú piccoli e piú stabili (quindi conviene la fissione).

Concludiamo questa paragrafo riportando una stima dell'energia emessa da un processo nucleare e confrontiamolo con una tipica sorgente energetica di origine fossile. Infatti per esempio **in un reattore che opera in condizione critica, un grammo di  $^{235}\text{U}$  produce energia**

$$\frac{6 * 10^{23}}{235} 200 \text{ MeV} \simeq 0,8 * 10^{11} \text{ J} \quad (4.54)$$

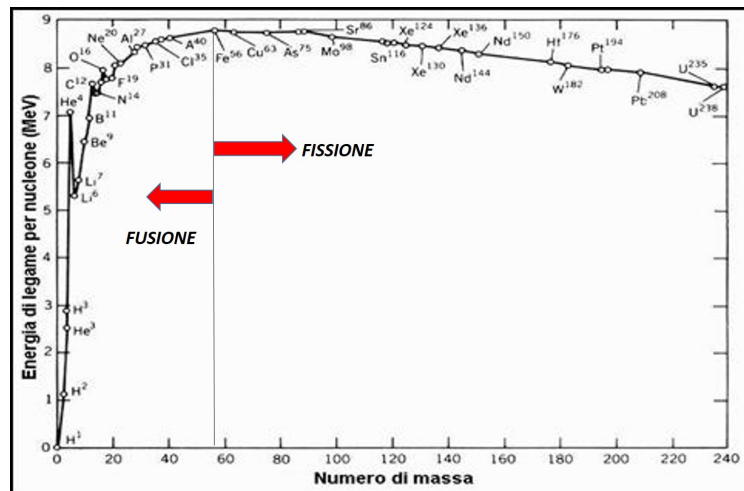
**pari a circa tre volte l'energia prodotta nella combustione di una tonnellata di carbone.**

#### 4.6.1 Reattori a fissione nucleare

In ingegneria un reattore nucleare a fissione é un sistema complesso in grado di gestire una reazione nucleare a fissione a catena in maniera controllata ed utilizzato come componente base nelle centrali nucleari le quali possono contenere anche piú reattori nello stesso sito.

I reattori di potenza sono quelli utilizzati dalle centrali nucleari nei quali l'energia termica prodotta dal reattore viene usata per vaporizzare dell'acqua, la cui energia viene convertita prima in energia meccanica attraverso l'uso di turbine a vapore (ciclo *Rankine*) ed infine in energia elettrica dagli alternatori.

Fondamentalmente un reattore nucleare non é altro che una tecnologia ideata e sviluppata per sfruttare, a fini energetici, la reazione di fissione nucleare da parte di un combustibile nucleare in maniera controllata, garantendo cioé determinati livelli o standard di sicurezza.



**Figura 4.9:** In figura riportiamo il confine tra i processi di fusione e fissione. Oltre il Fe la fusione non é piú esotermica e quindi non ha senso. Al contrario la fissione é vantaggiosa per nuclei grandi mentre oltre il Fe (in senso contrario al caso della fusione) non lo é piú.

La sorgente di energia del reattore é dunque il combustibile presente nel nocciolo o nucleo del reattore, composto da materiale fissile (tipicamente una miscela di  $^{235}U$  e  $^{238}U$ ), arricchita fino al 5% in  $^{235}U$ . É poi possibile utilizzare il combustibile MOX che é una miscela di ossidi di uranio e plutonio, oppure uranio naturale. Per il secondo combustibile si devono operare modifiche nel reattore, mentre per l'uranio naturale si devono utilizzare reattori che utilizzano come moderatore acqua pesante o grafite. Per rallentare i neutroni e termalizzarli quindi portarli fino ad un'energia cinetica inferiore all'eV ed aumentare in questo modo la probabilità di fissionare il combustibile, secondo la fisica stessa della reazione, é necessario utilizzare un moderatore.

Vi sono numerosi tipi di reattori nucleari a fissione essi si classificano principalmente rispetto alla generazione in questo modo:

- Reattori di prima e seconda generazione sono quelli di cui é stata verificata la stabilitá operativa per usi civili commerciali. Oggi sono conosciuti vari tipi di reattore nucleare, generalmente classificati in base al tipo di combustibile utilizzato, al sistema di raffreddamento/generazione vapore e al tipo di moderatore. Questi tipi di reattori si dividono a loro volta in
  1. Reattori a gas: Sono moderati ad anidride carbonica-grafite;
  2. Reattori nucleari ad acqua leggera: Si dividono in RBMK moderati ad acqua-grafite, BWR moderati ad acqua bollente e PWR moderati ad acqua in pressione;
  3. Reattori nucleari ad acqua pesante: Si dividono in HBWR che sono molto instabili e quindi non usati e in PHWR che non é altro un reattore PWR moderato con acqua pesante;
- Viene denominato reattore nucleare di terza generazione un reattore nucleare di potenza che incorpori sviluppi delle tecnologie della seconda generazione (la stragrande maggioranza di quelli attualmente in funzione), con miglioramenti nel progetto, ma senza innovazioni sostanziali sui principi di funzionamento. Tali miglioramenti derivano quindi da sperimentazioni effettuate durante la vita utile dei reattori nucleari di seconda generazione attuali, senza l'introduzione di modifiche radicali quali potrebbero essere la sostituzione del refrigerante-moderatore acqua con altri refrigeranti. Il miglioramento del reattore si snoda in tre filoni principali:

1. Miglioramento dell'uso del combustibile: I processi di combustione sono piú efficienti che in precedenza, nel senso che la massa di scorie per ogni kWh prodotto é inferiore, ma i residui risultano maggiormente radiotossici rispetto ai reattori di generazioni precedenti;
  2. Miglioramento della sicurezza di esercizio: Tra le migliori progressive si possono elencare alcuni sistemi di sicurezza passiva e di sicurezza attiva nel circuito refrigerante;
  3. Miglioramento del rendimento.
- I reattori nucleari di quarta generazione sono un gruppo di 6 famiglie di progetti per nuove tipologie di reattore nucleare a fissione che, pur essendo da decenni allo studio, non si sono ancora concretizzati in impianti utilizzabili diffusamente in sicurezza. Alcuni ritengono che saranno disponibili commercialmente fra alcune decine di anni (2030 – 2040), altri che saranno fruibili già nel 2020.

Non si tratta delle uniche possibilità di sviluppo dopo la terza generazione: la ricerca sulla quarta generazione é stata promossa dal Forum Internazionale GIF (Generation IV International Forum) fondato nel 2000 dal *Department of Energy* degli Stati Uniti d'America (DOE) ed a cui hanno aderito alcuni paesi.

#### 4.6.2 Reattori a fusione nucleare

In ingegneria energetica e nucleare un reattore nucleare a fusione é un tipo di reattore nucleare in grado di gestire una reazione di fusione nucleare in modo controllato. Allo stato attuale non esistono reattori nucleari a fusione operativi per produrre energia elettrica, ma gli unici impianti operativi esistenti sono piccoli impianti di ricerca in grado di sostenere la reazione di fusione nucleare per un tempo molto ridotto.

Tra i vari progetti di ricerca il piú ambizioso attualmente é il progetto internazionale ITER. Il progetto ITER punta a sviluppare un reattore sperimentale in grado di sostenere una reazione di fusione nucleare per diversi minuti. Per il progetto ITER va sottolineato che non mira a produrre direttamente energia elettrica ma punta a dimostrare la capacità dell'impianto di sostenere una reazione nucleare controllata basata sulla fusione nucleare che produca piú energia di quanta ne consumi.

Oggi é in corso la costruzione in scala 1 : 1 del primo reattore per la fusione del progetto ITER nel sito scelto di Cadarache in Francia é prevista la produzione del primo plasma entro il 2020. La produzione di energia elettrica verrà demandata al progetto successivo chiamato DEMO. DEMO si avvantaggerá dell'esperienza derivata dal progetto ITER e integrerà il reattore con tutte le infrastrutture necessarie alla produzione di energia elettrica in modo efficiente. Per ottenere una buona resa energetica il reattore del progetto DEMO dovrà essere necessariamente piú grande del reattore ITER anche se le dimensioni definitive sono ancora oggetto di studio.

Dopo lo sviluppo del progetto DEMO si potranno progettare delle centrali nucleari a fusione per uso industriali che quindi tengano in debita considerazione anche gli aspetti economici legati alla realizzazione delle suddette centrali e che quindi siano convenienti anche dal punto di vista economico. La denominazione provvisoria in ambito europeo del progetto successivo a DEMO é PROTO. I principali vantaggi di tale reattori sono la produzione come unico tipo di scoria He che é un gas inerte e assolutamente non radioattivo inoltre le centrali a fusione nucleare non produrrebbero energia tramite combustione di combustibili fossili e quindi non emettono gas serra, quindi, non incentiverebbero l'effetto serra. Dal punto di vista della sicurezza le centrali a fusione con confinamento magnetico, come ITER e DEMO, non hanno nessuna possibilità di avere un comportamento per cui la reazione possa continuare in assenza del contenimento del plasma. Per quanto riguarda gli svantaggi di tali reattori sono dovuti l'uso di campi elettromagnetici di elevatissima intensità che vengono ottenuti con tecnologie complesse e dispendiose. In natura poi non vi é presenza di trizio a causa del suo breve decadimento questo comporta che sia la centrale a dover generare la quantità di trizio richiesta per le reazioni nucleari che dovranno produrre energia, pertanto, uno dei componenti chiave della futura centrale energetica a fusione sar á il blanket, che é la parte di centrale in cui i neutroni di reazione reagiscono con Li per formare trizio.



## Capitolo 5

# Misura vita media del muone

Nel seguente capitolo esporremo inizialmente la natura dei raggi cosmici e i canali di decadimento ed in particolare il decadimento della particella leptonica chiamata *muone*. Tale particella risulta essere instabile e decade in un elettrone con emissione di neutrino. La rivelazione della presenza del muone a livello del mare, proveniente dagli alti strati dell'atmosfera, é possibile attraverso una misura di passaggi di particelle con appositi rivelatori. A tal fine é stata condotta un'esperienza in laboratorio misurando la sua vita media che é risultata essere in accordo con i valori presenti in letteratura scientifica.

### 5.1 Raggi cosmici

Lo studio dei raggi cosmici costituisce un campo di ricerca che si posiziona al confine tra l'astrofisica, la fisica nucleare e delle particelle elementari. Con il termine generico di raggi cosmici, si intende l'insieme di particelle di provenienza extraterrestre che riempiono lo spazio intorno alla Terra.

L'ipotesi dell'esistenza di una forma di radiazione corpuscolare proveniente da una sorgente al di fuori del nostro pianeta inizia a prendere corpo nel primo decennio del XX<sup>o</sup> secolo. In particolare, questa ipotesi, venne suggerita dagli studi compiuti sui fenomeni di conducibilità elettrica dei gas. Le misure effettuate in laboratorio dimostravano, infatti, che un qualsiasi elettroscopio, dopo essere stato caricato elettricamente, non manteneva indefinitamente la carica posta sulle sue lamine.

Questo fenomeno poteva essere spiegato soltanto ipotizzando che non tutte le particelle di gas, che riempivano l'aria circostante, fossero elettricamente neutre, ma che alcune di esse fossero ionizzate ed avessero, quindi, carica positiva o negativa. Stabilita la causa del fenomeno, rimaneva da comprendere quale fosse il meccanismo responsabile della ionizzazione dell'aria. Inizialmente, si pensó che fosse dovuta all'effetto di radiazioni provenienti da sostanze radioattive presenti nella crosta terrestre. I raggi  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  prodotti da tali sostanze, sembravano essere le uniche particelle in grado di ionizzare l'aria. Questa ipotesi tuttavia, venne contraddetta rapidamente in seguito ai primi esperimenti condotti in quota.

Misure effettuate mostrarono, infatti, che essi tendono a scaricarsi ugualmente anche se allontanati da sorgenti di radioattività naturale. Questo risultato era, ovviamente, incompatibile con l'ipotesi che la radiazione ionizzante fosse esclusivamente di origine terrestre. Se così fosse stato, il flusso radioattivo avrebbe dovuto diminuire rapidamente allontanandosi dalla superficie terrestre e, di conseguenza, anche il tasso di ionizzazione delle particelle atmosferiche.

Nel 1912 i fisici Hess e Kolhoerser diedero inizio a una lunga serie di esperimenti a quota piú elevate (da 5 a 9 Km). Tali esperimenti mostravano che la velocità di scarica di un elettroscopio tende ad aumentare a quote superiori a 1500 m. Questo risultato poteva essere interpretato solamente ipotizzando che anche il tasso di io-

nizzazione dell'atmosfera aumentasse al di sopra dei 1500 m e che, quindi, la radioattività terrestre giocasse un ruolo secondario in questo tipo di fenomeno. L'unica spiegazione plausibile era, allora, che esistesse una forma di radiazione ionizzante negli strati alti dell'atmosfera, la cui origine doveva essere necessariamente extraterrestre. A questa radiazione venne dato il nome di *raggi cosmici*.

All'epoca della loro scoperta, i raggi cosmici erano di gran lunga la forma di radiazione più penetrante tra quelle conosciute. Esperimenti successivi dimostrarono che le particelle cosmiche sono in grado di generare sciami di particelle secondarie. Proprio osservando queste tracce si scoprì che in alcuni casi esse si diramano in più segmenti, ognuno dei quali è associato alla formazione di una particella. Questa serie di lavori portò ad ipotizzare che le interazioni dovessero avvenire anche negli strati più esterni dell'atmosfera e che, in realtà, dovessero esistere due tipi di radiazione cosmica: una di tipo primario e una di tipo secondario.

La composizione della radiazione cosmica primaria è stata studiata a lungo utilizzando ogni sorta di rivelatori. Essendo la radiazione cosmica costituita per la maggior parte da particelle cariche, esse risente dell'azione del campo magnetico terrestre. Questo determina la creazione di regioni intorno alla Terra dove c'è maggiore densità di particelle cariche rispetto ad altre. Proprio dagli studi svolti sul comportamento dei raggi cosmici intorno alla Terra è stato possibile dedurre che la radiazione cosmica è costituita dal 80% di protoni, 15% particelle  $\alpha$ , più elementi pesanti in piccole quantità, 1% di elettroni e di raggi  $\gamma$ . Si è riscontrato anche la presenza di radiazione di corpo nero di 2,7°K (la cosiddetta radiazione fossile). Molto importante è la presenza dei neutrini che possono portare anche a stime di grosse quantità di energia.

Una caratteristica dei raggi cosmici è la loro isotropia nello spazio. Data la presenza del campo magnetico terrestre, però, solo ai poli della Terra penetrano tutte le particelle mentre per *effetto della forza di Lorentz* man mano che ci si avvicina all'equatore le particelle più veloci vengono respinte. Durante l'attraversamento dell'atmosfera terrestre, la componente primaria della radiazione cosmica viene gradualmente assorbita e vengono generati, per interazione nucleari, i raggi cosmici secondari. Quando una particella della radiazione cosmica primaria interagisce con un nucleo atmosferico, produce particelle secondarie instabili (mesoni  $\pi$ ) e nuclei secondari. I mesoni, appartenenti alla famiglia dei pioni, decadono nel seguente modo

$$\begin{aligned}\pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \pi^0 &\rightarrow 2\gamma\end{aligned}\tag{5.1}$$

Accanto a questi canali di decadimento sono stati trovati anche altri mesoni (detti kaoni) che presentano i seguenti schemi

$$K^\pm \rightarrow \begin{cases} \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \\ e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) \\ \pi^\pm + \pi^0 \\ \pi^\pm + \pi^+ + \pi^- \\ \pi^\pm + \pi^0 + \pi^0 \\ \pi^0 + \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \\ \pi^0 + e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) \end{cases}\tag{5.2}$$

Inoltre vi è il  $K^0$  che decade come se fosse due particelle diverse, ma di uguale massa:  $K_{\text{short}}^0$  con vita media  $\tau = 0,89 * 10^{-10}$  s,  $K_{\text{long}}^0$  con vita media  $\tau = 5,2 * 10^{-8}$  s

$$K_{\text{short}}^o \rightarrow \begin{cases} \pi^+ + \pi^- \\ \pi^0 + \pi^0 \end{cases}, \quad K_{\text{long}}^o \rightarrow \begin{cases} \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \\ 3\pi^0 \\ \pi^\pm + \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) \\ \pi^\pm + e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) \end{cases} \quad (5.3)$$

Sono inoltre presenti gli iperoni, particelle di massa molto maggiore di quella del protone che presentano la peculiarit  di decadere tramite interazioni deboli. I canali di decadimento sono

$$\Lambda^0 \rightarrow \begin{cases} p + \pi^- \\ n + \pi^0 \end{cases}, \quad \Sigma^+ \rightarrow \begin{cases} p + \pi^0 \\ n + \pi^+ \end{cases}, \quad \Omega^- \rightarrow \begin{cases} \Xi^0 + \pi^- \\ \Xi^- + \pi^0 \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma, \quad \Sigma^- \rightarrow n + \pi^-, \quad \Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-, \quad \Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$$

Al livello del mare la componente principale dei raggi cosmici   rappresentata dai muoni  $\mu$  che sono leptoni aventi un basso rate di interazione con l'atmosfera e possono penetrare anche centinaia di metri nel sottosuolo.

## 5.2 Come fermare il muone e misurarne la vita media

Non si pu  certo sperare di osservare i raggi cosmici,  $\mu$  ed elettroni/positroni a occhio nudo, date le loro dimensioni ( $10^{-15}$  m); si pu  pensare di farli interagire opportunamente con la materia e ricavare l'informazione del passaggio di particelle dall'avvenuta interazione. Uno dei rilevatori pi  usati nella fisica delle particelle   lo *scintillatore*. Tale strumento sfrutta il fatto che in natura esistono dei materiali che, esposti a certe forme di energia assorbono e riemettono tale energia sotto forma di fotoni nella banda del visibile, secondo la legge  $N_{\text{fotoni}} \sim e^{-\frac{t}{\tau}}$  dove  $\tau$    la costante di tempo caratteristica del mezzo: se questa   grande, il fenomeno si dice fosforescente, se   piccola, fluorescenza.

Tuttavia non   l'unica caratteristica da richiedere al rilevatore: infatti, essi devono essere anche trasparenti ai fotoni nella banda del visibile. Ci sono due tipi di materiali luminescenti distinguibili per il differente meccanismo di scintillazione: quelli organici e quelli inorganici. Grazie alla natura della luminescenza nei materiali gli scintillatori organici non perdono le propriet  scintillanti e possono essere usati come cristalli puri o come miscele di pi  componenti in soluzioni liquide o solide. Negli scintillatori inorganici il meccanismo di scintillazione   caratteristico della struttura elettronica a bande dei cristalli.

In entrambi i casi l'intensit  del segnale luminoso prodotto   bassa. L'unico modo per rilevare il passaggio di fotoni di cos  bassa energia   quello di convertirli in elettroni per effetto fotoelettrico e, siccome la resa di tale processo   bassa, amplificarli successivamente. Un segnale elettrico   molto pi  facile da trattare. Lo strumento che converte fotoni in elettroni e ne amplifica il segnale   il *fotomoltiplicatore*.

Come si   gi  detto, i muoni  $\mu$  provengono dal decadimento di particelle come i kaoni ( $\kappa$ ) e i pioni ( $\pi$ ), prodotti dall'interazione dei raggi cosmici, provenienti da sorgenti esterne alla Terra, con gli alti strati dell'atmosfera. Perci , non abbiamo un fascio di muoni collimato e con una certa energia, bens  uno spettro in energia ed una distribuzione angolare di arrivo che dipendono da vari fattori come per esempio la latitudine. Lo spettro dei muoni cosmici presenta un'energia media pari a  $E = 2$  GeV, e un'energia, a cui corrisponde il massimo del numero del numero di particelle, pari a  $E_{\text{max}} = 1$  GeV.

Il decadimento del muone avviene secondo i due canali

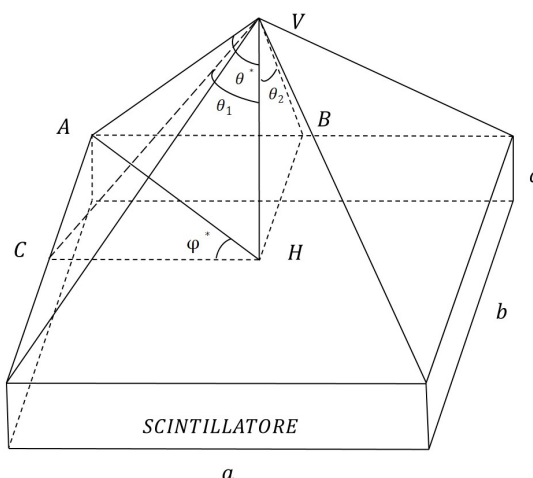
$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu, \quad \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu} \quad (5.5)$$

Essendo l'interazione elettromagnetica lo strumento di rilevazione è chiaro che il neutrino o l'antineutrino non risultano rilevabili, per cui i rivelatori in uso sono soltanto due: uno per il muone che decade e l'altro per il suo prodotto di decadimento (elettrone o positrone), posizionati rispettivamente uno sopra l'altro considerato che il flusso dei raggi cosmici procede dall'alto verso il basso. Inoltre, i rivelatori utilizzati non identificano le particelle che li attraversano; per questo motivo, sovrapponendo la superficie inferiore del rivelatore del muone a quella superiore del rivelatore di elettrone/positrone non vi sarebbe modo di distinguere i seguenti eventi: l'evento in cui il muone attraversa entrambi i rivelatori senza decadere da quello in cui il muone decade in volo. Infatti, prendiamo in considerazione un muone con energia pari a quella media dello spettro a cui corrispondono un fattore di Lorentz  $\gamma$  pari a 18,9 ed una velocità di  $0,9986c$ ; la vita media di tale  $\mu$  sarà circa  $38 \mu\text{sec}$ , durante cui questo percorre una distanza pari a circa 11 km, che, per quanto spessi possano essere costruiti i rivelatori, risulteranno sempre troppo rispetto allo spessore degli scintillatori (sono dell'ordine di  $(2 \div 4) \text{ cm}$ ). Per questo occorre studiare il decadimento del muone da fermo e per far questo bisogna fermare i muoni con un opportuno assorbitore. Se il muone decade da fermo, il sistema di riferimento del laboratorio coincide con quello del centro di massa, in cui l'energia a disposizione è pari alla massa a riposo del  $\mu$ ,  $m_\mu = 105,66 \text{ MeV}/c^2$ ; gli spettri in energia delle particelle prodotte nel decadimento avranno un'energia massima pari a  $\frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu} c^2 \sim \frac{m_\mu}{2} c^2 = 52,83 \text{ MeV}$ . Quindi l'assorbitore da usare per fermare i muoni dovrà essere tale da non fermare anche gli elettroni/positroni di 50 MeV.

Ogni particella carica, penetrando nella materia ed interagendo perde inevitabilmente tutta o parte della sua energia. Risulta quindi fondamentale la scelta dell'assorbitore ed il suo spessore. Al fine di rallentare e fermare la particella lo spessore dell'assorbitore deve essere superiore alla lunghezza di penetrazione della particella. Tale lunghezza dipende dal tipo di materiale, dal tipo di particella e dalla sua energia. Sperimentalmente è possibile determinarla usando un fascio di particelle di una data energia che attraversa vari spessori del materiale in esame e misurando il rapporto tra il numero di particelle uscenti e quello di particelle entranti attraverso ciascun spessore. Si potrebbe pensare di usare un assorbitore molto pesante, cioè fatto di elementi con elevati numeri di massa, tipo Pb. Tuttavia con il piombo la lunghezza di penetrazione di un elettrone di 50 MeV è 1,3 cm, per cui si rischierebbe di perderli tutti nell'assorbitore senza rilevarne il passaggio nel secondo scintillatore. Anche l'aria potrebbe essere usata come assorbitore, ma i muoni fermati sarebbero pochi, quindi il tempo di acquisizione dati sarebbe troppo lungo. Si possono usare, infine, delle risma di carta con densità di  $80 \text{ g/cm}^3$  e spessore  $s$ .

Lo spessore  $s$  è uno dei parametri che vanno opportunamente scelti: poiché la densità dell'assorbitore è piccola, si potrebbe pensare di aumentare  $s$  così da fermare un maggior numero di muoni, ma se lo si aumenta troppo, si rischia di perdere gli elettroni/positroni a causa dell'isotropia della loro direzione di moto nel decadimento dei muoni da fermi. Infatti, dette  $a, b, c$  le dimensioni dello scintillatore, e  $h$  la distanza del punto di decadimento dalla base inferiore dello scintillatore di rivelazione, la probabilità che un elettrone/positrone possa essere rivelato è pari a quella che ha di essere emesso nell'angolo solido sotteso dalla base inferiore dello scintillatore, cioè l'angolo al vertice della piramide mostrata in figura 5.1.

La stima dell'ampiezza del vertice della piramide è stata ottenuta operando una media tra l'ampiezza del vertice del cono circoscritto alla piramide e quella dei vertici dei settori di cono inscritti nella piramide



**Figura 5.1:** Schematizzazione geometrica dello scintillatore (parallelepipedo di spigoli  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) sottostante al materiale assorbente di altezza  $h$ .  $\phi^* = \angle CHA$ ,  $\theta^* = \angle HVA$ ,  $\theta_1 = \angle CVH$ ,  $\theta_2 = \angle BVH$ .

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\theta^*} \sin \theta d\theta = \frac{1 - \cos \theta^*}{2} \quad (5.6)$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\phi^*} d\phi \int_0^{\theta_1} \sin \theta d\theta + \int_{\phi^*}^{\pi/2} d\phi \int_0^{\theta_2} \sin \theta d\theta \right\} = \frac{\phi^*(1 - \cos \theta_1) + (\pi/2 - \phi^*)(1 - \cos \theta_2)}{\pi}$$

dove

$$\begin{aligned} \phi^* &= \arctan a/b, & \cos \theta^* &= \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + a^2 + b^2}} \\ \cos \theta_1 &= \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + a^2}}, & \cos \theta_2 &= \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + b^2}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Considerato che vale in prima approssimazione  $s + c \sim R + h$  dove  $R$  é la lunghezza di penetrazione, una volta fissate le dimensioni dello scintillatore e dell'assorbitore, saranno rilevati con maggiore probabilit  i decadimenti che avvengono in prossimit  della superficie del secondo scintillatore rispetto a quelli che avvengono immediatamente dopo l'entrata nell'assorbitore. Quindi saranno rilevati i decadimenti con energia tale che la lunghezza di penetrazione sia confrontabile con lo spessore dell'assorbitore ( $R \sim s \rightarrow h \sim c$ ).

Nel caso specifico le dimensioni sono  $a = 47$  cm,  $b = 20$  cm,  $c = 2,5$  cm,  $s = 12$  cm da cui quantitativamente abbiamo

$$\mathcal{P}(h \sim c) = 42.2\%, \quad \mathcal{P}(h \sim s + c) = 19.0\% \quad (5.8)$$

Per rivelare un numero maggiore di decadimenti, con lo stesso spessore di assorbitore, si pu  pensare di ridurre la velocit  dei muoni prima di rivelarne il passaggio, cio  porre un moderatore sul primo scintillatore. Tale moderatore pu  essere un blocco di Pb o Fe o in ogni caso un materiale denso, cos  che lo spettro dei muoni si sposta verso energie pi  basse e si riesce a fermare un maggior numero con lo stesso spessore di assorbitore.

A questo punto, abbiamo i segnali dai due scintillatori ed una certa probabilit  che i muoni decadano nell'as-

sorbitore, quindi é possibile misurarne la vita media cioé quanto tempo dopo il passaggio del muone attraverso il primo scintillatore viene registrato il segnale del passaggio dell'elettrone/positrone nel secondo scintillatore.

Lo scopo dell'attività sperimentale é consistito quindi nel misurare il ritardo di emissione del secondo segnale rispetto al primo. Si possono realizzare misure in *coincidenza ritardata*. Detti  $A$  il segnale associato al muone,  $B$  il segnale associato all'elettrone/positrone,  $R_A$  il ritardo temporale con cui viene generato un impulso elettrico corrispondente al segnale  $A$ , un circuito logico (detto circuito di coincidenza) analizza gli impulsi  $A$  (ritardato di  $R_A$ ) e  $B$  che genera un segnale di uscita quando i due segnali in ingresso sono appunto in coincidenza. L'uscita di tale circuito di coincidenza viene collegato ad un contatore. Così, misurando il numero di eventi che avvengono per un certo ritardo  $R_A$  e variando su  $R_A$  si ottiene la tipica curva di decadimento (3.35).

### 5.3 Lavoro svolto in laboratorio

In laboratorio, abbiamo utilizzato la seguente strumentazione che é schematicamente riportata in figura 5.2.

- Scintillatore: strumento costituito da materiali capaci di emettere luce quando attraversati da particelle cariche.
- Assorbitore: composto da due risme di carta interposte tra i due scintillatori allo scopo di pulire il fascio di raggi cosmici da particelle cariche estranee ad esso.
- Fotomoltiplicatore: é costituito da un catodo che emette elettroni per effetto fotoelettrico. Collegando questo strumento allo scintillatore convertiamo gli impulsi luminosi in impulsi elettrici.
- Generatore di alta tensione: collegato al fotomoltiplicatore ne aumenta la sensibilità all'aumentare della tensione.
- Discriminatore: strumento che risponde ad impulsi la cui intensità risulta essere superiore ad un determinato valore di soglia e digitalizza il segnale di ingresso. A questo apparato vengono inviati gli impulsi elettrici provenienti dal fotomoltiplicatore. Può essere utilizzato in due configurazioni:
  - AND: il discriminatore segnala il passaggio di una particella solo se attraversa entrambi gli scintillatori;
  - OR: il discriminatore segnala il passaggio di una particella se attraversa uno qualsiasi degli scintillatori.
- Circuito di ritardo: trasla il segnale nel tempo di una quantità finita.
- Scheda multicanale: rivela il canale in cui cade il segnale di risposta.

Ai fotomoltiplicatori é stata applicata una differenza di potenziale, che variava tra (1700 ÷ 2000) V, tramite dei generatori di tensione. Al variare della suddetta tensione abbiamo misurato il numero di particelle che attraversavano i rivelatori. Tutte le misure sono state effettuate in intervalli di due minuti. L'esperienza é stata svolta in due parti: nella prima abbiamo testato l'efficienza dei rivelatori al variare della tensione, della disposizione e della soglia mentre nella seconda parte abbiamo misurato la vita media dei muoni.

L'efficienza dei rivelatori é stata testata nelle seguenti configurazioni e le misure sono riportate in figura 5.3.

1. Discriminatore posizionato in modalità OR, differenza di potenziale nulla sul rivelatore 2 (quello che misura il passaggio di elettroni/positroni). Si varia la differenza di potenziale sul rivelatore 1 (quello che misura il passaggio dei muoni).

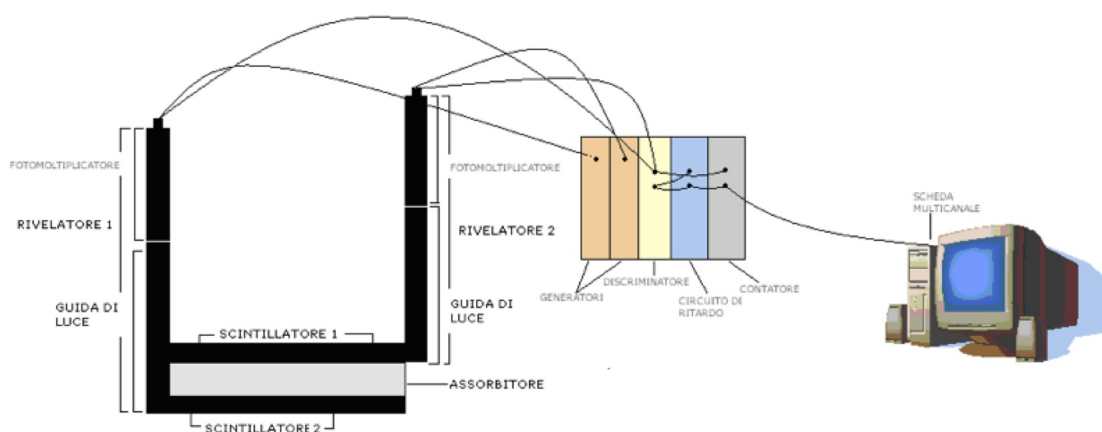


Figura 5.2: Schema di connessione delle apparecchiature.

2. Nella seconda configurazione, posizionando sempre il discriminatore in modalità OR, azzeriamo la differenza di potenziale al rivelatore 1 variando la tensione del 2.
3. Mentre per la terza configurazione poniamo il discriminatore in modalità AND e inserendo tra gli scintillatori un assorbitore, effettuiamo la misura dei conteggi variando la tensione ai capi dei due rivelatori con l'accortezza di porle allo stesso valore.
4. Nella quarta configurazione abbiamo tolto l'assorbitore e effettuato le misure con la stessa modalità della configurazione precedente.
5. Nell'ultima configurazione i rivelatori sono stati ruotati di un angolo pari a  $90^\circ$  rispetto al piano d'appoggio. Le misure sono state effettuate con le stesse accortezze delle due precedenti configurazioni.

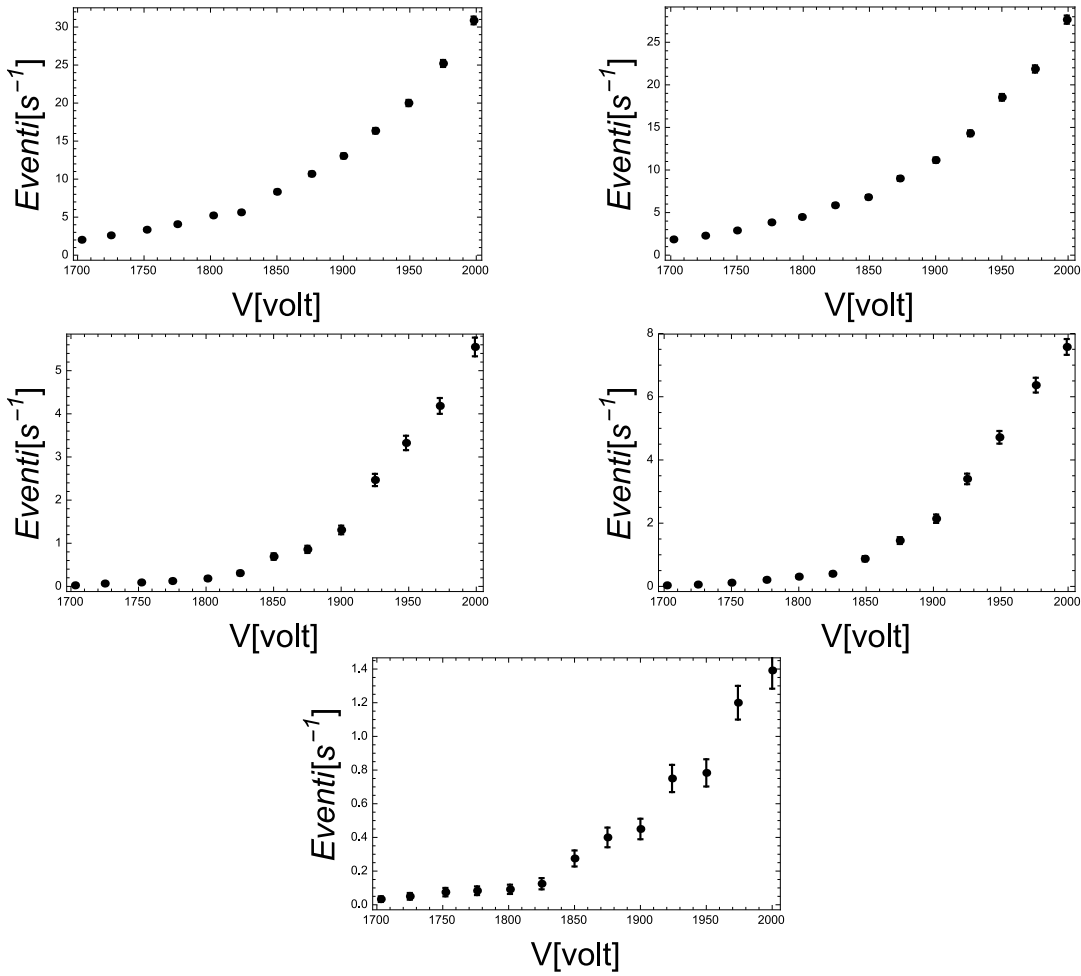
Dall'analisi dei dati si può notare che il numero di particelle rilevate diminuisce per il semplice fatto che la superficie rivelante è minore. Inoltre nella modalità OR il numero di particelle rilevate a parità di tensione è maggiore rispetto a quelle in modalità AND. Questo perché la probabilità che una particella venga rilevata da entrambi i rivelatori è minore rispetto a quella di essere rilevata dal singolo rivelatore.

Per calibrare i rivelatori, effettuiamo uno studio della risposta di essi al variare della tensione di soglia. Riportiamo in figura 5.4 il numero di conteggi in funzione della tensione di soglia per un fissato valore di tensione d'ingresso (pari a  $1850 \pm 1$ )V per entrambi gli scintillatori. Si può notare che a parità di tensione aumentando il valore della tensione di soglia il numero di conteggi registrati diminuisce, questo perché parte di questi vengono tagliati.

Nella seconda parte si è passato alla misura della vita media dei muoni che è stata dedotta utilizzando un istogramma con un numero di dati sufficienti per il nostro scopo. Dato che l'istogramma riporta il numero delle particelle decadute in funzione dei canali della scheda multicanale, troviamo una relazione che lega il numero di canali con il ritardo impostato dal delay. Per ottenere ciò fissiamo la tensione e variando il ritardo, otteniamo il numero dei canali in cui vengono rilevate le particelle. Per poter trovare la suddetta relazione abbiamo realizzato un fit lineare (figura 5.5-(a)) con il software *Mathematica*<sup>®</sup>. La nostra retta è risultata essere

$$\Delta t = a + b(\# \text{ canali}) \rightarrow \begin{cases} a = (-0,14 \pm 0,01) 10^{-6} \text{ s} \\ b = (4,85 \pm 0,03) * 10^{-3} \frac{10^{-6} \text{ s}}{\# \text{ canali}} \end{cases} \quad (5.9)$$

Ricaviamo quindi il tempo di ritardo dall'interpolazione precedente, sostituendo nelle ascisse il punto medio di ogni beam. Interpoliamo esponenzialmente i punti dell'istogramma fornitoci, considerando come coordinate il va-



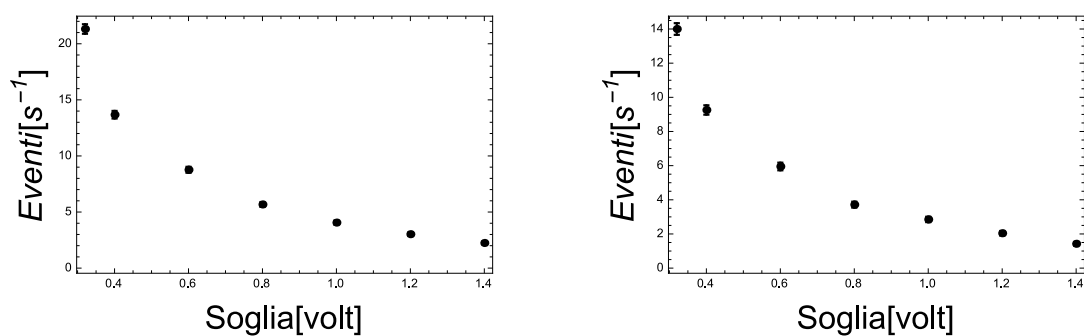
**Figura 5.3:** Conteggio delle particelle rivelate in funzione della differenza di potenziale applicata ai capi degli scintillatori. In alto a sinistra la differenza è nulla sullo scintillatore 2 modalità OR; in alto a destra la differenza è nulla sullo scintillatore 1 modalità OR; al centro a sinistra la differenza è la stessa su entrambi gli scintillatore con l'aggiunta di un assorbitore e in modalità AND; al centro a destra la differenza è la stessa su entrambi gli scintillatore senza assorbitore e in modalità AND; in basso gli scintillatori sono ruotati di 90° e le condizioni sono le stesse degli ultimi due casi.

lor medio di ogni beam in ascissa e il corrispondente numero di decadimenti in ordinata. La funzione interpolante che deriva dalla teoria del decadimento (3.35) fornisce i seguenti valori (figura 5.5-(b))

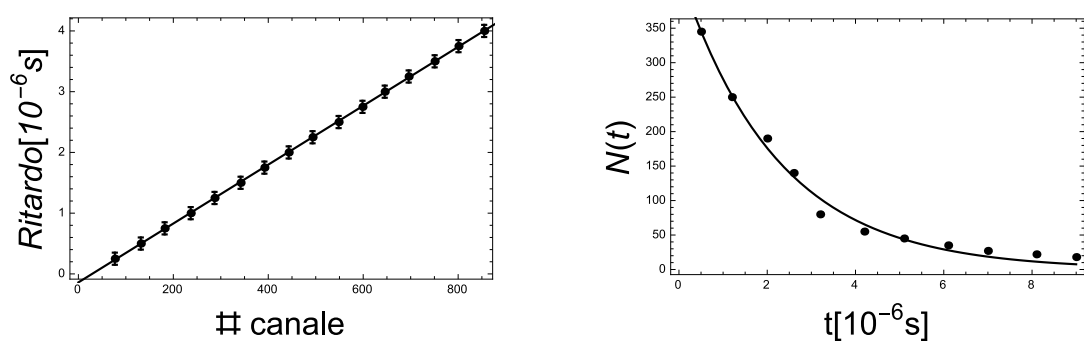
$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow \begin{cases} N_0 = 432.753 \pm 35.813 \\ \tau = (2,22 \pm 0,28) * 10^{-6} \text{ s} \end{cases} \quad (5.10)$$

dove  $\tau$  è la vita media del muone. Così facendo abbiamo ottenuto una stima di  $\tau$ , dato che il valore atteso è  $(2,197035 \pm 0,000004) * 10^{-6} \text{ s}$ .





**Figura 5.4:** Andamento del numero di conteggi in funzione della differenza di potenziale di soglia per lo scintillatore 1 (sinistra) e 2 (destra) avendo fissato per entrambi la differenza di potenziale d'ingresso a  $(1850 \pm 1)$  V.



**Figura 5.5:** Fit lineare per la determinazione dei coefficiente (5.9) tra il numero di canali ed il corrispondente ritardo temporale (a sinistra). Fit esponenziale (5.10) del numero  $N(t)$  di decadimenti  $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$  per la determinazione della vita media del decadimento. Sperimentalmente é stato misurato  $\tau = (2,22 \pm 0,28) * 10^{-6}$  s.



# Conclusioni

Il presente lavoro di tesi ha cercato di evidenziare gli aspetti di fisica fondamentale necessari allo studente della laurea Magistrale in Ingegneria Energetica per una piú agevole comprensione delle problematiche inerenti al mondo del nucleare. In particolare lo studio di modelli per il miglioramento delle attuali tecnologie sia dal punto di vista dell'efficienza che della sicurezza per gli impianti nucleari.

La strategia di sviluppo del lavoro é consistita nell'analizzare, pur brevemente e senza mai scendere in questioni piú intime per la fisica, la cinematica e la meccanica relativistica unitamente alla fisica nucleare e subnucleare. I rudimenti della meccanica quantistica sono stati presentati in appendice a margine della dimostrazione dell'effetto tunnel.

Il punto di partenza é stata la dimostrazione teorica e sperimentale dell'incompatibilitá delle leggi di Maxwell con i principi della relativitá galileana. Riformulando quindi le leggi di trasformazione tra sistemi di riferimento compatibili con la richiesta dell'invarianza della velocitá della luce sono state giustificate le trasformazioni di Lorentz, vero spartiacque tra i fenomeni a basse velocitá e quelli con velocitá confrontabili con quella della luce. L'elettromagnetismo é stato ricollocato nel quadro delle teorie relativistiche e di conseguenza la meccanica newtoniana ha subito un radicale cambio di approccio giungendo, quindi, ad esprimere l'equivalenza massa - energia. Questo ultimo aspetto é il punto nodale di una qualsiasi reazione nucleare.

L'attenzione si é successivamente spostata sui principali problemi legati alla teoria del nucleo. In particolare siamo partiti dallo scattering di Rutherford (esperienza con la quale é stata evidenziata l'esistenza di una componente nell'atomo molto piccola e molto densa), il concetto di sezione d'urto, la misura della massa degli isotopi nucleari con lo spettrografo di massa, l'energia "disponibile" per un nucleo, i decadimenti alfa, beta e gamma, ed infine la stabilitá dei nuclei ha avuto una giustificazione teorica (in un impianto classico e non quantistico) utilizzando il cosiddetto modello semiempirico delle masse. Nel caso del decadimento alfa si é affrontata la questione delle barriere di energia ed introducendo i principi basi dell'equazione di Schroedinger é stato possibile giustificare i fenomeni di decadimento alfa che per la fisica newtoniana non dovrebbero esistere.

Successivamente abbiamo analizzato gli urti relativistici. In tale aspetto ricade sia il piú classico urto tra particelle (necessario per la fissione nucleare) che l'urto intenso come decadimento di una particella. Il concetto di energia di soglia (necessaria per l'innescio di una reazione) é stato calcolato e direttamente connesso alle differenze di massa tra i prodotti del decadimento e le masse generatrici. A questo punto una breve panoramica sulla fissione e fusione nucleare é stata riportata. Infine un'analisi sui reattori nucleari e lo stato dell'arte é stata riportata.

Il lavoro si é chiuso quindi passando alla sperimentazione in laboratorio. Non potendo misurare decadimenti nucleari per ovvie ragioni (legislative e di sicurezza personale) é stato scelto di verificare sia la legge temporale del decadimento sia l'esistenza di particelle subatomiche. In particolare é stata misurata la vita media della particella *muone* ottenendo una stima compatibile con i valori presenti in letteratura. Il muone é una particella appartenente alla famiglia dei leptoni (particelle leggeri) per la quale non é stato difficile individuare materiali "radioattivi" che la generano ma é bastato misurare con apposite strumentazioni una delle tante componenti dei raggi cosmici che giungono "naturalmente" sulla Terra.



# Appendice A: Problema di Keplero

Consideriamo il moto di una particella  $\alpha$  di massa  $m_\alpha$  nel campo elettrostatico repulsivo generato da un nucleo. Sia  $+Ze$ , come sempre, la carica del nucleo; la carica della particella  $\alpha$ , come sappiamo, vale  $+2e$  e pertanto l'energia potenziale sarà

$$U(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \quad (5.11)$$

Le leggi di conservazione dell'energia e del momento angolare sono

$$\frac{m_\alpha}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = \mathcal{E} \quad (5.12)$$

$$m_\alpha r^2 \dot{\psi} = \mathcal{L}$$

Scrivendo  $\dot{r} = \dot{\psi} \frac{dr}{d\psi}$  le due equazioni (5.12) possono essere combinate come segue

$$\frac{1}{r^4} \left[ \frac{dr}{d\psi} \right]^2 = \frac{2m_\alpha \mathcal{E}}{\mathcal{L}^2} - \frac{Ze^2 m_\alpha}{\pi\epsilon_0 r \mathcal{L}^2} - \frac{1}{r^2} \quad (5.13)$$

ed introducendo la variabile  $\rho = 1/r$  si ottiene

$$\left[ \frac{d\rho}{d\psi} \right]^2 = \frac{2m_\alpha \mathcal{E}}{\mathcal{L}^2} - \frac{Ze^2 m_\alpha}{\pi\epsilon_0 \mathcal{L}^2} \rho - \rho^2 \quad (5.14)$$

Derivando questa ultima ulteriormente rispetto alla variabile  $\psi$  si ottiene

$$\frac{d^2 \rho}{d\psi^2} + \rho = -\frac{Ze^2 m_\alpha}{2\pi\epsilon_0 \mathcal{L}^2} \quad (5.15)$$

la cui soluzione generale é data come

$$\rho = A \cos \psi + B \sin \psi - \frac{Ze^2 m_\alpha}{2\pi\epsilon_0 \mathcal{L}^2} \quad (5.16)$$

Le costanti arbitrarie  $A$  e  $B$  devono essere fissate dalle condizioni iniziali. Riferendosi alla figura 3.2 é chiaro che se  $\psi = \pi$  allora  $r \rightarrow \infty$  e  $\rho \rightarrow 0$ . Da cui si ottiene  $A = -\frac{Ze^2 m_\alpha}{2\pi\epsilon_0 \mathcal{L}^2}$ . La seconda condizione la otteniamo nel

seguinte modo. L'ordinata di qualsiasi punto della traiettoria é legata a  $r$  e  $\psi$  mediante la relazione  $y = r \sin \psi$ . Quindi

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{r \sin \psi} = \frac{\rho}{\sin \psi} = - \left[ \frac{Ze^2 m_\alpha}{2\pi\epsilon_0 \mathcal{L}^2} \right] \frac{1 + \cos \psi}{\sin \psi} + B \quad (5.17)$$

Per  $\psi = \pi$  l'ordinata  $y$  é uguale al parametro d'urto  $p$  (figura 3.2) da cui si ottiene  $B = 1/p$ . La soluzione (5.16) diviene

$$\rho = - \left[ \frac{Ze^2 m_\alpha}{2\pi\epsilon_0 \mathcal{L}^2} \right] (1 + \cos \psi) + \frac{1}{p} \sin \psi \quad (5.18)$$

La deviazione  $\theta$  della particella  $\alpha$ , evidentemente, é uguale all'angolo  $\psi$  fra gli asintoti dell'iperbole (figura 3.2), e per la direzione del moto dopo la deviazione  $\rho = 0$ . Perciò si ottiene

$$\left[ \frac{Ze^2 m_\alpha}{2\pi\epsilon_0 \mathcal{L}^2} \right] (1 + \cos \theta) + \frac{\sin \theta}{p} = 0 \rightarrow \cot \frac{\theta}{2} = \left[ \frac{2\pi\epsilon_0 \mathcal{L}^2}{Ze^2 m_\alpha} \right] \frac{1}{p} \quad (5.19)$$

da cui siccome il momento angolare  $\mathcal{L}$  puó essere espresso in termini del parametro d'urto  $p$  e della velocità  $v_i$  come

$$\mathcal{L} = m_\alpha p v_i \quad (5.20)$$

si ottiene immediatamente l'espressione (3.4) ricordando che  $b = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{m_\alpha v_i^2}$  é la distanza minima dal nucleo raggiunta dalla particella  $\alpha$  (3.3).

## Appendice B: Effetto Tunnel

L'effetto tunnel é un effetto quanto-meccanico che permette una transizione ad uno stato impedito dalla meccanica classica. Nella meccanica classica, la legge di conservazione dell'energia impone che una particella non possa superare un ostacolo (barriera) se non ha l'energia sufficiente per farlo. Questo corrisponde al fatto intuitivo che, per far risalire un dislivello ad un corpo, é necessario imprimergli una certa velocità, ovvero cedergli dell'energia a sufficienza per completare la salita.

La meccanica quantistica, invece, prevede che una particella abbia una probabilità diversa da zero di attraversare spontaneamente una barriera arbitrariamente alta di energia potenziale. C'è da sottolineare che l'analogia con il dislivello della meccanica classica non sia propriamente corretta per via della presenza di un ostacolo materiale che nell'effetto tunnel non é presente. Un esempio é dato da un elettrone ad energia cinetica fissata che nel raggiungere una sottile zona in cui esso dovrebbe essere respinto per via della energia insufficiente riesce a superarla in certi casi. Infatti, applicando i postulati della meccanica quantistica al caso di una barriera di energia potenziale in una dimensione, si ottiene che la soluzione dell'equazione di Schrodinger, che é la legge che governa tali sistemi, all'interno della barriera é rappresentata da una funzione esponenziale decrescente. Dato che le funzioni esponenziali non raggiungono mai il valore di zero, si ottiene che esiste una piccola probabilità che la particella si trovi dall'altra parte della barriera dopo un certo tempo  $t$ .

L'effetto tunnel venne utilizzato per la prima volta nel 1928 dal fisico ucraino George Gamow per spiegare il decadimento  $\alpha$ , nel quale una particella  $\alpha$  (un nucleo di elio) viene emessa da un nucleo perché riesce a superarne la barriera di energia anche se apparentemente questa non possiede energia sufficiente affinché avvenga il passaggio. Successivamente Max Born comprese che l'effetto tunnel non é esclusivo della fisica nucleare, ma si presenta anche in altri fenomeni fisici.

Il punto di partenza é l'equazione di Schrodinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(t, \mathbf{r}) + U(t, \mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) \quad (5.21)$$

dove  $\hbar = h/2\pi$ ,  $h$  é la costante di Planck,  $m$  é la massa della particella,  $U(t, \mathbf{r})$  é l'energia potenziale,  $\Psi(t, \mathbf{r})$  é la funzione d'onda a valori complessi,  $i$  é l'unità immaginaria e  $(t, \mathbf{r})$  é la coppia della posizione e del tempo.

L'interpretazione statistica della meccanica quantistica é immediatamente ottenuta attraverso la riscrittura dell'equazione di Schrodinger. Infatti moltiplichiamo l'equazione (5.21) per la funzione d'onda coniugata  $\Psi^*(t, \mathbf{r})$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*(t, \mathbf{r})\Delta\Psi(t, \mathbf{r}) + \Psi^*(t, \mathbf{r})U(t, \mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\Psi^*(t, \mathbf{r})\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) \quad (5.22)$$

e per la funzione  $\Psi(t, \mathbf{r})$  l'equazione coniugata di (5.21)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi(t, \mathbf{r})\Delta\Psi^*(t, \mathbf{r}) + \Psi(t, \mathbf{r})U(t, \mathbf{r})\Psi^*(t, \mathbf{r}) = -i\hbar\Psi(t, \mathbf{r})\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(t, \mathbf{r}) \quad (5.23)$$

Sottraendo membro a membro le equazioni (5.22) e (5.23) abbiamo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*(t, \mathbf{r})\Delta\Psi(t, \mathbf{r}) + \frac{\hbar^2}{2m}\Psi(t, \mathbf{r})\Delta\Psi^*(t, \mathbf{r}) = i\hbar\Psi^*(t, \mathbf{r})\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, \mathbf{r}) + i\hbar\Psi(t, \mathbf{r})\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(t, \mathbf{r}) \quad (5.24)$$

che può essere facilmente riscritta in maniera compatta come

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_\Psi(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial \rho_\Psi(t, \mathbf{r})}{\partial t} = 0 \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \mathbf{J}_\Psi(t, \mathbf{r}) = -\frac{i\hbar}{2m} \left[ \Psi^*(t, \mathbf{r})\nabla\Psi(t, \mathbf{r}) - \Psi(t, \mathbf{r})\nabla\Psi^*(t, \mathbf{r}) \right] \\ \rho_\Psi(t, \mathbf{r}) = \Psi^*(t, \mathbf{r})\Psi(t, \mathbf{r}) = |\Psi(t, \mathbf{r})|^2 \end{cases} \quad (5.25)$$

L'equazione di Schrodinger ammette una legge di conservazione simile a quella della carica elettrica (1.24). Integrando in tutto lo spazio in cui  $\Psi(t, \mathbf{r}) \neq 0$  si ottiene

$$\int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{J}_\Psi(t, \mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3\mathbf{r} \rho_\Psi(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (5.26)$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3\mathbf{r} \rho_\Psi(t, \mathbf{r}) = - \int_S \mathbf{J}_\Psi(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0 \quad \text{nel caso in cui} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (5.27)$$

ottenendo il significativo risultato che integrata in tutto lo spazio la quantità  $\rho_\Psi(t, \mathbf{r})$  deve essere costante.

La quantità  $|\Psi(t, \mathbf{r})|^2$  è interpretata come la densità di probabilità di trovare la particella all'istante di tempo  $t$  in un dato volume infinitesimo. Quindi è sempre possibile definire una probabilità tale che

$$\int_V d^3\mathbf{r} |\Psi(t, \mathbf{r})|^2 = 1 \quad (5.28)$$

### 5.3.1 Stati stazionari

Si definiscono stati stazionari quei sistemi fisici per i quali l'energia potenziale non dipende dal tempo  $U(t, \mathbf{r}) = U(\mathbf{r})$ . Dalla teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali possiamo riscrivere la funzione d'onda come prodotto di due funzioni  $\varphi(\mathbf{r})$  e  $\lambda(t)$ :  $\Psi(t, \mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})\lambda(t)$ . L'equazione di Schrodinger (5.21) diviene

$$-\frac{1}{\varphi(\mathbf{r})} \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\varphi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) = i\hbar \frac{1}{\lambda(t)} \frac{\partial}{\partial t} \lambda(t) \quad (5.29)$$

dove notiamo che il termine a sinistra è funzione soltanto di  $\mathbf{r}$  mentre il termine a destra è funzione soltanto del tempo. Siccome l'uguaglianza deve essere valida per ogni istante di tempo ed in ogni punto è chiaro che i due membri devono essere uguali ad una costante. Tale costante si dimostra essere l'energia  $\mathcal{E}$ . Possiamo quindi sdoppiare le equazioni ottenendo il seguente sistema



$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \mathcal{E}\varphi(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial\lambda(t)}{\partial t}\lambda(t) = -i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}\lambda(t) \end{cases} \quad (5.30)$$

La prima equazione non può essere risolta se non si specifica la funzione energia potenziale, mentre la seconda equazione è facilmente risolvibile per separazioni di variabili. Infatti

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}(t-t_0)} \quad (5.31)$$

da cui la soluzione generale per gli stati stazionari diviene

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}(t-t_0)} \quad (5.32)$$

dove  $\varphi$  deve soddisfare la prima equazione del sistema (5.30). La costante  $\lambda_0$  è riassorbita nella definizione della funzione  $\varphi(\mathbf{r})$ . La densità di probabilità  $|\Psi(t, \mathbf{r})|^2$  nel caso degli stati stazionari diviene

$$|\Psi(t, \mathbf{r})|^2 = \Psi(t, \mathbf{r}) \Psi^*(t, \mathbf{r}) = \left[ \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}(t-t_0)} \right] \left[ \varphi^*(\mathbf{r}) e^{i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}(t-t_0)} \right] = \varphi(\mathbf{r}) \varphi^*(\mathbf{r}) = |\varphi(\mathbf{r})|^2 \quad (5.33)$$

da cui si evince il motivo della definizione di stazionarietà nel caso in cui l'energia potenziale non dipenda dal tempo. La posizione della particella, cioè la zona in cui può probabilisticamente trovarsi, è determinata dalla funzione d'onda  $\varphi(\mathbf{r})$ .

### 5.3.2 Problemi unidimensionali

Analizziamo il caso unidimensionale dell'equazione di Schrodinger nel caso stazionario (prima equazione del sistema (5.30)) che può riscritta come segue

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2} \left( U(x) - \mathcal{E} \right) \right] \varphi(x) = 0 \quad (5.34)$$

La scelta dell'energia potenziale  $U(x)$  individuerà il particolare sistema fisico.

$U(x) = 0$  (**particella libera**)

L'equazione di Schrodinger diviene

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right] \varphi(x) = 0 \quad (5.35)$$

dove  $k^2 = \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} > 0$ . La soluzione è presto ottenuta come

$$\varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (5.36)$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti arbitrarie. La funzione d'onda  $\Psi(t, x)$  diviene

$$\Psi(t, x) = A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{-i(kx + \omega t)} \quad (5.37)$$

avendo introdotto la pulsazione  $\omega = \mathcal{E}/\hbar$ . Quindi la soluzione é data dalla sovrapposizione di due onde piane che si propagano una verso sinistra e l'altra verso destra. Alla pulsazione  $\omega$  si aggiunge l'interpretazione di  $k$  come il vettore d'onda. Sofferamoci su una delle due. Quindi poniamo  $B = 0$ . La densità di probabilità quindi é data da

$$|\Psi(t, x)|^2 = |A|^2 \quad (5.38)$$

che ci garantisce uguale probabilità di trovare la particella in ogni punto dello spazio (siamo in presenza di un moto rettilineo ed uniforme).

Concludiamo questo caso notando come abbiamo ottenuto le due ipotesi fondamentali per il dualismo onda - particella: l'ipotesi di De Broglie ( $p = \hbar k$ ) e la legge di Planck ( $\mathcal{E} = \hbar \omega$ ). Infatti  $\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  (energia cinetica)  $\rightarrow p = \hbar k$ .

### Barriera di energia

Riportiamo il calcolo necessario per dimostrare la probabilità di transizione attraverso la barriera di energia per il decadimento  $\alpha$ . L'andamento spaziale della barriera può essere modellato con quanto riportato in figura 3.11. Quindi  $U(x)$  é schematizzabile come

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \quad x > a \\ \mathcal{E}_0 & 0 < x < a \end{cases} \quad (5.39)$$

La funzione d'onda soluzione dell'equazione (5.34) nelle tre regioni mostrate in figura 3.11 é la seguente

$$\begin{cases} \varphi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} & x < 0 \\ \varphi_{II}(x) = C e^{ilx} + D e^{-ilx} & 0 < x < a \\ \varphi_{III}(x) = F e^{ikx} + G e^{-ikx} & a < x \end{cases} \quad (5.40)$$

dove  $l^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E})$ . Calcoliamo ora le probabilità  $\mathcal{T}$  che la particella venga trasmessa e la probabilità  $\mathcal{R}$  che venga riflessa attraverso le costanti  $A, B, C, D, F$  e  $G$  che rappresentano i pesi alle onde piane presenti nelle tre zone. Il coefficiente  $G$  é uguale a zero in quanto esternamente a destra della barriera dobbiamo avere solo particelle uscenti. Nelle altre due zone é possibile avere onde propaganti su entrambi i versi di percorrenza dell'asse  $x$ . I coefficienti  $A, B, C, D, F$  devono soddisfare le condizioni al contorno nei punti di separazione. In particolare dobbiamo garantire la continuità sia di  $\varphi(x)$  che la sua derivata  $\varphi'(x)$ . In formule abbiamo

$$\begin{cases} \varphi_I(0) = \varphi_{II}(0) \\ \varphi_{II}(a) = \varphi_{III}(a) \\ \varphi'_I(0) = \varphi'_{II}(0) \\ \varphi'_{II}(a) = \varphi'_{III}(a) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B = C + D \\ C e^{ila} + D e^{-ila} = F e^{ika} \\ ik(A - B) = il(C - D) \\ il(C e^{ila} - D e^{-ila}) = ikF e^{ika} \end{cases} \quad (5.41)$$

Risolviendo il sistema ed in particolare rispetto alle variabili  $F/A$  e  $B/A$  otteniamo i coefficienti di riflessione e di trasmissione attraverso la barriera di energia

$$\begin{cases} \mathcal{T} = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{4k^2 l^2}{4k^2 l^2 + (k^2 - l^2) \sin^2(la)} \\ \mathcal{R} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{(k^2 - l^2) \sin^2(la)}{4k^2 l^2 + (k^2 - l^2) \sin^2(la)} \end{cases} \quad (5.42)$$

che soddisfano ovviamente la condizione  $\mathcal{T} + \mathcal{R} = 1$ . Sostituendo in  $\mathcal{T}$  le espressioni di  $k^2$  e  $l^2$  nel caso  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$  otteniamo l'espressione generale dell'effetto tunnel mostrato in (3.53).



# Appendice C: Tavola periodica

**Tavola periodica degli elementi**

1/IA

1	H
1,00794	idrogeno

2/IIA

3	Li
6,941	litio
4	Be
9,012182	berillio
11	Na
22,989768	sodio
12	Mg
24,3050	magnesio

3/IIIB

19	K
39,0983	potassio
20	Ca
40,078	calcio
21	Sc
44,955910	scandio
22	Ti
47,867	titanio
23	V
50,9415	vanadio
24	Cr
51,9961	cromo
25	Mn
54,93805	manganese
26	Fe
55,845	ferro
27	Co
58,93320	cobalto
28	Ni
58,6934	nichel
29	Cu
63,546	rame
30	Zn
65,39	zinc
31	Ga
69,723	gallio
32	Ge
72,61	germanio
33	As
74,92159	arsenico
34	Se
78,96	selenio
35	Br
79,904	bromo
36	Kr
83,80	crip
37	Rb
85,4678	rubidio
38	Sr
87,62	stronzio
39	Y
88,90685	itrio
40	Zr
91,224	zirconio
41	Nb
92,90638	niobio
42	Mo
95,94	molibdeno
43	Ru
101,07	rodio
44	Rh
102,90550	paladio
45	Pd
106,42	argento
46	Ag
107,8682	oro
47	Cd
112,411	cadmio
48	In
114,818	stagno
49	Sn
118,710	piombo
50	Pb
207,2	talio
51	Tl
204,3833	mercurio
52	Hg
200,59	oro
53	Au
196,96654	platino
54	Pt
195,08	iridio
55	Ir
192,217	osmio
56	Os
190,2	renio
57	Re
186,207	cerio
58	Hf
178,49	tantalio
59	Ta
183,84	niobio
60	W
186,207	volframo (tungsteno)
61	Rf
104	actinide
62	Db
105	actinide
63	Sg
106	actinide
64	Bh
107	actinide
65	Hs
108	actinide
66	Mt
109	actinide

18/0

2	He
4,002602	elio
9	F
18,9984032	fluoro
10	Ne
20,1797	neon
17	Cl
35,4527	cloro
18	Ar
39,948	arg
35	Br
79,904	bromo
53	I
126,90447	iodio
85	At
209,98711	astato
86	Xe
131,29	xeno
83	Rn
222,0176	radon

numeri di ossidazione più comuni → +1 19 ← numero atomico

← simbolo

← nome

← K 39,0983 potassio (tra parentesi il peso atomico dell'isotopo con vita più lunga)

elementi di transizione

8/VIII 9/VIII 10/VIII 11/IB 12/IB

7/VIIB 6/VI 5/VB 4/IVB 3/IIIB

gas nobili

gas nobili

lantanidi

actinidi



# Ringraziamenti

Prima di tutto vorrei ringraziare il professore Arturo Stabile, per avermi ispirato con le sue parole, portandomi sulla retta via: giunto a Benevento tre anni fa, affascinato dall'Ingegneria, é bastata una sola lezione del suo corso per farmi appassionare piú che mai alla fisica, portandomi a rivedere il mio intero piano di studi. Lo ringrazio inoltre per avermi guidato ed aiutato durante questo lavoro di tesi. Grazie per avermi permesso di lavorare ad un'idea cosí importante ed innovativa per il mio corso di laurea. Ringrazio anche il professore Maurizio Sasso per la sua cortese attenzione, per i suggerimenti e le indicazioni sul materiale fornitomi sullo stato dell'arte dei reattori nucleari.

Inoltre un enorme grazie ai miei genitori e alla mia famiglia, per avermi sostenuto in questa pazza idea di laurearmi. Grazie mamma e papá per tutto quello che avete sempre fatto per me, e non preoccupatevi poiché non é ancora finita ... e dovete ancora mantenermi.

Ringrazio i miei amici e i miei coinquilini che sono diventati la mia seconda famiglia. Porteró con me per tutta la vita le belle giornate trascorse insieme con le nostre fantasie per il futuro.

Infine, un ultimo ringraziamento lo voglio fare a quella pazza di Antonia che mi é sempre stata accanto in questo percorso, grazie per avermi aiutato e sostenuto in questo percorso, e soprattutto per tutti quei momenti in cui ti rompevo le scatole per ripetere.

Grazie a tutti.

Pasquale





# Bibliografia

- [1] Mencuccini C., Silvestrini V. Fisica I - Meccanica Termodinamica, Liguori editore
- [2] Mencuccini C., Silvestrini V. Fisica II - Elettromagnetismo Ottica, Liguori editore
- [3] Jackson J.D., Elettrodinamica classica, Zanichelli
- [4] Ugarov V.A., Special Theory of Relativity, MIR
- [5] Spolskij E.V., Fisica Atomica vol. 1, MIR - Editori Riuniti
- [6] Bernardini C., Guaraldo C., Fisica del nucleo, MIR - Editori Riuniti
- [7] Sitenko A.G., Tartakovskij V.K., Lezioni di teoria del nucleo, MIR - Editori Riuniti
- [8] Cohen-Tannaoudji C., Diu B., Laloe F., Quantum mechanics vol. 1, John Wiley & Sons
- [9] Kaplan I., Nuclear physics, Addison-Wesley Publishing Company
- [10] Ceradini F., Appunti del corso di Istituzioni di Fisica Nucleare e Subnucleare, Dipartimento di fisica Roma 3